

文章编号:1005-0523(2016)03-0110-05

非倍测度下 Marcinkiewicz 积分的加权 Morrey 估计

叶晓峰, 张博涵

(华东交通大学理学院, 江西 南昌 330013)

摘要:研究了非倍测度下 Marcinkiewicz 积分算子 M 的加权 Morrey 估计。利用反向 Hölder 不等式和函数分解理论, 在权函数 ω 满足 $A_p(\mu)$ 条件时, 获得了积分算子 M 是从 $L^{p,k}(\omega)$ 到弱 $L^{p,k}(\omega)$ 有界的, 其中 $1 \leq p < \infty, 0 < k < 1$; 从而将 Marcinkiewicz 积分算子的有界性结果推广到了非倍测度空间。

关键词: 加权 Morrey 空间; 非倍测度; Marcinkiewicz 积分算子; $A_p(\mu)$ 权

中图分类号: O174.2 **文献标志码:** A

DOI:10.16749/j.cnki.jecjtu.2016.03.018

设 μ 是 R^d 上的 Lebesgue 测度, 2008 年 Komori Y 和 Shirai S 引入了加权 Morrey 空间, 讨论了 Hardy-Littlewood 极大算子、Calderón-Zygmund (C-Z) 奇异积分算子和分数次积分算子等经典算子及交换子在加权 Morrey 空间上的有界性^[1]。由于 Morrey 空间在方程局部正则性问题中起着重要的作用, 相应的加权 Morrey 空间也引起了许多学者的关注, 相关的结论可参考文献[2-4]。特别地, 2013 年傅尊伟, 陆善镇和史绍光在加权 Morrey 空间上考虑了椭圆方程的局部正则性问题^[5]。另一方面, 非倍测度理论起源于 Nazarov F, Treil S 和 Volberg A, 讨论了非倍测度下的 $T(1)$ 定理^[6]。1998 年, David G 讨论了 $T(b)$ 定理并解决了 Titushkin 猜想^[7] ($T(b)$ 定理的证明也可参考[8]), 从而进一步引起广大学者的关注并发现在非倍测度下大部分调和和分析中的经典结果仍然成立。由此引发思考, 加权 Morrey 空间的相关结论在非倍测度下是否也仍然成立呢?

当 R^d 上的 Radon 非负测度 μ 满足增长性条件: 对任意的方体 $Q \subset R^d$, 有 $\mu(Q) \leq Cl^n$, 本文中符号 C 会在不同的地方出现, 表示不同的常数, 但都与主要参数无关; 其中 $0 < n \leq d, l$ 是方体的边长。本文将讨论 Marcinkiewicz 算子在加权 Morrey 空间上的弱有界性问题。

设 $K(\cdot, \cdot): R^d \times R^d \rightarrow R$ 是局部可积函数, 若对任意的 $x, y \in R^d, x \neq y$, 存在常数 $C > 0$, 使得

$$|K(x, y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{n-1}} \quad (1)$$

以及对于任意的 $x, x', y \in R^d$ 且 $|x-x'| \leq |x-y|/2$, 存在常数 $0 < \varepsilon \leq 1$ 和 $C > 0$, 使得 $|K(x, y) - K(x', y)| +$

$$|K(y, x) - K(y, x')| \leq C \frac{|x-x'|^\varepsilon}{|x-y|^{n+\varepsilon}}。$$

对于上述的核函数 $K(x, y)$ 以及非倍测度 μ , 定义 Marcinkiewicz 积分算子为

收稿日期: 2015-11-30

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11161021); 江西省高校科技落地项目资助 (KJLD12067); 江西省青年科学基金资助 (20142BAB211009)

作者简介: 叶晓峰 (1980—), 男, 副教授, 研究方向为调和分析。

$$Mf(x) = \left(\int_0^\infty \left| \int_{|x-y| \leq t} K(x,y)f(y) d\mu(y) \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}}, x \in R^d \quad (2)$$

2005 年,江寅生得到了 Marcinkiewicz 积分算子 M 是 $H^1(\mu)$ 到 $L^1(\mu)$ 以及 $L^\infty(\mu)$ 到 $RBLO(\mu)$ 有界的^[9]。2007 年,胡国恩,林海波和杨大春证明了积分算子 M 也是弱 $(L^1(\mu), L^1(\mu))$ 有界的^[10]。2012 年,王松柏,江寅生和李德宝考虑了当权函数 $\omega \in A_p^\rho$ 时,积分算子 M 的弱 $(L^p(\omega), L^p(\omega))$ 有界性^[11]。

非倍测度下的 Muckenhoupt 权 $A_p^\rho, (\rho=1)$ 是 Orobitg J 和 Pérez C^[12] 首次引入的,对于一般的 $\rho \in [1, \infty)$, Komori Y 给出了详细介绍^[13]。

定义 1^[13] 设 $\rho \in [1, \infty), 0 < p < \infty$, 若对于任意的方体 Q 和权函数 $\omega(x)$, 存在正数 $C > 0$, 满足不等式

$$\left(\frac{1}{\mu(\rho Q)} \int_Q \omega d\mu \right) \left(\frac{1}{\mu(\rho Q)} \int_Q \omega^{1-p'} d\mu \right)^{p-1} \leq C \quad (3)$$

则称 $\omega \in A_p^\rho(\mu)$; 若满足不等式

$$\frac{1}{\mu(\rho Q)} \int_Q \omega d\mu \leq C \inf_{x \in Q} \omega(x) \quad (4)$$

则称 $\omega \in A_{p,1}^\rho(\mu)$; 并令 $A_{p,\infty}^\rho(\mu) = \bigcup_{p=1}^\infty A_p^\rho(\mu)$ 。由定义可知 $A_{p,1}^\rho(\mu) \subset A_p^\rho(\mu)$ (简记为 $A_{p,1}^\rho(\mu) = A_p(\mu)$)。

定义 2 设 $1 \leq p < \infty, 0 < k < 1, \sigma \in [1, \infty)$, 对于局部可积的权函数 $\omega(x)$, 定义加权 Morrey 空间为这里范数 $\|f\|_{L^{p,k}(\sigma, \omega)}$ 定义为

$$L^{p,k}(\sigma, \omega) := \{f \in L_{\text{loc}}^p(\omega) : \|f\|_{L^{p,k}(\sigma, \omega)} < \infty\} \quad (5)$$

$$\|f\|_{L^{p,k}(\sigma, \omega)} := \left(\frac{1}{\omega(\sigma Q)^k} \int_Q |f(y)|^p \omega(x) d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (6)$$

其中: $\omega(\sigma Q) = \int_{\sigma Q} \omega(x) d\mu(x)$ 。若 $\omega \equiv 1$ 则 $L^{p,k}(\sigma, \omega) = L^{p,k}(\sigma, \mu)$ 是非倍测度下的 Morrey 空间, 见^[14]。若 $L^{p,0}(\sigma, \omega) = L^p(\omega)$, 则为加权 Lebesgue 空间。显然, $L^{p,k}(\sigma, \omega)$ 在其范数下是 Banach 空间。下面我们介绍本文的主要结果。

定理 1 设 $1 \leq p < \infty, \sigma, k > 1$ 以及 $\omega \in A_p(\mu)$ 。若 Marcinkiewicz 算子 M 是 L^2 有界的, 则 M 也是 $L^{p,\lambda}(\sigma, \omega)$ 到弱 $L^{p,\lambda}(\sigma, \omega)$ 有界的。即存在常数 $C > 0$, 对任意的 $\lambda > 0$ 有

$$\omega(\{x \in R^d : Mf(x) > \lambda\}) \leq \left(\frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^{p,k}(\sigma, \omega)}^p \omega(\sigma Q)^k \right) \omega^k(\sigma Q) \quad (7)$$

方体 $Q \subset R^d$ 表示边长平行于坐标轴的方体, $l(Q)$ 表示其边长, ρQ 便是与方体 Q 同心, 边长是 ρ 倍的方体。

1 准备工作

为了定理 1 的证明, 下面我们先介绍几个相关的引理。

引理 1^[12] 设 $\rho > 1, \omega \in A_p(\mu)$, Marcinkiewicz 积分算子在 $L^2(\mu)$ 上有界, 则对于任意的 $1 \leq p < \infty$, 算子 M 也是从 $L^p(\omega)$ 到 $L^{p,\infty}(\omega)$ 上弱有界的。即对任意的正数 $\lambda > 0$ 和 $C > 0$, 有

$$\omega(\{x \in R^d : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{R^d} |f(y)|^p \omega(x) d\mu(x) \quad (8)$$

其中: f 是具有紧支集的有界函数, C 仅与 d, ρ, p 和 n 有关。

下面我们给出 $A_\infty(\mu)$ 的一系列等价条件。

引理 2^[13] 对于任意的权函数 ω , 下列条件等价:

① $\omega \in A_\infty(\mu)$;

② 对于任意的方体, 有 $\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \omega d\mu \approx \exp\left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \log \omega d\mu\right)$

③ 对于任意的方体 Q , 存在常数 $0 < \alpha, \beta < 1$, 使得

$$\mu(\{x \in Q: \omega(x) \leq \beta \omega_Q\}) \leq \alpha \mu(Q) \quad (9)$$

其中 $\omega_Q = \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \omega(x) d\mu(x)$ 。

④ 对于任意的方体 Q 以及 $\lambda > \omega_Q$, 存在正数 C 和 β , 使得

$$\omega(\{x \in Q: \omega(x) > \lambda\}) \leq C \lambda \mu(\{x \in Q: \omega(x) > \beta \lambda\}) \quad (10)$$

⑤ ω 满足反 Hölder 不等式: 即对任意的方体 Q , 存在正数 C 和 δ , 使得

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \omega^{1+\delta} d\mu \right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq \frac{C}{\mu(Q)} \int_Q \omega d\mu \quad (11)$$

⑥ 对于任意的方体 Q 以及子方体 $E \subset Q$, 存在正数 C 和 $0 < \varepsilon < 1$, 使得 $\frac{\omega(E)}{\omega(Q)} \leq C \left(\frac{\mu(E)}{\mu(Q)} \right)^\varepsilon$;

⑦ 设 E 是方体 Q 的可测子集, 存在正数 $\alpha, \delta < 1$, 使得若 $\frac{\mu(E)}{\mu(Q)} < \alpha$, 则 $\frac{\omega(E)}{\omega(Q)} < \beta$ 。

对于加权 Morrey 空间, 发现参数 $\sigma > 1$ 实际上对于空间的定义并没有本质的影响, 我们有如下性质。

性质 1 设 $1 \leq p < \infty, 0 < k < 1$ 以及权函数 $\omega(x)$, 则对于任意的 $\sigma_1 \sigma_2 \geq 1$ 我们有 $L^{p,k}(\sigma_1, \omega) \approx L^{p,k}(\sigma_2, \omega)$ 。

证明 不妨设 $1 < \sigma_1 \leq \sigma_2$ 。由加权 Morrey 空间的定义显然有 $L^{p,k}(\sigma_1, \omega) \subset L^{p,k}(\sigma_2, \omega)$, 我们只需要考虑另

一边的包含关系。对于任意的方体 $Q \subset R^d$, 易知存在一系列等边长的方体列: $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ 使得方体 $Q \subset \bigcup_{i=1}^N Q_i$

并且 $\sigma_2 Q_i \subset \sigma_1 Q_i (i=1, 2, \dots, N)$, 其中自然数 $N \leq C \left(\frac{\sigma_2 - 1}{\sigma_1 - 1} \right)^d$ 。运用上面的覆盖过程, 对于任意的方体 $Q \subset R^d$, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega(\sigma_1 Q)^k} \int_Q |f(x)|^p \omega(x) d\mu(x) &\leq \sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega(\sigma_1 Q)^k} \int_{Q_i} |f(x)|^p \omega(x) d\mu(x) \leq \\ &\sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega(\sigma_2 Q_i)^k} \int_{Q_i} |f(x)|^p \omega(x) d\mu(x) \leq N \|f\|_{L^{p,k}(\sigma_2, \omega)}^p \end{aligned} \quad (12)$$

因此, 我们只需考虑 $L^{p,k}(2, \omega) \equiv L^{p,k}(\omega)$ 的情形。

2 定理 1 的证明

本节我们将利用前面所给的引理和性质来讨论定理的证明。

定理 1 的证明: 对于任意的方体 $Q = Q(x_0, l)$ 以及具有紧支集的有界函数 $f(x) \in L^{p,k}(\omega)$, 我们可以将函数 f 分解为 $f = f \chi_{2Q} + f \chi_{R^d \setminus 2Q} \equiv f_1 + f_2$, 其中 χ_{2Q} 是特征函数, 从而有

$$\omega(\{x \in Q: Mf(x) > \lambda\}) \leq \omega(\{x \in Q: M_1 f(x) > \frac{\lambda}{2}\}) + \omega(\{x \in Q: M_2 f(x) > \frac{\lambda}{2}\}) := I + J \quad (13)$$

对于 I 部分, 直接使用引理 1, 有

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{R^d} |f_1(x)|^p \omega(x) d\mu(x) = \\ &\frac{C}{\lambda^p \omega(4Q)^k} \int_{2Q} |f_1(x)|^p \omega(x) d\mu(x) \omega(4Q)^k \leq \left(\frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^{p,k}(\omega)} \right)^p \omega(4Q)^k \end{aligned} \quad (14)$$

对于 J 部分, 由于倍测度条件不满足, 原有的方法失效。此处我们使用了权函数与测度之间的比较性质(引理 2(f))以及非倍测度的增长性条件解决了问题。具体地, 注意到对于任意的 $x \in Q$, 利用 Minkowski 不等式, 有

$$M f_2(x) \leq C \left(\int_0^\infty \left| \int_{|x-y| \leq t} \frac{f_2(y)}{|x-y|^{y_1-1}} d\mu(y) \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \int_{R^d \setminus 2Q} \frac{|f_2(y)|}{|x-y|^{y_1-1}} d\mu(y) = C$$

$$M f_2(x) \leq C \int_{|x_0-y| > l} |f(y)| \int_{\frac{1}{2}}^\infty t^{-n-1} dt d\mu(y) \int_{|x-y|}^\infty t^{-n-1} dt d\mu(y) \quad (15)$$

由于 $x \in Q, y \in R^d \setminus 2Q$ 则有 $|x-y| \geq |y-x_0| - |x-x_0| \geq \frac{1}{2}l$ 以及 $|x_0-y| \leq |x-x_0| + |x-y| \leq \frac{3}{2}t$, 从而有

$$M f_2(x) \leq C \int_{|x_0-y| > l} |f(y)| \int_{\frac{1}{2}}^\infty t^{-n-1} dt d\mu(y) \leq$$

$$C \int_{\frac{l}{2}}^\infty t^{-n-1} \int_{|x_0-y| \leq \frac{3}{2}t} |f(y)| d\mu(y) dt \leq C \int_{\frac{l}{2}}^\infty t^{-n-1} \omega^{\frac{-p'}{p}} \omega^{\frac{-p'}{p}} dt \quad (16)$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ 。由加权 Morrey 空间的定义知

$$\left(\int_{|x_0-y| \leq \frac{3}{2}t} |f(y)|^p \omega(y) d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{L^{p,k}(\omega)} \omega^{\frac{k}{p}}(Q(x_0, 6t)) \quad (17)$$

另一方面, 由 $A_p(\mu)$ 权的条件知 $\omega^{\frac{-p'}{p}}(Q(x_0, 6t))^{\frac{-1}{p'}} \leq C \mu(Q(x_0, 6t)) (\omega(Q(x_0, 6t)))^{\frac{-1}{p}}$ 。

并且注意到引理 2.2(f), 从而 $M f_2(x)$ 有如下估计

$$M f_2(x) \leq C \|f\|_{L^{p,k}(\omega)} \int_{\frac{l}{2}}^\infty \frac{\mu(Q(x_0, 6t))}{t^{n+1}} (\omega(Q(x_0, 6t)))^{\frac{-1-k}{p}} dt \leq$$

$$C \|f\|_{L^{p,k}(\omega)} \int_{\frac{l}{2}}^\infty \frac{\mu(Q(x_0, 6t))}{t^{n+1}} (\omega(Q(x_0, 6t)))^{\frac{-1-k}{p}} \left(\frac{\mu(Q(x_0, l))}{\mu(Q(x_0, 6t))} \right)^{\varepsilon \frac{1-k}{p}} dt \leq \quad (18)$$

$$C \|f\|_{L^{p,k}(\omega)} \omega(Q)^{\frac{k-1}{p}} \mu(Q)^{\frac{\varepsilon(1-k)}{p}} \int_{\frac{l}{2}}^\infty \frac{\mu(Q(x_0, 6t))^{1-\frac{\varepsilon(1-k)}{p}}}{t^{n+1}} dt$$

从而由测度 μ 的增长性条件 $\mu(Q) \leq Cl^n$, 则有

$$\int_{\frac{l}{2}}^\infty \frac{\mu(Q(x_0, 6t))^{1-\frac{\varepsilon(1-k)}{p}}}{t^{n+1}} dt \leq C \int_{\frac{l}{2}}^\infty t^{-1-\frac{n\varepsilon(1-k)}{p}} dt \leq Cl^{\frac{-n\varepsilon(1-k)}{p}} \quad (19)$$

最后再次利用测度 μ 的增长性条件, 从而有

$$M f_2(x) \leq C \|f\|_{L^{p,k}(\omega)} \omega(Q)^{\frac{k-1}{p}} \quad (20)$$

将上式代入 J , 可得 $J \leq \frac{1}{\lambda^p} \int_Q |M f_2|^p(x) \omega(x) d\mu(x) \leq \frac{1}{\lambda^p} \|f\|_{L^{p,k}(\omega)}^k \omega(Q)^k$ 。

从而定理得证。

参考文献:

- [1] KOMORI Y, SHIRAI S. Weighted Morrey spaces and a singular integral operator [J]. Math Nachr, 2009, 282(2): 219–231.
- [2] WANG H. Intrinsic square functions on the weighted Morrey spaces [J]. J Math Anal Appl, 2012, 396(1): 302–314.
- [3] 王华, 刘和平. Bochner–Riesz 算子在加权 Morrey 空间上的一些估计[J]. 数学学报, 2012, 55(3): 551–560.
- [4] YE X F, ZHU X S. Estimates of singular integrals and multilinear commutators in the weighted Morrey spaces[J]. J of Ineq and Appl, 2012, 8(1): 1–13.
- [5] FU Z W, LU S Z, SHI S G. Boundedness of sublinear operators on weighted Morrey spaces and applications[J]. [EB/OL]. (2012–08–14)[2015–11–30]. <http://arxiv.org/pdf/1208>.
- [6] NAZAROV F, TREIL S, VOLBERG A. Cauchy integral and Calderón–Zygmund operators on nonhomogeneous spaces[J]. Int. Math Res Not, 1997, 15: 703–726.
- [7] David G. Unrectifiable 1-sets have vanishing analytic capacity [J]. Revista Mat Ibero, 1998, 14(2): 369–479.
- [8] NAZAROV F, TREIL S, VOLBERG A. The Tb-theorem on nonhomogeneous spaces [J]. Acta Math, 2003, 190(2): 151–239.
- [9] JIANG Y S. Spaces of type BLO for non-doubling measures [J]. Proc Amer Math Soc, 2005, 133(7): 2101–2107.
- [10] HU G E, LIN H B, YANG D C. Marcinkiewicz integrals with non-doubling measures [J]. Integral Equations Operator Theory, 2007, 58(20): 205–238.
- [11] WANG S B, JIANG Y S, LI D B. Weighted estimates for Marcinkiewicz integrals with nondoubling measures[J]. J Math Research Appl, 2012, 32(2): 223–234.
- [12] OROGITU J, PEREZ C. weights for nondoubling measures in an application [J]. Trans Amer Math Soc, 2002, 354: 2013–2033.
- [13] KOMORI Y. Weighted estimates for operators generated by maximal functions on non-homogeneous spaces[J]. Georgian Math J, 2005, 12(1): 121–130.
- [14] SAWANO Y, TANAKA H. Morrey spaces for non-doubling measures [J]. Acta Math Sinica, 2005, 21(6): 1535–1544.

Weighted Morrey Estimates of Marcinkiewicz Integral Operators in Non-Doubling Measures

Ye Xiaofeng, Zhang Bohan

(School of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In non-doubling measures, the boundedness of Marcinkiewicz integral operator M is investigated on weighted Morrey spaces. When weight function ω satisfies the condition of $A_p(\mu)$, the operators M is bounded from $L^{p,k}(\omega)$ to weak $L^{p,k}(\omega)$, where $1 \leq p < \infty, 0 < k < 1$. It mainly generalizes the result of Marcinkiewicz integral operator in non-doubling measures.

Key words: weighted Morrey spaces; non-doubling measure; Marcinkiewicz integral; $A_p(\mu)$

(责任编辑 姜红贵)