

文章编号:1005-0523(2017)03-0137-06

Campanato 函数与 θ 型积分算子的交换子有界性

张能球, 叶晓峰, 陈兰兰

(华东交通大学理学院, 江西 南昌 330013)

摘要:研究了交换子 $[b, T]$ 在加权 Morrey 空间上的有界性。采用 Sharp 极大函数估计方法得到交换子 $[b, T]$ 在加权 Morrey 空间 $L^{p,k}(\omega)$ 上的有界性,其中 T 是一个 θ 型奇异积分算子,函数 b 属于加权 Campanato 空间。

关键词: θ 型 $C-Z$ 算子; 加权空间; 交换子; Campanato 函数

中图分类号: O174.2

文献标志码: A

DOI:10.16749/j.cnki.jecjtu.2017.03.021

1 引言和记号

1985 年, Yabuta^[1]引入了如下的 θ 型 $C-Z$ 奇异积分算子:

定义 1.1 设 θ 是 $(0, \infty)$ 上的非负减函数, 称定义在 $R^n \times R^n \setminus \{(x, x): x \in R^n\}$ 上的可测函数 $K(x, y)$ 是 θ 型核, 如果

i) 当 $x \neq y$ 时, $|K(x, y)| \leq C|x-y|^{-n}$, 其中 C 为常数 (且本文将用 C 表示与主要参数无关的正常数, 它在不同的位置可能是不同的)。

ii) 当 $2|x-z| \leq |x-y|$ 时,

$$|K(x, y) - K(z, y)| + |K(y, x) - K(y, z)| \leq C|x-y|^{-n} \theta\left(\frac{|x-z|}{|x-y|}\right)$$

称线性算子 $T: \Psi(R^n) \rightarrow \Psi'(R^n)$ 是 θ 型 $C-Z$ 奇异积分算子, 如果

iii) T 能扩充成从 $L^2(R^n)$ 到其自身的有界线性算子。

iv) 存在一个 θ 型核, 使得对所有的 $f \in C_c^\infty(R^n)$,

$$Tf(x) = \int_{R^n} K(x, y)f(y)dy, \forall x \in R^n \setminus \text{Sup}(f) \text{ 成立。}$$

其中 $\Psi(R^n)$ 是施瓦茨函数, $\text{Sup}(f) = \{x \in D | f(x) \neq 0\}$, $C_c^\infty(R^n)$ 为 R^n 上具有紧支集的无穷次可微函数空间。

2012 年, 王华^[2]研究了关于 $C-Z$ 算子在加权 Morrey 空间上的一些交换子估计。2013 年, 叶晓峰等^[3]研究了 θ 型奇异积分算子在加权 Morrey 空间中的有界性。2015 年叶晓峰等^[4]对几类交换子在加权 Morrey 空间上的端点情形进行了探讨。

定义 1.2^[5] 设 $1 \leq p < \infty, 0 < k < 1, \omega$ 是权函数, 则加权 Morrey 空间定义为

$$L^{p,k}(\omega) = L^{p,k}(u, v) = \{f \in L_{\text{loc}}^p(u): \|f\|_{L^{p,k}(\omega)} < \infty\}$$

收稿日期: 2016-12-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11661035)

作者简介: 张能球 (1982—), 男, 硕士研究生, 研究方向为调和分析及其在偏微分方程的应用。

通讯作者: 叶晓峰 (1980—), 男, 副教授, 博士, 研究方向为调和分析及其在偏微分方程的应用。

其中, $\|f\|_{L^{p,k}(\omega)} = \sup_Q \left(\frac{1}{\omega(Q)^k} \int_Q |f(x)|^p \omega(x) dx \right)^{1/p}$, $L_{loc}^p(\omega)$ 表示在 Lebesgue 测度下的 p 次加权空间且局部有界, $\sup_Q$ 表示上确界, 记 Q 的 Lebesgue 测度为 $|Q|$ 以及 Q 的加权为 $\omega(Q)$, 对于给定的权函数 ω , $\omega(Q) = \int_Q \omega(x) dx$. $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy$.

定义 1.3^[5] 设 $1 \leq p < \infty$, $0 < k < 1$, 则对于两个权 u 和 v , 定义双权 Morrey 空间为

$$L^{p,k}(u,v) = \{f \in L_{loc}^p(u) : \|f\|_{L^{p,k}(u,v)} < \infty\}$$

其中, $\|f\|_{L^{p,k}(u,v)} = \sup_Q \left(\frac{1}{v(Q)^k} \int_Q |f|^p u(x) dx \right)^{1/p}$.

定义 1.4^[6] 若 $\omega(x)$ 是 R^n 的非负局部可积函数, $1 \leq p < \infty$, $-\frac{n}{p} \leq \alpha \leq 1$, 则

$$\mathcal{E}_\omega^{\alpha,p} = \{f \in L_{loc}(R^n) : \|f\|_{\alpha,p,\omega} < \infty\}$$

为加权 Campanato 空间, 其中 $\|f\|_{\alpha,p,\omega} = \sup_Q \left\{ \omega(Q)^{-(1+\alpha p/n)} \int_Q |f - f_Q|^p \omega(x)^{1-p} dx \right\}^{1/p}$ 为 f 的加权 Campanato 范数, Q 为平行于坐标轴的方体。显然, 当 $\alpha=0$ 时, 加权 Campanato 空间为加权 BMO(R^n) 空间; 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 加权 Campanato 空间为 $Lip_\alpha^p(\omega)$ 空间^[2]。

最近, 束立生等^[7]研究了 θ 型 $C-Z$ 奇异积分算子及其交换子在加权 Morrey 空间的有界性, 其定理 A 是: 设 T 是 θ 型 $C-Z$ 奇异积分算子, 且 $\int_0^1 \theta(t) t^{-1} dt < \infty$, $1 < p < \infty$, $0 < k < 1$ 以及 $\omega \in A_1$, 假如 $b \in BMO(\omega)$, 那么交换子 $[b, T]$ 是从 $L^{p,k}(\omega)$ 到 $L^{p,k}(\omega^{1-p}, \omega)$ 有界的。本文在此基础上进一步推广到 $b \in \mathcal{E}_\omega^{\alpha,p}$, 结论如下:

定理 1.1 设 T 是 θ 型 $C-Z$ 奇异积分算子, $1 < p < \frac{n}{|\alpha|}$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ 和 $0 < k < \frac{p}{s} \int_0^1 \frac{\theta(t)}{t} dt < \infty$, 以及 $\omega^{s/p} \in A_1$, 假如 $b \in \mathcal{E}_\omega^{\alpha,p}$, 且 $r_\omega > \frac{1-k}{p/s-k}$, 那么交换子 $[b, T]$ 是从 $L^{p,k}(\omega)$ 到 $L^{s,ks/p}(\omega^{1-s}, \omega)$ 有界的。其中 r_ω 表示 ω 关于逆 Hölder 条件下的临界指标。

2 定义和引理

定义 2.1 设 T 是一个 $C-Z$ 算子, b 是 R^n 上局部可积函数, b 和 T 所生成的交换子定义如下: $[b, T]f(x) = b(x)Tf(x) - T(bf)(x)$ 。

定义 2.2^[2,8] 设 f 是一个局部可积函数, Hardy-Littlewood 极大算子 M , Sharp 极大函数 $M^\#$ 和分数次极大算子 $M_{\beta,r}$ 定义如下:

$$M(f)(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy$$

$$M^\#(f)(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy, M_{\alpha,r}(f)(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha r}{n}}} \int_Q |f(y)|^r dy^{1/r}$$

设 ω 是一个权函数, 其对应的加权极大算子定义如下:

$$M_\omega(f)(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{\omega(Q)} \int_Q |f(y)| \omega(y) dy, \text{ 特别的 } M_{r,\omega}(f) = M_\omega(|f|^r)^{1/r}. M_{\alpha,r,\omega}(f)(x) = \sup_{x \in Q} \left(\frac{1}{\omega(Q)^{1-\frac{\alpha r}{n}}} \int_Q$$

$|f(y)|^r \omega(y) dy \right)^{1/r}$, 其中, $1 < \alpha < n, r \geq 1$ 。

定义 2.3^[9] 权函数 ω 属于 A_p 权, $1 \leq p < \infty$, 如果对于每一个在 R^n 中的球体 Q , 存在一个与球体 Q 选取无关的正常数 $C > 0$, 使得 $\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} \leq C$ 成立。当 $p=1$ 时, 称 $\omega \in A_1$ 如果

$\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \leq C \cdot \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^{\frac{r-1}{r}}(x)$ 。其中 $\operatorname{ess\,inf}_{x \in Q} \omega(x)$ 表示权函数 $\omega(x)$ 的本性下确界。

定义 2.4^[9] 一个权函数 ω 属于反 Hölder 类 RH , 如果存在两个常数 $r > 1$ 和 $C > 0$ 使得下面的反 Hölder 不等式,

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right)$$

对于每一个 R^n 中的方体 Q 来说都成立。

引理 2.1^[3] i) 设 $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p$, θ 是连续模, 并且 T 是 θ 型 $C-Z$ 奇异积分算子, 则 T 是 $L^{p,k}(\omega) \rightarrow L^{p,k}(\omega)$ 有界的。

ii) 设 T 是次线性算子, 存在 $p_0: 1 < p_0 < \infty$, 使得对于任意的 $\omega \in A_p$, 若 $\|Tf\|_{L^{p_0}(\omega_0)} \leq C \|f\|_{L^{p_0}(\omega_0)}$, 则对任意的 $p: 1 < p < \infty$, 及 $\omega \in A_p$, $\|Tf\|_{L^p(\omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\omega)}$ 。

引理 2.2^[10] 假设 $\omega \in A_p, p \geq 1$, 那么对任意的球体 Q , 存在一个绝对常数 $C > 0$, 使得 $\omega(2Q) \leq C\omega(Q)$ 成立。一般地, 对任意的 $\lambda > 1$, 有 $\omega(\lambda Q) \leq C\lambda^\alpha \omega(Q)$, 其中常数 C 既不依赖于 Q , 也不依赖于 λ 。

引理 2.3^[11] 假设 $\omega \in A_p \cap RH_r, p \geq 1, r \geq 1$, 那么存在两个常数 $C_1 > 0, C_2 > 0$, 使得 $C_1 \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^p \leq \frac{\omega(E)}{\omega(Q)} \leq C_2 \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^{\frac{r-1}{r}}$, 对于球体 Q 中的任意可测子集 E 来说都成立。

引理 2.4^[12] 设 $\omega \in A_p, f(x) \in \mathcal{E}_\omega^{\alpha p}$, 则对任意的 $p > 1$, 有 $\mathcal{E}_\omega^{\alpha p} = \mathcal{E}_\omega^{\alpha 1}$, 且有 $C_1 \|f\|_{\alpha, 1, \omega} \leq \|f\|_{\alpha, p, \omega} \leq C_2 \|f\|_{\alpha, 1, \omega}$ 。

引理 2.5^[2] 若 $1 < p < \infty, 0 < k < 1, \omega \in A_\infty, r \geq 1$, 那么 $M_{r, \omega}$ 在 $L^{p,k}(\omega)$ 上有界。

引理 2.6^[5] 若 $1 < p < \infty, 0 < k < 1, \omega \in A_p$, 那么 M 在 $L^{p,k}(\omega)$ 上有界。

引理 2.7^[13] 设 $0 < \delta < 1, 1 < p < \infty, 0 < k < 1$, 如果 $u, v \in A_\infty$, 那么我们有

$$\|M_\delta(f)\|_{L^{p,k}(u,v)} \leq C \|M_\delta^\#(f)\|_{L^{p,k}(u,v)}$$

特别的, 当 $u=v=\omega$ 时, 我们有

$$\|M_\delta(f)\|_{L^{p,k}(u,v)} \leq C \|M_\delta^\#(f)\|_{L^{p,k}(u,v)}$$

对于所有使得左边式子为有限值的函数 f 来说都成立, 其中

$$M_\delta(f) = (M|f|^\delta)^{1/\delta}, M_\delta^\#(f) = M^\#(|f|^\delta)^{1/\delta}$$

引理 2.8^[2] 设 $0 < |\alpha| < n, 1 < p < \frac{n}{|\alpha|}, 1/s = 1/p - \alpha/n, 0 < k < p/s$, 如果 $\omega \in A_\infty$, 那么对任意的 $1 < r < p$, 我们有

$$\|M_{\alpha, r, \omega}(f)\|_{L^{r, k\phi}(\omega)} \leq C \|f\|_{L^{p,k}(\omega)}$$

引理 2.9^[2] 设 $1 < p < \frac{n}{|\alpha|}, 0 \leq |\alpha| < n, 1/s = 1/p - \alpha/n, \omega^{\phi} \in A_1$, 若 $0 < k < p/s$, 且 $r_\omega > \frac{1-k}{p/s-1}$, 有

$$\|M_{\alpha, 1}(f)\|_{L^{r, k\phi}(\omega^\phi, \omega)} \leq C \|f\|_{L^{p,k}(\omega)}$$

3 定理 1.1 的证明

首先证明一个引理, 这在定理 1.1 的证明中将会用到。

引理 3.1 设 $0 < \delta < 1, \omega \in A_1, b \in \mathcal{E}_\omega^{\alpha p}$, 那么对所有的 $r > 1$ 和所有的 $x \in R^n$ 。有

$$M_\delta^\#([b, T]f)(x) \leq C \|b\|_{\alpha, 1, \omega} (\omega(x) M_{\alpha, r, \omega}(Tf)(x) + \omega(x) M_{\alpha, r, \omega}(f)(x) + \omega(x)^{1+\alpha/n} M_{\alpha, 1}(f)(x))$$

证明 对于任意给定的 $x \in R^n$, 固定一个包含点 x 的球体 $B = B(x_0, r_B)$, 其中 $B(x_0, r_B)$ 表示中心为点 x_0 , 半径为 r_B 的球体。将 f 分解成 $f = f_1 + f_2$, 这里 $f_1 = f \chi_{2B}, \chi_{2B}$ 表示为 $2B$ 的特征函数。注意到 $[b, T]f(x) = (b(x) - b_{2B})Tf(x) - T((b - b_{2B})f)(x)$ 。

由条件知 $0 < \delta < 1$, 则对任意的常数 C , 我们有

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{|B|} \int_B | [b, T]f(y) |^{|\delta - c|} dy \right)^{1/\delta} \leq \left(\frac{1}{|B|} \int_B | [b, T]f(y) - c |^{|\delta|} dy \right)^{1/\delta} \leq \\ & C \left(\frac{1}{|B|} \int_B | (b(y) - b_{2B}) Tf(y) |^{|\delta|} dy \right)^{1/\delta} + C \left(\frac{1}{|B|} \int_B | T((b - b_{2B})f_1)(y) |^{|\delta|} dy \right)^{1/\delta} + \\ & C \left(\frac{1}{|B|} \int_B | T((b - b_{2B})f_2)(y) + c |^{|\delta|} dy \right)^{1/\delta} := + + \end{aligned}$$

我们将分别估计每一项。由已知条件 $\omega \in A_1$, 则从 Hölder 不等式和引理 2.4 可得

$$\begin{aligned} & \leq C \cdot \frac{1}{|B|} \int_B | (b(y) - b_{2B}) Tf(y) | dy \leq \\ & C \cdot \frac{1}{|B|} \left(\int_B |b(y) - b_{2B}|^{r'} \omega^{1-r'} dy \right)^{1/r'} \left(\int_B |Tf(y)|^r \omega(y) dy \right)^{1/r} \leq \\ & C \cdot \|b\|_{\alpha, r', \omega} \frac{\omega(x)}{|B|} \left(\frac{1}{\omega(Q)^{1-\alpha/n}} \int_B |Tf(y)|^r \omega(y) dy \right)^{1/r} \leq \\ & C \cdot \|b\|_{\alpha, r', \omega} \omega(x) M_{\alpha, r, \omega}(Tf)(x) \leq \\ & C \|b\|_{\alpha, 1, \omega} \omega(x) M_{\alpha, r, \omega}(Tf)(x) \end{aligned}$$

使用 Kolmogorov 不等式, Hölder 不等式, 引理 2.2 和引理 2.4, 我们有

$$\begin{aligned} & \leq C \cdot \frac{1}{|B|} \int_{2B} | (b(y) - b_{2B}) f_2(y) | dy \leq \\ & C \cdot \frac{1}{|B|} \left(\int_{2B} |b(y) - b_{2B}|^{r'} \omega^{1-r'} dy \right)^{1/r'} \left(\int_{2B} |f_2(y)|^r \omega(y) dy \right)^{1/r} \leq \\ & C \cdot \|b\|_{\alpha, r', \omega} \frac{\omega(2B)}{|B|} \left(\frac{1}{\omega(2B)^{1-\alpha/n}} \int_{2B} |f_2(y)|^r \omega(y) dy \right)^{1/r} \leq \\ & C \cdot \|b\|_{\alpha, 1, \omega} \frac{\omega(2B)}{|B|} M_{\alpha, r, \omega}(f)(x) \leq \\ & C \|b\|_{\alpha, 1, \omega} \omega(x) M_{\alpha, r, \omega}(f)(x) \end{aligned}$$

估计最后一项, 令 $c = -T((b - b_{2B})f_2)(x_0)$, 当 $y \in B, z \in (2B)^c$ 有 $2|y - x_0| \leq |y - z|$, 于是得到

$$\begin{aligned} & \leq C \cdot \frac{1}{|B|} \int_{2B} | T((b - b_{2B})f_2)(y) - T((b - b_{2B})f_2)(x_0) | dy \leq \\ & C \cdot \frac{1}{|B|} \left(\int_B \int_{(2B)^c} |K(y, z) - K(x_0, z)| |b(z) - b_{2B}| |f(z)| dz dy \right) \leq \\ & C \cdot \frac{1}{|B|} \int_B \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{k+1}B \setminus 2^k B} \frac{1}{|y - z|^n} \theta\left(\frac{|y - x_0|}{|y - z|}\right) \right) |b(z) - b_{2B}| |f(z)| dz dy \leq \\ & C \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{k+1}B} \frac{\theta(2^{-k})}{|2^{k+1}B|} |b(z) - b_{2B}| |f(z)| dz \leq \\ & C \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{k+1}B} \frac{\theta(2^{-k})}{|2^{k+1}B|} |b(z) - b_{2^{k+1}B}| |f(z)| dz + C \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{k+1}B} \frac{\theta(2^{-k})}{|2^{k+1}B|} |b(z) - b_{2B}| |f(z)| dz \\ & \quad := IV + V \end{aligned}$$

要估计上不等式, 先看下面 3 个不等式:

$$C \sum_{k=1}^{\infty} \theta(2^{-k}) \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{k+1}B} \frac{\theta(2^{-k})}{2^{1-k}} dt \leq C \int_0^1 \frac{\theta(t)}{t} dt < \infty \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{1/2(1-1/2^n)}{1-1/2} - n/2^{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{n}{2^n} - \frac{2}{2^n} \right) \leq C \quad (2)$$

注意到 $\omega \in A$, 根据引理 2.4, 通过简单计算可得

$$|b_{2^{-k}B} - b_{2^{k+1}B}| \leq C \|b\|_{\alpha,1,\omega} \cdot k \cdot \omega(x) \cdot \omega(2^{k+1}B)^{a/n} \quad (3)$$

利用不等式(1), 同式的估计, 我们可以得到

$$\begin{aligned} &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \theta(2^{-k}) \|b\|_{\alpha,1,\omega} \omega(x) M_{\alpha,r,\omega}(f)(x) \leq \\ &C \int_0^1 \frac{\theta(t)}{t} dt \|b\|_{\alpha,1,\omega} \omega(x) M_{\alpha,r,\omega}(f)(x) \leq \\ &C \|b\|_{\alpha,1,\omega} \omega(x) M_{\alpha,r,\omega}(f)(x) \end{aligned}$$

利用不等式(2)和(3), 我们可以得到

$$\begin{aligned} &\leq C \|b\|_{\alpha,1,\omega} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} \theta(2^{-k}) \frac{\omega(x) \omega(2^{k+1}B)^{a/n}}{|2^{k+1}B|} \int_{2^{k+1}B} |f(z)| dz \leq \\ &C \|b\|_{\alpha,1,\omega} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} \cdot \omega(x)^{1+a/n} \frac{1}{|2^{k+1}B|^{1-a/n}} \int_{2^{k+1}B} |f(z)| dz \leq \\ &C \|b\|_{\alpha,1,\omega} \cdot \omega(x)^{1+a/n} M_{\alpha,1}(f)(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} \leq \\ &C \|b\|_{\alpha,1,\omega} \omega(x)^{1+a/n} M_{\alpha,1}(f)(x) \end{aligned}$$

将以上的估计相结合, 然后再关于所有的球体 $B \subseteq R^n$ 取上确界, 证毕。

定理 1.1 的证明 对任意的 $1 < p < \infty$ 可以选取一个正数 r , 使得 $1 < r < p$ 利用引理 2.7 和引理 3.1, 有

$$\begin{aligned} &\| [b, T] f \|_{L^{s,ks/p}_{(\omega)^{1-s}}(\omega)} \leq C \| M_{\delta}^{\#}([b, T] f) \|_{L^{s,ks/p}_{(\omega)^{1-s}}(\omega)} \leq \\ &C \| b \|_{\alpha,1,\omega} \| (\omega(\cdot) M_{\alpha,r,\omega}(Tf)) \|_{L^{s,ks/p}_{(\omega)^{1-s}}(\omega)} + \\ &\| (\omega(\cdot) M_{\alpha,r,\omega}(f)) \|_{L^{s,ks/p}_{(\omega)^{1-s}}(\omega)} + \| (\omega(\cdot)^{1+a/n} M_{\alpha,1}(f)) \|_{L^{s,ks/p}_{(\omega)^{1-s}}(\omega)} \leq \\ &C \| b \|_{\alpha,1,\omega} \| M_{\alpha,r,\omega}(Tf) \|_{L^{s,ks/p}_{(\omega)}(\omega)} + \| M_{\alpha,r,\omega}(f) \|_{L^{s,ks/p}_{(\omega)}(\omega)} + \| M_{\alpha,1}(f) \|_{L^{s,ks/p}_{(\omega)^{s/p}}(\omega)} \end{aligned}$$

利用引理 2.6, 2.8, 2.9 和引理 2.1, 我们最后得到

$$\begin{aligned} &\| [b, T] f \|_{L^{s,ks/p}_{(\omega)^{1-s}}(\omega)} \leq C \| b \|_{\alpha,1,\omega} (\| Tf \|_{L^{p,k}_{(\omega)}} + \| f \|_{L^{p,k}_{(\omega)}}) \leq \\ &C \| b \|_{\alpha,1,\omega} \| f \|_{L^{p,k}_{(\omega)}} \end{aligned}$$

定理 1.1 证毕。

参考文献:

- [1] YABUTA K. Generalizations of Calderón-Zygmund operators[J]. Studia Mathematica, 1985, 82(1): 17-31.
- [2] 王华. 关于 Calderón-Zygmund 算子在加权 Morrey 空间上的一些交换子估计[J]. 中国科学: 数学(中文版), 2012, 42(1): 31-45.
- [3] 叶晓峰, 王腾飞, 胡媛媛, 等. θ 型奇异积分算子在加权 Morrey 空间中的有界性[J]. 华东交通大学学报, 2013, 30(1): 37-40.
- [4] 叶晓峰, 王蒙. 几类交换子在加权 Morrey 空间上的一点注记[J]. 数学的实践与认识, 2015(7): 261-266.
- [5] KOMORI Y, SHIRAI S. Weighted Morrey spaces and a singular integral operator[J]. Mathematische Nachrichten, 2009, 282(2): 219-231.
- [6] SI Z Y, JIANG Y S. Marcinkiewicz integrals on weighted Campanato spaces[J]. 浙江大学学报: 理学版, 2008, 35(6): 608-610.
- [7] 束立生, 张姗姗. θ 型 Calderón-Zygmund 算子及其交换子在加权 Morrey 空间的有界性 [J]. 厦门大学学报: 自然科学版, 2015, 54(1): 75-79
- [8] HARDY G H. Note on a theorem of Hilbert[J]. Mathematische Zeitschrift, 1920, 6(3): 314-317.
- [9] 周民强. 调和与分析讲义[M]. 北京: 北京大学出版社, 1999: 153-157.

- [10] GARCIA-CUERVA J, DE FRANCIA J L R. Weighted norm inequalities and related topics[M]. Elsevier; Academic Press Inc, 2011:169–172.
- [11] GUNDY R, WHEEDEN R. Weighted integral inequalities for the nontangential maximal function, Lusin area integral, and Walsh–Paley series[J]. *Studia Mathematica*, 1974, 49(2):107–124.
- [12] 王月山, 毋俊洲. 加权 Campanato 空间的一些性质[J]. *焦作大学学报*, 1995(1):35–37.
- [13] STEIN E M. Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. with the assistance of Timothy S. Murphy[J]. Princeton Mathematical Series, 1958, 43(2):120–126.

Boundedness of Commutators with Campanato Function and θ -type Operators

Zhang Nengqiu, Ye Xiaofeng, Chen Lanlan

(School of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013 China)

Abstract: The boundedness of the commutator $[b, T]$ was studied in the weighted Morrey space. When T are θ -type Calderón–Zygmund operators and b the weighted Campanato function, the commutator $[b, T]$ is bounded on the weighted Morrey spaces by way of the maximal function estimation.

Key words: θ -type Calderón–Zygmund operators; weighted spaces; commutators; Campanato functions

(责任编辑 刘棉玲)