

文章编号: 1005-0523(2017)03-0060-06

一类弹性需求混合均衡交通分配的效率损失

余孝军, 李 佳

(贵州财经大学数统学院, 贵州 贵阳 550025)

摘要: 交通网络中不同类型用户的路径选择行为导致混合均衡交通分配。自私用户总是选择最小实际出行成本的路径出行, 利他用户选择最小理解出行成本的路径出行。最小理解出行成本是实际出行成本与边际出行成本的线性加权。首先, 构建了自私用户和利他用户弹性需求混合均衡交通分配的等价变分不等式模型; 然后, 假定路段出行成本函数为多项式出行成本函数, 并运用非线性规划方法界定了该类混合均衡交通分配的效率损失上界及其与网络参数的关系。研究结果表明, 效率损失上界与网络拓扑结构无关, 只和路段出行成本函数的最高次以及最小和最大利他系数相关。

关键词: 自私用户; 利他用户; 弹性需求; 变分不等式; 效率损失

中图分类号: U491; O22

文献标志码: A

DOI: 10.16749/j.cnki.jecjtu.2017.03.010

用户均衡和系统最优是有限资源分配和用户相互影响问题中常见的两类均衡, 理论界一直在寻求界定它们之间差距的方法及探讨实现用户均衡到系统最优的转变措施。近年来, 研究交通科学的学者们对交通均衡行为的效率损失及降低均衡行为效率损失的方法进行了大量的研究。骆伟等建立了改进的阻抗函数下的混合交通均衡模型, 并证明了该模型的最优解等价于 Wardrop 用户均衡^[1]。刘天亮等研究了交通网络中部分用户装配先进的交通信息系统时在均衡状态下的效率损失上界^[2], Han 等进一步研究了多用户类交通网络在用户均衡情形下的效率损失上界^[3], 余孝军等讨论了固定需求网络中收费情形下多用户类随机均衡的效率损失, 探讨了固定需求下自私-利他用户混合交通均衡分配的效率损失^[4-5]。曾明华等对多层次交通网络混合均衡的效率损失上界进行了研究, 并探讨了该上界值的影响因素^[6]。上述研究都是考虑固定需求下混合交通均衡分配的效率损失。至今为止, 对弹性需求下交通均衡分配效率损失的研究不多见。Chau 和 Sim 扩展了 Roughgarden 和 Tardos 的结论到弹性需求情形, 他们认为界定弹性需求下的效率损失上界比界定固定需求下的效率损失上界困难, 并定义弹性需求下的效率损失为最大社会剩余和均衡处的总剩余之比, 给出了一个弹性需求下效率损失的粗糙上界, 该上界为需求函数的函数^[7]。Yu 和 Wang 探讨了弹性需求多用户类交通均衡分配的效率损失, 分别构建了基于时间决策准则和费用决策准则的变分不等式模型, 并通过解析方法得到了这两种不同准则下的效率损失上界和相关影响因素^[8]。但是目前, 国内外对于弹性需求下混合交通均衡分配效率损失的研究不多见。本文对弹性需求下自私-利他用户构成的混合交通网络的效率损失进行研究。首先给出弹性需求下自私-利他用户的等价变分不等式模型, 然后运用非线性规划方法推导此类均衡的效率损失上界, 并分析网络参数与效率损失上界的关系。

1 弹性需求下自私-利他用户混合均衡交通分配模型

交通网络 $G=(N, A)$, 其中 N 和 A 分别表示节点集合和路段集合, W 是所有起讫点集合, R_w 是起讫点 $w \in W$ 间的路径集。交通网络上有自私用户和利他用户两类不同出行者, u 表示网络中的自私用户; m 表示

收稿日期: 2016-12-24

基金项目: 国家自然科学基金项目(71161005); 贵州省教育厅“125”重大科技专项项目(黔教合重大专项字[2012]011号)

作者简介: 余孝军(1974—), 男, 教授, 博士, 研究方向为交通行为分析与建模, 博弈理论及其应用。

网络中的第 m 类利他用户,其利他系数为 $\beta_m, m \in M$ 。 q_w^u 是起讫点 $w \in W$ 上自私用户的出行量, q_w^m 是起讫点 $w \in W$ 上第 m 类利他用户的出行量。 f_{rw}^u 表示自私用户在路径 $r \in R_w, w \in W$ 上的流量, f_{rw}^m 表示第 m 类利他用户在路径 $r \in R_w, w \in W$ 上的出行量;如果路段 $a \in A$ 在路径 $r \in R_w$ 上,则 $\delta_{ar}^w=1$, 否则 $\delta_{ar}^w=0$; v_a^u 表示自私用户在路段 a 上的出行量; v_a^m 表示第 m 类利他用户在路段 a 上的出行量; $v=(\cdots, v_a^u, v_a^m, \cdots), m \in M$ 表示路段出行量向量; $f=(\cdots, f_{rw}^u, f_{rw}^m, \cdots), m \in M$ 表示路径出行量向量; $q=(\cdots, q_w^u, q_w^m, \cdots), m \in M$ 表示起讫点出行量向量; $v_a^M = \sum_{m \in M} v_a^m$ 表示所有利他用户在路段 a 产生的总出行量; $v_a = v_a^u + v_a^M$ 表示路段 a 上的总出行量; 设 B_w^u, B_w^m 分别为自私用户和第 m 类利他用户在起讫点 $w \in W$ 上的逆需求函数;假设路段出行成本函数 $t_a(v_a)$ 是路段出行量可分离函数,并且是出行量的连续可微单调递增的凸函数。

交通网络中的出行量守恒和非约束条件如下

$$q_w^u = \sum_{r \in R_w} f_{rw}^u, \forall w \in W \quad (1)$$

$$v_a^u = \sum_{r \in R_w} f_{rw}^u \delta_{ar}^w, \forall w \in W \quad (2)$$

$$f_{rw}^u \geq 0, r \in R_w, w \in W \quad (3)$$

$$q_w^m = \sum_{r \in R_w} f_{rw}^m, \forall w \in W \quad (4)$$

$$v_a^m = \sum_{r \in R_w} f_{rw}^m \delta_{ar}^w, \forall w \in W \quad (5)$$

$$f_{rw}^m \geq 0, r \in R_w, w \in W \quad (6)$$

式(1)~式(6)可写成矩阵形式 $\Omega = \{(v, q) \mid v = \Delta f, \Delta f = q, f \geq 0, q \geq 0\}$, 其中 $\Delta = [\delta_{ar}^w]$ 表示路段路径关联矩阵, $\Lambda = [\Lambda_{ar}]$ 表示起讫点路径关联矩阵。显然 Ω 是闭凸集。 Nagurney 和 Dong 给出了如下的多用户类弹性需求用户交通均衡分配的定理^[9]:

引理 1 $(\bar{v}, \bar{q}) \in \Omega$ 是弹性需求下多用户类交通均衡分配解的充要条件是对任意的 $(v, q) \in \Omega$, 下面的变分不等式成立。

$$\sum_{a \in A} \sum_{m=1}^M (c_a^m(\bar{v})(v_a^m - \bar{v}_a^m)) - \sum_{w \in W} \sum_{m=1}^M (B_w^m(\bar{q})(q_w^m - \bar{q}_w^m)) \geq 0 \quad (7)$$

这里 c_a^m 是第 m 类用户在路段 a 上的出行成本。

本文考虑的是自私用户和利他用户两类不同的用户, 后面的 $c_a^u(v_a)$ 表示自私用户在路段 a 上的出行成本, $c_a^m(v_a)$ 表示第 m 类利他用户在路段 a 上的理解出行成本, 且有

$$c_a^u(v_a) = t_a(v_a) \quad (8)$$

$$c_a^m(v_a) = t_a(v_a) + \beta_m v_a t_a'(v_a) \quad (9)$$

把式(8)和式(9)分别代入式(7)则可得弹性需求下自私-利他用户混合均衡交通分配模型为:

定理 1 $(\bar{v}, \bar{q}) \in \Omega$ 是弹性需求下自私-利他用户交通均衡分配解的充要条件是对任意的 $(v, q) \in \Omega$, 下面的变分不等式成立。

$$\sum_{a \in A} t_a^u(\bar{v}_a)(v_a^u - \bar{v}_a^u) - \sum_{a \in A} \sum_{m \in M} (t_a(\bar{v}_a) + \beta_m \bar{v}_a t_a'(\bar{v}_a))(v_a^m - \bar{v}_a^m) - \sum_{w \in W} B_w^u(\bar{q})(q_w^u - \bar{q}_w^u) - \sum_{w \in W} \sum_{m \in M} B_w^m(\bar{q})(q_w^m - \bar{q}_w^m) \geq 0 \quad (10)$$

定义系统在 $(v, q) \in \Omega$ 时的总体社会收益为

$$S(v, q) = \sum_{w \in W} \int_0^{q_w^u} B_w^u(w) dw + \sum_{w \in W} \int_0^{q_w^m} B_w^m(w) dw - \sum_{a \in A} t_a(v_a) v_a \quad (11)$$

则系统最优下的解 $(\hat{v}, \hat{q}) \in \Omega$ 即求解如下的优化问题

$$(\hat{v}, \hat{q}) = \arg \max_{(v, q) \in \Omega} S(v, q) \quad (12)$$

则该类混合均衡交通分配的效率损失表达式为

$$\rho = \frac{S(\hat{v}, \hat{q})}{S(\bar{v}, \bar{q})} \quad (13)$$

易得, $\rho \geq 1$, 下面我们来界定路段出行成本函数为多项式函数时该类混合均衡交通分配效率损失的上界值。

2 弹性需求下自私-利他混合均衡交通分配的效率损失

在界定弹性需求下自私-利他混合均衡交通分配的效率损失之前, 由文献[8]中的引理 1, 可得如下引理:

引理 2 如果对任意非负的 $q_w^m, B_w^m(q_w^m)$ 是 q_w^m 的非增函数, 那么有

$$\sum_{w \in W} \int_0^{q_w^m} B_w^m(x) dx \leq \sum_{w \in W} \int_0^{\bar{q}_w^m} B_w^m(x) dx + \sum_{w \in W} B_w^m(\bar{q}_w^m)(q_w^m - \bar{q}_w^m) \quad (14)$$

同样, 下面关系式也成立

$$\sum_{w \in W} \int_0^{q_w^u} B_w^u(x) dx \leq \sum_{w \in W} \int_0^{\bar{q}_w^u} B_w^u(x) dx + \sum_{w \in W} B_w^u(\bar{q}_w^u)(q_w^u - \bar{q}_w^u) \quad (15)$$

将式(14), 式(15)代入式(10)中并化简可得:

$$S(\bar{v}, \bar{q}) + \sum_{a \in A} (t_a(\bar{v}_a) - t_a(v_a))v_a + \sum_{a \in A} \sum_{m \in M} \beta_m \bar{v}_a t'_a(\bar{v}_a)(v_a^m - \bar{v}_a^m) \geq S(v, q) \quad (16)$$

令 $v = \bar{v}, q = \bar{q}$ 因此

$$\begin{aligned} S(\hat{v}, \hat{q}) &\leq S(\bar{v}, \bar{q}) + \sum_{a \in A} (t_a(\bar{v}_a) - t_a(\hat{v}_a))\hat{v}_a + \sum_{a \in A} \sum_{m \in M} \beta_m \bar{v}_a t'_a(\bar{v}_a)(\hat{v}_a^m - \bar{v}_a^m) \\ &\leq S(\bar{v}, \bar{q}) + \max_{v \in \Omega} \left\{ \sum_{a \in A} (t_a(\bar{v}_a) - t_a(v_a))v_a + \sum_{a \in A} \sum_{m \in M} \beta_m \bar{v}_a t'_a(\bar{v}_a)(v_a^m - \bar{v}_a^m) \right\} \\ &\leq S(\bar{v}, \bar{q}) + \max_{v \geq 0} \left\{ \sum_{a \in A} (t_a(\bar{v}_a) - t_a(v_a))v_a + \sum_{a \in A} \sum_{m \in M} \beta_m \bar{v}_a t'_a(\bar{v}_a)(v_a^m - \bar{v}_a^m) \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

假定 1 路段出行函数 $t_a(v_a)$ 是连续严格递增的凸函数, 且假设

$$t_a(v_a) = t_a(0) + \alpha_a(v_a)^p, \alpha_a \in A, t_a(0) \geq 0, \alpha_a \geq 0, p \geq 1 \quad (18)$$

将假设(18)代入式(17), 可得

$$S(\hat{v}, \hat{q}) \leq S(\bar{v}, \bar{q}) + \max_{v \geq 0} \left\{ \sum_{a \in A} \alpha_a ((\bar{v}_a)^p - (\hat{v}_a)^p) \hat{v}_a + \sum_{a \in A} \alpha_a p (\bar{v}_a)^{p-1} \sum_{m \in M} \beta_m (\hat{v}_a^m - \bar{v}_a^m) \right\} \quad (19)$$

下面我们考虑不等式(19)中右边第二项的最大值, 即考虑如下非线性规划问题

$$\max_{v \geq 0} \left\{ \sum_{a \in A} \alpha_a ((\bar{v}_a)^p - (v_a)^p) v_a + \sum_{a \in A} \alpha_a p (\bar{v}_a)^{p-1} \sum_{m \in M} \beta_m (v_a^m - \bar{v}_a^m) \right\} \quad (20)$$

设 $F(v_a) = \sum_{a \in A} \alpha_a ((\bar{v}_a)^p - (v_a)^p) v_a + \sum_{a \in A} \alpha_a p (\bar{v}_a)^{p-1} \sum_{m \in M} \beta_m (v_a^m - \bar{v}_a^m)$ 。由于 $F(v_a)$ 的 Hessian 矩阵是半负定矩阵, 因

此 $F(v_a)$ 是关于 $v_a \geq 0, p \geq 1$ 的凹函数, 从而 $F(v_a)$ 有唯一的全局最大值, 设 $\lambda_a^u, \lambda_a^m, a \in A$ 是变量 $v_a^M \geq 0, v_a^m \geq 0$ 的 Lagrange 乘子, 故可得式(20)的一阶最优性条件如下

$$\alpha_a(\bar{v}_a)^p - \alpha_a(p+1)(v_a)^p + \lambda_a^u = 0, \forall a \in A \quad (21)$$

$$\lambda_a^u \geq 0, \lambda_a^u v_a^u = 0, \forall a \in A \quad (22)$$

$$\alpha_a(\bar{v}_a)^p - \alpha_a(p+1)(v_a)^p + \alpha_a p \beta_m (\bar{v}_a)^p + \lambda_a^m = 0, \forall a \in A, m \in M \quad (23)$$

$$\lambda_a^m \geq 0, \lambda_a^m v_a^m = 0, \forall a \in A, m \in M \quad (24)$$

结合式(21)与式(22)可得, $v_a \geq \left(\frac{1}{1+p}\right)^{1/p} \bar{v}_a$, 在每一个给定路段, 我们可知式(20)可得到最大值当且仅当以下两种情况之一满足即可:

$$v_a = \left(\frac{1}{1+p}\right)^{1/p} \bar{v}_a \quad (25)$$

$$v_a > \left(\frac{1}{1+p}\right)^{1/p} \bar{v}_a \quad (26)$$

如果公式(25)成立, 将其代入式(21)可得 $\lambda_a^u = 0, v_a^u \geq 0$, 将式(25)代入式(23)可得

$$\alpha_a p \beta_m (\bar{v}_a)^p + \lambda_a^m = 0, m \in M \quad (27)$$

由于(27)中所有参数都是非负的, 我们有 $\lambda_a^m = 0, m \in M$ 和 $\bar{v}_a, \alpha_a, \beta_m$ 中至少有一个为0。如果 $\bar{v}_a = 0$, 则由式(25)可得 $v_a = 0$, 进而 $F(v_a) = 0$; 如果 $\alpha_a = 0$, 则可得出行成本为一个常数, 显然 $F(v_a) = 0$; 如果 $\beta_m = 0$, 由式(20)有

$$\begin{aligned} & \max_{v_a \geq 0} \{ \alpha_a (\bar{v}_a)^p - (v_a)^p \} v_a + \alpha_a p (\bar{v}_a)^p \sum_{m \in M} \beta_m (v_a^m - \bar{v}_a^m) \\ &= \alpha_a \left\{ \bar{v}_a^p - \left(\left(\frac{1}{1+p} \right)^{1/p} \bar{v}_a \right)^p \right\} \left(\left(\frac{1}{1+p} \right)^{1/p} \bar{v}_a \right) \\ &= \alpha_a \left(\frac{p}{1+p} \right) \left(\frac{1}{1+p} \right)^{1/p} \bar{v}_a^{p+1} \\ &\leq \left(\frac{p}{1+p} \right) \left(\frac{1}{1+p} \right)^{1/p} t_a (\bar{v}_a) \bar{v}_a \end{aligned} \quad (28)$$

式(28)中最后一个不等式成立的原因是对任意的 $a \in A, t_a(0) \geq 0$ 。

如果式(26)成立, 考虑式(21)和式(22)则有 $\lambda_a^u > 0, v_a^u = 0$, 故式(23)蕴含着如果 $\lambda_a^{m_1} < \lambda_a^{m_2}$ 则 $\beta_{m_1} > \beta_{m_2}$ 进而由式(24)可得 $v_a^{m_1} \geq v_a^{m_2} = 0$ 。不妨设 $\beta_{\bar{m}}, \beta_{\bar{m}}$ 分别为路段 a 上最大的利他系数和最小的利他系数。由 $v_a^u = 0$ 和

$v_a = v_a^u + \sum_{m \in M} v_a^m$, 可知(23)式中 $v_a = v_a^{\bar{m}} = \left(\frac{1+p\beta_{\bar{m}}}{1+p}\right)^{1/p} \bar{v}_a$ 。故

$$\begin{aligned} & \max_{v_a \geq 0} \left\{ \alpha_a [(v_a)^p - (v_a)^p] v_a + \alpha_a p (\bar{v}_a)^p \sum_{m \in M} \beta_m (v_a^m - \bar{v}_a^m) \right\} \\ &= \alpha_a (1 - \beta_{\bar{m}}) \left(\frac{p}{1+p} \right) \left(\frac{1+p\beta_{\bar{m}}}{1+p} \right)^{1/p} (\bar{v}_a)^{p+1} + \alpha_a p \beta_{\bar{m}} \left(\left(\frac{1+p\beta_{\bar{m}}}{1+p} \right)^{1/p} - \gamma_a \right) (\bar{v}_a)^{p+1} - \alpha_a p (\bar{v}_a)^p \sum_{m \in M, m \neq \bar{m}} \beta_{\bar{m}} \bar{v}_a^m \\ &\leq \alpha_a (1 - \beta_{\bar{m}}) \left(\frac{p}{1+p} \right) \left(\frac{1+p\beta_{\bar{m}}}{1+p} \right)^{1/p} (\bar{v}_a)^{p+1} + \alpha_a p \beta_{\bar{m}} \left[\left(\frac{1+p\beta_{\bar{m}}}{1+p} \right)^{1/p} - \gamma_a \right] (\bar{v}_a)^{p+1} - \alpha_a p \beta_{\bar{m}} (\bar{v}_a)^p \sum_{m \in M, m \neq \bar{m}} \bar{v}_a^k \\ &= \alpha_a (1 - \beta_{\bar{m}}) \left(\frac{p}{1+p} \right) \left(\frac{1+p\beta_{\bar{m}}}{1+p} \right)^{1/p} (\bar{v}_a)^{p+1} + \alpha_a p \beta_{\bar{m}} \left[\left(\frac{1+p\beta_{\bar{m}}}{1+p} \right)^{1/p} - \gamma_a \right] (\bar{v}_a)^{p+1} - \alpha_a p \beta_{\bar{m}} (1 - \gamma_a - \kappa_a) (\bar{v}_a)^{p+1} \\ &= \alpha_a \zeta_a (\bar{v}_a)^{p+1} \\ &\leq \zeta_a t_a (\bar{v}_a) \bar{v}_a \end{aligned} \quad (29)$$

这里 $\gamma_a = \frac{\bar{v}_a^{\bar{m}}}{v_a}, \kappa_a = \frac{\bar{v}_a^u}{v_a}, 0 \leq \gamma_a \leq 1, 0 \leq \kappa_a \leq 1, 0 \leq \kappa_a + \gamma_a \leq 1$, 并且

$$\zeta_a = 1 - \beta_{\bar{m}} \left(\frac{p}{1+p} \right) \left(\frac{1+p\beta_{\bar{m}}}{1+p} \right)^{1/p} + p \beta_{\bar{m}} \left[\left(\frac{1+p\beta_{\bar{m}}}{1+p} \right)^{1/p} - \gamma_a \right] - p \beta_{\bar{m}} (1 - \gamma_a - \kappa_a) \quad (30)$$

式(29)中最后一项不等式成立是因为对任意 $a \in A, t_a(0) \geq 0$ 。如果 $\bar{v}_a = 0$, 则有 $v_a = 0$ 和 $F(v_a) = 0$, 这种情况, 我

们定义 $\zeta_a=0$ 。

所以,优化问题(20)取得最优值时当且仅当式(28)或式(29)成立,令

$$\zeta_a=\max\left\{\left(\frac{p}{1+p}\right)\left(\frac{1}{1+p}\right)^{1/p},\zeta_a\right\},\xi=\max\zeta_a \quad (31)$$

那么式(20)可被改写为

$$S(\hat{v},\hat{q})\leq S(\bar{v},\bar{q})+\xi S(\hat{v},\hat{q}) \quad (32)$$

根据以上所有分析,我们可以得到以下定理:

定理 2 在假定 1 的条件下, $(\bar{v},\bar{q}) \in \Omega$ 是变分不等式问题(10)的最优解, $(\hat{v},\hat{q}) \in \Omega$ 是优化问题(12)的最优解。则弹性需求下自私-利他用户混合均衡交通分配的效率损失满足 $\rho \leq \frac{1}{1-\xi}$, 这里的 ξ 由式(30)和式(31)可得。

如果交通网络上所有的用户均是自私用户,那么,优化问题(20)达到最优时仅有式(28)成立,则此种情形下的效率损失为 $\rho \leq \left[1 - \left(\frac{p}{1+p}\right)\left(\frac{1}{1+p}\right)^{1/p}\right]^{-1}$, 这就是文献[10]中的结论。当交通网络中只有利他用户,那么,优化问题(20)达到最优时仅有式(29)成立,此时有对任意的路段 $a \in A$, 有 $\kappa_a=0$, 故只有利他用户的交通均衡分配的效率损失为 $\rho \leq \frac{1}{1-\psi}$, 这里 $\psi=\max\zeta_a$, 并且

$$\zeta_a=(1-\beta_m)\left(\frac{p}{1+p}\right)\left(\frac{1+p\beta_m}{1+p}\right)+p\beta_m\left[\left(\frac{1+p\beta_m}{1+p}\right)-\gamma_a\right]-p\beta_m(1-\gamma_a)$$

如果对任意的 $m \in M$, 都有 $\beta_m=1$, 则 $\gamma_a=1, \zeta_a=0$, 进而有 $\psi=0$ 且 $\rho=1$ 。即在完全利他情形下的交通网络不存在着效率损失。

3 结论

运用非线性规划方法对一类弹性需求混合均衡交通分配的效率损失进行界定。首先我们构建了该类混合交通分配的等价变分不等式模型,然后界定了多项式出行成本函数时的效率损失上界。研究表明:效率损失上界值取决于利他用户的最大、最小利他系数,多项式路段出行成本函数的最高次。但是,本文得到的效率损失上界不一定是紧的上界。如何探讨收费、诱导系统对该类混合交通均衡分配效率损失的影响以及对模型进行实证检验是我们下一步研究的方向。

参考文献:

- [1] 骆伟,吴克晴. 基于改进的阻抗函数下的混合交通均衡模型[J]. 华东交通大学学报,2013,30(4):46-53.
- [2] 刘天亮,欧阳恋群,黄海军. ATIS 作用下的混合交通行为网络效率损失上界[J]. 系统工程理论与实践,27(4):154-159.
- [3] HAN D R, LO H K, YANG H. On the price of anarchy for non-atomic congestion games under asymmetric cost maps and elastic demands[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 56(10): 2737-2743.
- [4] 余孝军,黄海军,刘天亮. 固定需求网络中多用户类随机均衡的效率损失[J]. 交通运输系统工程与信息,2009,9(4):83-89.
- [5] 余孝军,张文专. 自私-利他用户混合均衡交通分配的效益损失[J]. 交通运输系统工程与信息,2014,14(1):60-63
- [6] 曾明华,肖瑜,黄细燕. 多层次交通网络的 UE 与 SO 混合均衡与效率损失[J]. 华东交通大学学报,2012,29(2):57-62
- [7] CHAU C K, SIM K M. The price of anarchy for non-atomic congestion games with symmetric cost maps and elastic demands[J]. Operations Research Letter, 2003, 31(5): 327-334.

- [8] YU X J, WANG L L. On efficiency loss of multiclass traffic equilibrium assignment with elastic demand[J]. Procedia-Social and Behavioral Sciences, 2014, 138: 368-377.
- [9] NAGURNEY A, DONG J. A multiclass, multicriteria traffic network equilibrium model with elastic demand[J]. Transportation Research Part B, 2002, 36(5): 445-469.
- [10] ROUGHGARDEN T, TARDOS E. How bad is selfish routing[J]. Journal of the ACM, 2002, 49(2): 236-259.

On Efficiency Loss of a Mixed Equilibrium under Elastic Demand

Yu Xiaojun, Li Jia

(School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China)

Abstract: The mixed equilibrium traffic assignment is caused by the route choice principle of different users in transportation network. Selfish users always choose paths with minimum actual travel cost while altruistic users choose paths with minimum perceived travel cost which is a linear combination of the actual and marginal travel costs. Firstly, a variational inequality model to depict the mixed traffic assignment with selfish and altruistic users under elastic demand was developed. Secondly, the upper bound of this mixed equilibrium traffic assignment with polynomial cost function was derived by the nonlinear programming method and the relation between the upper bound and the network parameters was obtained. The results showed that the upper bound of efficiency loss is independent with network topology but relates to the degree of the link travel cost functions and the maximum and minimum altruism coefficient.

Key words: selfish user; altruistic user; elastic demand; variational inequality; efficiency loss

(责任编辑 姜红贵)