

文章编号:1005-0523(2023)02-0103-09

分数阶 Schrödinger-Poisson 方程组解的存在性

钟巧澄, 王莉, 王军

(华东交通大学理学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 研究了一类分数阶 Schrödinger-Poisson 方程组非平凡解的存在性和多重性。在不同非线性项的假设条件下, 通过变分法和对称山路定理得到了解的存在性和多重性。

关键词: 分数阶 Laplacian 方程组; 多重性; 临界点

中图分类号: O176.3

文献标志码: A

本文引用格式: 钟巧澄, 王莉, 王军. 分数阶 Schrödinger-Poisson 方程组解的存在性[J]. 华东交通大学学报, 2023, 40(2): 103-111.

Existence of Solutions for Fractional Schrödinger-Poisson Equations

Zhong Qiaocheng, Wang Li, Wang Jun

(School of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: The existence of nontrivial solutions for fractional Schrödinger-Poisson equations in a bounded domain is discussed. Under different assumptions of nonlinearities, existence and multiplicity by variational methods and symmetric Mountain Pass theorem are obtained.

Key words: fractional Laplacian equation; multiplicity results; critical points

Citation format: ZHONG Q C, WANG L, WANG J. Existence and multiplicity of solutions for fractional schrödinger-poisson equations with perturbation[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2023, 40(2): 103-111.

考虑下列分数阶 Schrödinger-Poisson 方程组非平凡解的存在性和多重性。

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\Delta)^s u + V(x)u + \phi(x)u = \\ f(x, u) + \lambda g(x, u) + h(x), \quad x \in \Omega \\ (-\Delta)^t \phi(x) = u^2, \quad x \in \Omega \\ u = 0, \quad x \in R^3 \setminus \Omega \end{array} \right. \quad (1)$$

式中: $s, t \in (0, 1)$ 且 $2t + 4s > 3$; $\Omega \subset R^3$ 中一个有界域; 势函数 $V: \Omega \rightarrow R^+$ 是连续的; λ 是一个正的常数; f, g, h 是连续函数; $(-\Delta)^s$ 是分数阶 Laplacian 算子, 其定

义为

$$(-\Delta)^s \varphi(x) = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{R^3 \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x - y|^{3+2s}} dy, x \in \Omega$$

式中: 函数 $\varphi \in C_0^\infty(R^3)$; $B_\varepsilon(x)$ 表示以 $x \in \Omega$ 为中心, $\varepsilon > 0$ 为半径的球。值得指出的是当 $\tau \rightarrow 1^-$, 分数阶拉普拉斯算子 $(-\Delta)^\tau$ 变成了经典的拉普拉斯算子 $-\Delta$, 参考文献[1]中性质 4.4。从概率的观点来看, 分数阶拉普拉斯算子可以看作是 Lévy 过程的无穷小生成元^[2]。在应用科学中, 这个算子出现在对各种现象

的描述中,如离子物理^[3],火焰传播^[4],金融^[5],自由边界障碍问题^[6],Signorin 问题^[7],具有临界分数阶扩散 Hamilton–Jacobi 方程^[8],或伽马收敛框架中的相变^[9]。关于分数阶 Laplacian 算子的更多细节,建议读者参考文献[1]和文献[10]。

在过去十年,在势函数和非线性项满足不同的假设条件下,通过临界点理论,许多研究者对方程组(1)解的存在性和多重性感兴趣。例如,Zhang 等^[11]考虑了下列分数阶 Schrödinger–Poisson 方程组

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + \lambda \phi u = g(x), & x \in \mathbf{R}^3 \\ (-\Delta)^s \phi = u^2, & x \in \mathbf{R}^3 \end{cases}$$

式中: $\lambda > 0$ 且 g 满足次临界或者临界增长条件。通过扰动的方法,当 λ 足够小时,得到了解的存在性。Teng^[12]研究了下列分数阶 Schrödinger–Poisson 方程组

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + V(x)u + \phi u = \mu |u|^{q-1} + |u|^{2^*-2} u, & x \in \mathbf{R}^3 \\ (-\Delta)^s \phi = u^2, & x \in \mathbf{R}^3 \end{cases}$$

式中: $\mu > 0$ 是一个参数, $2_s^* = \frac{2N}{N-2S}$ 。通过使用 Pohožev–Nehari 流形,得到了非平凡基态解的存在性。通过对称山路定理,Zhi 等^[13]得到了分数阶 p -Laplacian 方程非平凡解的存在性。冯胜豪等^[14]讨论了下列非线性分数阶 Schrödinger–Poisson 方程组

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + u - \phi |u|^{2^*-3} u = f(u) + |u|^{2^*-2} u, & x \in \mathbf{R}^3 \\ (-\Delta)^s \phi = |u|^{2^*-1}, & x \in \mathbf{R}^3 \end{cases}$$

在 f 满足一定的条件下,通过山路定理和集中紧原理,作者们得到了非平凡解的存在性。我们推荐读者参考文献[15]和文献[16]以获得更多关于分数阶 Schrödinger–Poisson 方程的最新结果。

基于上述工作的启发,研究式(1)解存在性和多重性。据我们分析,非线性项在无穷远和原点附近的生长条件不同,存在性和多重性的结果是完全不同的。与 Zhi 等^[13]相比,本文利用较弱的条件得到了相似的结论。

1 准备工作和主要结果

在本节中,将概述式(1)的变分结构并给出其非局部项 ϕ_u 的性质。

分数阶 Sobolev 空间 $H^s(\mathbf{R}^3)$ 可用下列 Fourier 变换描述

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} (1 + |\xi|^{2s}) |\hat{u}|^2 d\xi < \infty \right\}$$

其内积和范数的定义为

$$(u, v) = \int_{\Omega} (1 + |\xi|^{2s}) \hat{u} \overline{\hat{v}} d\xi,$$

$$\|u\|_H^2 = \int_{\Omega} (1 + |\xi|^{2s}) |\hat{u}|^2 d\xi.$$

基于 Plancherel 定理,有

$$(u, v) = \int_{\Omega} ((-\Delta)^{\frac{s}{2}} u (-\Delta)^{\frac{s}{2}} v + uv) dx,$$

$$\|u\|_H^2 = \int_{\Omega} (1 + (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u^2 + |u|^2) dx.$$

次分数阶 Sobolev 空间

$$D^s(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} (1 + |\xi|^{2s}) |\hat{u}|^2 d\xi < \infty \right\}$$

为范数 $|u|_s^2$ 在 $C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ 的完备空间,其中

$$|u|_s^2 = \int_{\Omega} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{3+2s}} dx dy.$$

根据文献[1]中定理 6.5,当 $2 \leq p < 2_s^*$, $H^s(\Omega)$ 可以连续嵌入到 $L^p(\Omega)$,且对于任意的 $s \in (0, 1)$,存在一个最佳常数 $S_s > 0$ 使得

$$S_s = \inf_{u \in D^s(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx}{\left(\int_{\Omega} |u|^{2_s^*} dx \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2)$$

定义

$$E = \{u \in H^s(\Omega) : \int_{\Omega} V(x) |u|^2 dx < \infty\},$$

其内积和范数分别为

$$(u, v)_E = \int_{\Omega} ((-\Delta)^{\frac{s}{2}} u (-\Delta)^{\frac{s}{2}} v + V(x) uv) dx,$$

$$\|u\|_E = \left(\int_{\Omega} (1 + (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u^2 + V(x) |u|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

众所周知,问题(1)可以化简为带有非局部项的单一方程。因为 $s, t \in (0, 1)$ 且 $2t + 4s > 3$,那么有 $\frac{12}{3+2t} < \frac{6}{3-2s}$ 成立, $H^s(\Omega)$ 可以紧嵌入到 $L^{\frac{12}{3+2t}}(\Omega)$ 。

对于 $\forall u \in H^s(\Omega)$,在 $D^t(\Omega)$ 中定义线性泛函 L_u 为

$$L_u(v) = \int_{\Omega} u^2 v dx, \quad \forall v \in D^t(\Omega).$$

然后,从 Hölder 不等式和式(2)中得到,存在 $C_1, C_2 > 0$ 使得

$$|L_u(v)| \leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{\frac{6}{3+2t}} dx \right)^{\frac{3+2t}{6}} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^{\frac{6}{3-2t}} dx \right)^{\frac{3-2t}{6}}$$

$$\leq C_1 S_t^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{H^t}^2 [v] = C_2 \|u\|_{H^t}^2 [v] \quad (4)$$

所以,根据 Lax-Milgram 定理,对于每一个 $u \in H^t(\Omega)$, 都存在唯一一个 $\phi'_u \in D^t(\Omega)$ 使得

$$\int_{\Omega} u^2 v dx = \int_{\Omega} (-\Delta)^{\frac{t}{2}} \phi'_u (-\Delta)^{\frac{t}{2}} v dx \quad (5)$$

即对于任意的 $v \in D^t(\Omega)$, ϕ'_u 是

$$(-\Delta)^t \phi'_u = u^2, \quad x \in \Omega$$

的弱解,且

$$\phi'_u = c_t \int_{\Omega} \frac{u^2(y)}{|x-y|^{3-2t}} dy = c_t \frac{1}{|x|^{3-2t}} u^2, \quad \forall x \in \Omega \quad (6)$$

此式被称为 t-Riesz 势,其中

$$c_t = \pi^{-\frac{3}{2}} 2^{-2t} \frac{\Gamma(3-2t)}{\Gamma(t)},$$

同时,由式(4)、式(5)和 Sobolev 不等式知,存在 $C_3, C_4, C_5 > 0$. 使得

$$[\phi'_u]_t \leq C_3 \|u\|_{H^t(\Omega)}^2, \|\phi'_u\|_{L^s(\Omega)} \leq C_4 [\phi'_u]_t \quad (7)$$

和

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|^{3-2t}} u^2(x) u^2(y) dx dy = \int_{\Omega} \phi'_u u^2 dx \leq C_5 \|u\|_{H^t}^4 \quad (8)$$

把 ϕ'_u 代入问题 (1), 得到下列单一的分数量 Schrödinger 方程

$$(-\Delta)^s u + V(x)u + \phi'_u(x)u = f(x, u) + \lambda g(x, u) + h(x), \quad x \in \Omega \quad (9)$$

显然,式(9)的解可通过寻找能量泛函 $I: E \rightarrow \mathbf{R}$

$$I(u) = \frac{1}{2} (\|u\|_s^2 + \int_{\Omega} V(x)|u|^2 dx) + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \phi'_u(x)u^2 dx -$$

$$\int_{\Omega} F(x, u) dx - \lambda \int_{\Omega} G(x, u) dx - \int_{\Omega} h(x)u dx$$

的临界点得到,其中 $F(x, \xi) = \int_{\Omega}^{\xi} f(x, \tau) d\tau, G(x, \xi) =$

$$\int_{\Omega}^{\xi} g(x, \tau) d\tau.$$

另外,由式(7)和式(8)知 $I \in C^1$, 对于 $\forall v \in E$, 有

$$\langle I'(u), v \rangle = \int_{\Omega} [(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u (-\Delta)^{\frac{s}{2}} v + V(x)uv] dx + \int_{\Omega} \phi'_u uv dx -$$

$$\int_{\Omega} f(x, u)v dx - \lambda \int_{\Omega} g(x, u)v dx - \int_{\Omega} h(x)v dx.$$

如果 $u \in E$ 是 I 的临界点,则 (u, ϕ'_u) 为式(1)的弱解。

设势函数 $V \in C(\Omega)$ 为一个连续函数,假设 (V) 存在 $L > 0$ 使得 $\inf_{x \in \Omega} V(x) > L$ 且对于 $\forall V_0 \in \mathbf{R}$,

$$\text{meas}\{x \in \Omega : -\infty < V(x) \leq V_0\} < +\infty.$$

因为 $V(x)$ 满足条件 (V) , 所以有以下嵌入定理。

引理 1.1^[17] 设 $0 < s < 1$ 且 $s < N/2$, 满足 $V(x)$ 条件

(V) 。如果 $r_1 \in [1, 2_s^*]$, 那么 E 可以连续嵌入到 $D^s(\Omega)$, $D^s(\Omega)$ 可以连续嵌入到 $L^{r_1}(\Omega)$, 且对于 $\forall u \in E$ 有 $\|u\|_{L^{r_1}} \leq C \|u\|_E$, 其中 C 是一个常数。特别地,对于 $\forall r_1 \in [1, 2_s^*]$, 对于 $\forall u \in E$, 存在一个常数 C_{r_1} 使得

$$\|u\|_{L^{r_1}(\Omega)} \leq C_{r_1} \|u\|_E \quad (10)$$

如果 $r_1 \in [1, 2_s^*]$, 那么可以紧嵌入到 $L^{r_1}(\Omega)$ 。

定义算子 $\Phi: H^t(\Omega) \rightarrow D^t(\Omega)$ 为 $\Phi[u] = \phi'_u$ 。在下面的引理中,总结了一些对研究问题有用的 Φ 的性质,其证明与 Zhang 等^[11], Teng^[18]的一样。

引理 1.2 对任意的 $u \in H^t(\Omega)$, 我们有

- 1) Φ 是连续的;
- 2) Φ 将有界集合映射到有界集合;
- 3) $\int_{\Omega} \Phi u^2 dx \leq S_t^2 \|u\|_{L^{\frac{12}{3-2t}}}^4$;
- 4) 如果在 $H^t(\Omega)$ 内有 u_n 弱收敛到 u , 那么在 $D^t(\Omega)$ 内有 $\Phi[u_n]$ 弱收敛到 $\Phi[u]$;
- 5) 对任意的 $\zeta \in \mathbf{R}$ 都有 $\Phi[\zeta u] = \zeta^2 \Phi[u]$;
- 6) 如果在 $H^t(\Omega)$ 内有 u_n 弱收敛到 u 且对于 $\forall 2 \leq r_2 < 2_s^*$, 在 $L^{r_2}(\Omega)$ 内有 u_n 强收敛到 u , 那么 $\forall v \in E$ 有

$$\int_{\Omega} \phi'_u(x) u_n v dx \rightarrow \int_{\Omega} \phi'_u(x) u v dx \quad \text{且}$$

$$\int_{\Omega} \phi'_u(x) u_n^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} \phi'_u(x) u^2 dx.$$

本文用变分法对式(1)进行研究,包括山路定理, Bonanno 和 Kajikiya 的临界点理论。一般地,需要验证泛函的几何结构并证明泛函满足临界点理论的紧性条件。但本文由于临界非线性项的存在,能量泛函只在某些范围内可以满足紧性条件,本文应用不同形式的变分定理来证明解的存在性。假设非线性项 $f, g, h \in C(\Omega, \mathbf{R})$ 且满足下列假设:

(f₁)当几乎处处 $x \in \Omega$ 时, $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \frac{f(x, \tau)}{\tau} = 0$ 一致成立。

(\tilde{f}_1)当几乎处处 $x \in \Omega$ 时, $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \frac{f(x, \tau)}{\tau} = \infty$ 一致成立。

(f₂)当几乎处处 $x \in \Omega$ 时, $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \frac{f(x, \tau)}{\tau^{2_s^*-1}} = 0$ 一致成立。

(f₃)存在 $v \in (4, 2_s^*)$ 使得

$$0 < vF(\tau) \leq f(\tau)\tau, \forall |\tau| > 0.$$

(g₁) $|g(x, \tau)| \leq c(1+|\tau|^{r_3-1}), \forall \tau \in R, 1 \leq r_3 < 2.$

(g₂) $f(x, \cdot)$ 是奇的且 $g = |u|^{2_s^*-2}u$ 。

下面陈述本文的主要结果。

定理 1.1 设 $t \in (0, 1), 2t+4s > 3$, 若 (f₁), (f₂), (f₃), (g₁)成立, 那么存在 $\lambda^* > 0$ 且对任意的 $\lambda \in (0, \lambda^*)$, 存在 $e > 0$ 使得对任意的 $h_2^2 \in (0, e)$, 式(1)有一个山路解。

定理 1.2 设 $t \in (0, 1), s > \frac{3}{4}$, 若 (\tilde{f}_1), (f₂), (g₂)成立且 $h=0$, 那么存在 $\lambda^* > 0$ 且对任意的 $\lambda \in (0, \lambda^*)$, 式(1)有一列非平凡解 $\{u_n\}_{n \in N} \subset E$ 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $u_n \rightarrow 0$ 。

2 山路解的存在性

接下来, 我们证明泛函满足山路几何条件。

引理 2.1 若 (f₁), (f₂), (f₃), (g₁)成立, 那么泛函 I 满足山路几何结构

- 1) 存 $\alpha, \rho > 0$ 在使得 $I(u) \geq \alpha$ 且 $\|u\| = \rho$;
- 2) 存在 $e \in E$ 且 $\|e\| > \rho$ 使得 $I(e) < 0$ 。

证明 1) 根据 (f₁)和 (f₂), 对固定的 $\varepsilon > 0$, 存在 C_ε 使得

$$|F(\tau)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\tau|^2 + \frac{C_\varepsilon}{2_s^*}|\tau|^{2_s^*} \quad (11)$$

根据式(11)和 Cauchy 不等式, 得到

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_E^2 + \frac{1}{4} \int_\Omega \phi'_u u^2 dx - \int_\Omega F(x, u) dx - \\ &\quad \lambda \int_\Omega G(x, u) dx - \int_\Omega h(x) u dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|_E^2 - \int_\Omega F(x, u) dx - \lambda \int_\Omega G(x, u) dx - \int_\Omega h(x) u dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|_E^2 - \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon}{2}|u|^2 + \frac{C_\varepsilon}{2_s^*}|u|^{2_s^*} \right) dx - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lambda \int_\Omega (c|u| + \frac{c}{r_3}|u|^{r_3}) dx - \int_\Omega h(x) u dx \\ &\geq \frac{1}{4}\|u\|_E^2 - C_\delta \|u\|_E^{2_s^*} - \lambda C_7 \|u\|_E - \lambda C_8 \|u\|_E^{r_3} - C_\varepsilon' |h|_2^2 \\ &= \|u\|_E^2 \left(\frac{1}{4} - C_\delta \|u\|_E^{2_s^*-2} - \lambda C_7 \|u\|_E^{-1} - \lambda C_8 \|u\|_E^{r_3-2} \right) - C_\varepsilon' |h|_2^2, \end{aligned}$$

式中: C_6, C_7, C_8 是常数。考虑函数

$$\zeta(m) = \lambda C_8 m^{r_3-2} + \lambda C_7 m^{-1} + C_6 m^{2_s^*-2},$$

容易得到 $\lim_{m \rightarrow \infty} \zeta(m) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \zeta(m) = +\infty$ 。令 $\zeta'(m) = 0$, 则

$$\lambda(r_3-2)C_8 m^{r_3-3} - \lambda C_7 m^{-2} + C_6(2_s^*-2)m^{2_s^*-3} = 0.$$

令

$$\eta(m) = \lambda(r_3-2)C_8 m^{r_3-1} - \lambda C_7 + C_6(2_s^*-2)m^{2_s^*-1} \quad (12)$$

则 $\zeta'(m) = m^{-2}\eta(m)$ 。因为 $r_3 < 2 < 2_s^*$, 所以存在 m_0 使得当 $m \in (0, m_0)$ 时, 有 $\eta(m) < 0$ 且当 $m \in (m_0, +\infty)$ 时, 有 $\eta(m) > 0$ 。从而, $\zeta(m)$ 有一个唯一的最小值

$$\begin{aligned} \zeta(m_0) &= \lambda C_8 m_0^{r_3-2} - \lambda C_7 m_0^{-1} + C_6 m_0^{2_s^*-2} \\ &= \lambda C_8 m_0^{r_3-2} - \lambda C_9 m_0^{-1}, \end{aligned}$$

式中: C_9 是常数。存在 $\lambda^* > 0$ 使得对任意的 $\lambda \in (0, \lambda^*)$ 有 $\zeta(m_0) < \frac{1}{8}$ 。进一步,

$$\tilde{\eta}(m_1) = -\lambda C_7 + C_6(2_s^*-2)m_1^{2_s^*-1} = 0 \quad (13)$$

容易看到 $m_0 > m_1 = \left[\frac{\lambda C_7}{C_6(2_s^*-2)} \right]^{\frac{1}{2_s^*-1}}$, 存在一个常数 $e > 0$ 使得当 $|h|_2^2 < e$ 时, 有

$$m_0^2 \left[\frac{1}{4} - \zeta(m_0) \right] - C_\varepsilon' |h|_2^2 > 0,$$

式中: $e = \frac{\left[\frac{\lambda C_7}{C_6(2_s^*-2)} \right]^{\frac{2}{2_s^*-1}}}{8C_\varepsilon'}$, 对于 $0 < \lambda < \lambda^*$ 且 $|h|_2^2 < e$,

存在 $\alpha, \rho > 0$ 使得 $I(u) \geq \alpha$ 且 $\|u\| = \rho$ 。

2) 根据 (f₃), 存在常数 C_{10}, C_{11} 使得

$$F(\tau) \geq C_{10}\tau^r - C_{11}, \forall \tau > 0 \quad (14)$$

固定任意的 $u_0 > 0$, 得到

$$\begin{aligned} I(tu_0) &= \frac{t^2}{2}\|u_0\|_E^2 + \frac{1}{4} \int_\Omega \phi'_u(tu_0)^2 dx - \int_\Omega F(x, tu_0) dx - \\ &\quad \lambda \int_\Omega G(x, tu_0) dx - \int_\Omega h(x) tu_0 dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}\|u_0\|_E^2 + \frac{C_{12}t^4}{4}\|u_0\|_E^4 - C_{10}t^r \|u_0\|_E^r + C_{11}|\Omega| - \\ &\quad \lambda \int_\Omega G(x, tu_0) dx - \int_\Omega h(x) tu_0 dx, \end{aligned}$$

式中: C_{12} 是常数。由 $v \in (4, 2_s^*)$ 可得当 $t \rightarrow \infty$ 时, $I(tu_0) \rightarrow -\infty$ 。存 $e \in E$ 在且 $\|e\| > \rho$ 使得 $I(e) < 0$ 。

引理 2.2 若 $(f_1), (f_2), (f_3), (g_1)$ 成立, 那么泛函 I 满足 $(PS)_c$ 条件。

证明 设 $\{u_n\}$ 是 E 上的 $(PS)_c$ 序列, 即存在 $c > 0$ 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$I(u_n) \rightarrow c \text{ 且 } I'(u_n) \rightarrow 0 \tag{15}$$

从而有

$$\begin{aligned} c(1 + \|u_n\|_E) &\geq I(u_n) - \frac{1}{v} \langle I'(u_n), u_n \rangle \\ &= \frac{1}{2} \|u_n\|_E^2 + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \phi'_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx - \\ &\quad \lambda \int_{\Omega} G(x, u_n) dx - \int_{\Omega} h(x) u_n dx - \\ &\quad \frac{1}{v} (\|u_n\|_E^2 + \int_{\Omega} \phi'_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\Omega} f(x, u_n) dx - \\ &\quad \lambda \int_{\Omega} g(x, u_n) u_n dx - \int_{\Omega} h(x) u_n dx) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{v}\right) \|u_n\|_E^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{v}\right) \int_{\Omega} \phi'_{u_n} u_n^2 dx + \\ &\quad \int_{\Omega} \left(\frac{f(x, u_n) u_n}{v} - F(x, u_n)\right) dx + \\ &\quad \lambda \int_{\Omega} \left(\frac{g(x, u_n) u_n}{v} - G(x, u_n)\right) dx + \\ &\quad \left(\frac{1}{v} - 1\right) \int_{\Omega} h(x) u_n dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{v}\right) \|u_n\|_E^2 + \lambda \int_{\Omega} \left(\frac{g(x, u_n) u_n}{v} - G(x, u_n)\right) dx + \\ &\quad \left(\frac{1}{v} - 1\right) \int_{\Omega} h(x) u_n dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{v}\right) \|u_n\|_E^2 + C_{13} \left(\frac{1}{v} - 1\right) \|h\|_2 \|u_n\|_E - \\ &\quad C_{14} \|u_n\|_E - C_{15} \|u_n\|_E^{\tilde{\alpha}} \end{aligned}$$

式中: C_{13}, C_{14}, C_{15} 是常数。 $\{u_n\}$ 在 E 中有界。如果有必要的话, 取一个子列, 仍然用 $\{u_n\}$ 表示, 那么当 $n \rightarrow \infty$ 时, 存在 $u \in E$ 使得

在 E 上, u_n 弱收敛到 u ;

在 $L^r(\Omega) (2 \leq r \leq 2_s^*)$ 上, u_n 强收敛到 u ,

在 Ω 上, u_n 几乎处处收敛到 u 。

根据 $(f_1), (f_2), (g_1)$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\int_{\Omega} f(x, u_n)(u_n - u) dx \rightarrow 0,$$

$$\int_{\Omega} g(x, u_n)(u_n - u) dx \rightarrow 0.$$

由式(15)和弱收敛得

$$\langle I'(u_n) - I'(u), u_n - u \rangle = o(1).$$

由引理 1.2 第 6 条得

$$\int_{\Omega} \phi'_{u_n}(x) u_n (u_n - u) dx - \int_{\Omega} \phi'_u(x) u (u_n - u) \rightarrow 0.$$

有

$$\begin{aligned} &\langle I'(u_n) - \langle I'(u), u_n - u \rangle \\ &= \langle I'(u_n), u_n - u \rangle - \langle I'(u), u_n - u \rangle \\ &= \langle u_n, u_n - u \rangle_E + \int_{\Omega} \phi'_{u_n}(x) u_n (u_n - u) dx - \\ &\quad \lambda \int_{\Omega} g(x, u_n) (u_n - u) dx - \int_{\Omega} f(x, u_n) (u_n - u) dx - \\ &\quad \int_{\Omega} h(x) (u_n - u) dx - \langle u, u_n - u \rangle_E - \int_{\Omega} \phi'_u(x) u (u_n - u) dx + \\ &\quad \lambda \int_{\Omega} g(x, u) (u_n - u) dx + \int_{\Omega} f(x, u) (u_n - u) dx + \\ &\quad \int_{\Omega} h(x) (u_n - u) dx \\ &= \langle u_n - u, u_n - u \rangle_E = o(1). \end{aligned}$$

从而, 我们得到在 E 上, u_n 强收敛到 u 。

定理 1.1 的证明 根据引理 2.1, 引理 2.2 和山路定理^[9], 我们得到式(1)有一个山路解。

3 无穷多解的存在性

考虑式(1)是临界增长的情况, 即

$$\left. \begin{aligned} &(-\Delta)^s u + V(x)u + \phi(x)u = \\ &f(x, u) + \lambda |u|^{2^*-2} u, \quad x \in \Omega, \\ &(-\Delta)^s \phi(x) = u^2, \quad x \in \Omega, \\ &u = 0, \quad x \in R^3 \setminus \Omega, \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

由 (g_2) 可知, 式(16)的泛函是偶泛函, 可以通过对称山路定理得到无穷多解的存在性。因临界点的存在, 所以首先证明全局紧性结论。

引理 3.1 设 (f_2) 成立, 则对任意 $M > 0$ 存在 λ_* 使得对于 $\forall \lambda \in (0, \lambda_*)$, 泛函 I 在 $(-\infty, M]$ 满足 PS 条件。

证明 设 $\{u_n\}$ 是泛函 I 在 d 水平上的 PS 序列, 即存在 $d > 0$ 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$I(u_n) \rightarrow d \text{ 且 } I'(u_n) \rightarrow 0 \tag{17}$$

根据 (f_2) , 我们有

$$|f(x, u)u| \leq c(\varepsilon) + \varepsilon |u|^{2^*} \tag{18}$$

$$|F(x, u)| \leq c'(\varepsilon) + \varepsilon |u|^{2^*} \tag{19}$$

由式(17)可得

$$\begin{aligned}
d+\|u_n\|_E &\geq I(u_n)-\frac{1}{4}\langle I'(u_n), u_n \rangle \\
&= \frac{1}{2}\|u_n\|_E^2 + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \phi'_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx - \\
&\quad \frac{\lambda}{2_s} \int_{\Omega} |u_n|^{2_s^*} dx - \frac{1}{4} (\|u_n\|_E^2 + \int_{\Omega} \phi'_{u_n} u_n^2 dx - \\
&\quad \int_{\Omega} f u_n dx - \lambda \int_{\Omega} |u_n|^{2_s^*} dx) \\
&= \frac{1}{4}\|u_n\|_E^2 + \lambda \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2_s^*} \right) |u_n|_{2_s^*}^2 + \\
&\quad \int_{\Omega} \left(\frac{f u_n}{4} - F \right) dx \\
&\geq \frac{1}{4}\|u_n\|_E^2 + \left(\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{2_s^*} - \varepsilon \right) |u_n|_{2_s^*}^2 - c(\varepsilon) |\Omega| \\
&\geq \frac{1}{4}\|u_n\|_E^2 - c(\varepsilon) |\Omega|,
\end{aligned}$$

$\{u_n\}$ 在 E 中有界。

接下来证明泛函 I 满足 PS 条件, 由于 $\{u_n\}$ 在 E 中有界, 如果有必要的话, 取一个子列, 仍然用 $\{u_n\}$ 表示, 那么当 $n \rightarrow \infty$ 时, 存在 $n \in E$ 使得

在 E 上, u_n 弱收敛到 u ;

在 $L^2(\Omega)$ 上, u_n 强收敛到 u ;

在 Ω 上, u_n 几乎处处收敛到 u 。

利用 (f_2) , 有

$$\int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x, u) u dx + o(1) \quad (20)$$

$$\int_{\Omega} F(x, u_n) u_n dx \rightarrow \int_{\Omega} F(x, u) u dx + o(1) \quad (21)$$

值得注意的是序列 $\left[\frac{u_n(x) - u_n(y)}{|x-y|^{\frac{N+2s}{2}}} \right]$ 在中 $L^2(\Omega)$

有界, 由点态收敛 $u_n \rightarrow u$ 可知, 在 $L^2(\Omega)$ 上

$$\frac{u_n(x) - u_n(y)}{|x-y|^{\frac{N+2s}{2}}} \rightarrow \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{\frac{N+2s}{2}}} \quad (22)$$

根据式(20)~式(22)和引理 1.2, 得 $I'(u_n)=0$, 即, u 是式(16)的弱解且

$$\begin{aligned}
I(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|_E^2 + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \phi'_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx - \\
&\quad \frac{\lambda}{2_s} \int_{\Omega} |u_n|^{2_s^*} dx \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} f(x, u) u dx + \lambda \int_{\Omega} |u_n|^{2_s^*} dx \right) - \\
&\quad \int_{\Omega} F(x, u) dx - \frac{\lambda}{2_s} \int_{\Omega} |u_n|^{2_s^*} dx - \frac{1}{4} \int_{\Omega} \phi'_{u_n} u_n^2 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} u f - F \right) dx + \lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*} \right) \int_{\Omega} |u|^{2_s^*} dx - \\
&\quad \frac{1}{4} \int_{\Omega} \phi'_{u_n} u_n^2 dx \quad (23)
\end{aligned}$$

可以验证在上, u_n 强收敛到 u , 由 Brézis-Lieb 引理的分形式可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (|u_n|^{2_s^*} - |u_n - u|^{2_s^*}) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n|^{2_s^*} dx \quad (24)$$

$$\|u_n\|_E^2 = \|u_n - u\|_E^2 + \|u\|_E^2 + o(1) \quad (25)$$

根据式(17)、式(24)和式(25), 有

$$\begin{aligned}
\langle I'(u_n), u_n \rangle &= \|u_n\|_E^2 + \int_{\Omega} \phi'_{u_n}(x) u_n^2 dx - \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx - \\
&\quad \lambda \int_{\Omega} |u_n|^{2_s^*} dx \\
&= \|u_n - u\|_E^2 + \|u\|_E^2 + \int_{\Omega} \phi'_{u_n}(x) u_n^2 dx - \\
&\quad \int_{\Omega} f(x, u) u dx - \lambda \int_{\Omega} |u_n - u|^{2_s^*} dx - \\
&\quad \lambda \int_{\Omega} |u|^{2_s^*} dx + o(1) \\
&= o(1).
\end{aligned}$$

由于 $I'(u_n)=0$, 则

$$\|u_n - u\|_E^2 = [u_n - u]_s^2 + o(1) = \lambda \int_{\Omega} |u_n - u|^{2_s^*} dx + o(1) \quad (26)$$

不失一般性, 假设 $\|u_n - u\|_E^2 = A + o(1)$ 。

如果 $A=0$, 证毕。

如果 $A>0$, 我们将证明这是不可能的。事实上, 利用 S_s 的定义, 有

$$A \geq S_s \left(\frac{A}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2_s^*}} \quad (27)$$

则 $A \geq S_s^{\frac{3}{2_s^*}} \lambda^{\frac{2_s^*-3}{2_s^*}}$ 。结合式(17)~式(19)和式(23)~式(25), 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}
d &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\|u_n\|_E^2 + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \phi'_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx - \right. \\
&\quad \left. \frac{\lambda}{2_s} \int_{\Omega} |u_n|^{2_s^*} dx \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\|u_n - u\|_E^2 + \frac{1}{2}\|u\|_E^2 + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \phi'_{u_n} u_n^2 dx - \right. \\
&\quad \left. \int_{\Omega} F(x, u_n) dx - \frac{\lambda}{2_s} \int_{\Omega} |u_n - u|^{2_s^*} dx - \right. \\
&\quad \left. \frac{\lambda}{2_s} \int_{\Omega} |u|^{2_s^*} dx \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{A}{2} - \frac{A}{2_s^*} + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{4} uf - F \right) dx - \\ &\lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*} \right) \int_{\Omega} |u|^2 dx - \frac{1}{4} \int_{\Omega} \phi'_u u^2 dx \\ &\geq \frac{A}{2} - \frac{A}{2_s^*} + \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2_s^*} - \varepsilon \right) \|u\|_{2_s^*}^2 - c(\varepsilon) |\Omega| - \\ &C_{19} \|u\|_{2_s^*}^4. \end{aligned}$$

现在,我们定义 $\varepsilon_1 > 0$ 且

$$\min_{\lambda > 0} \left(\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2_s^*} - \varepsilon \right) \|u\|_{2_s^*}^2 - c(\varepsilon) |\Omega| - C_{19} \|u\|_{2_s^*}^4 \right) = -\varepsilon_1.$$

则对任意的 $M_1 > 0$, 存在 λ_* 使得对任意的 $\lambda \in (0, \lambda_*)$ 有

$$d \geq \frac{s}{3} S_s^{\frac{3}{2s}} S^{\frac{2s-3}{2s}} - \varepsilon_1 > M.$$

现在我们来介绍 Krasnoselski 亏格。设 E 是一个 Banach 空间。 A 为 E 的一个闭子集, 如果 $x \in A$, 有 $-x \in A$, 则称 A 是对称的。用 Σ 表示 E 的所有对称闭集族。 A 的亏格是指使得 $\varphi \in C(A, \mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ 是奇映射的最小正整数。如果 n 不存在, 则 $\gamma(A) = \infty$ 。通常, $\gamma(\varphi) = 0$ 。

命题 3.1 设 $A, B \in \Sigma$, 则

- 1) 如果存在一个从 A 到 B 的连续奇映射, 则 $\gamma(A) \leq \gamma(B)$ 。
- 2) 如果存在一个从 A 到 B 的同胚奇映射, 则 $\gamma(A) = \gamma(B)$ 。
- 3) 如果 $\gamma(B) < \infty$, 则 $\gamma(\overline{A \setminus B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$ 。
- 4) 利用 Borsuk-Ulam 定理, n 维球面 S^n 有一个 $n+1$ 的亏格。

- 5) 如果 A 是紧的, 则 $\gamma(A) < \infty$ 且存在 $\delta > 0$ 和一个 A 的闭的对称邻域 $N_{\delta}(A) = \{x \in E : \|x - A\| \leq \delta\}$ 使得 $\gamma(N_{\delta}(A)) = \gamma(A)$ 。

接下来给出 Kajikiya^[20] 的对称山路定理。

引理 3.2 设 E 是一个无限维的 Banach 空间且泛函 $I \in C^1(E, \mathbf{R})$ 满足下列条件:

(A₁) $I(u)$ 是偶的、下有界的, $I(0) = 0$ 且 $I(u)$ 满足局部 PS 条件, 即对于某些 $d^* > 0$, 如果 E 中的任意序列 $\{u_n\}$ 满足 $I(u_n) \rightarrow d < d^*$ 且在 E^* 上有 $I'(u_n) \rightarrow 0$, 则 $\{u_n\}$ 有一个收敛子列。

(A₂) 对任意的 $n \in \mathbf{N}$, 存在 $A_n \in \Gamma_n$ 使得 $\sup_{u \in A_n} I(u) < 0$ 。

那么下列的 1) 或者 2) 成立。

1) 存在一个序列 $\{u_n\}$ 使得 $I'(u_n) = 0, I(u_n) = 0$, 且 $\{u_n\}$ 收敛到 0。

2) 存在两个序列 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 使得 $I'(u_n) = 0, I(v_n) < 0, \lim_{n \rightarrow \infty} I(v_n) = 0$ 且 $\{v_n\}$ 收敛到一个非零的数。

由于 $I(u)$ 不是下有界的, 在下面的讨论中利用截断技巧。在式(19)中取 $\varepsilon = \frac{\lambda}{2_s^*}$, 得到

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \|u_n\|_E^2 + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \phi'_u u^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx - \\ &\frac{\lambda}{2_s^*} \int_{\Omega} |u|^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_E^2 - \int_{\Omega} F(x, u) dx - \frac{\lambda}{2_s^*} \int_{\Omega} |u|^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_E^2 - c \left(\frac{\lambda}{2_s^*} \right) |\Omega| - \frac{2\lambda}{2_s^*} \int_{\Omega} |u|^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_E^2 - c \left(\frac{\lambda}{2_s^*} \right) |\Omega| - \frac{2\lambda}{2_s^*} S_s^{-\frac{2}{s}} ([u]_s^2)^{\frac{2}{s}} \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_E^2 - c \left(\frac{\lambda}{2_s^*} \right) |\Omega| - \frac{2\lambda}{2_s^*} S_s^{-\frac{2}{s}} \|u\|_E^2 \\ &= B_1 \|u\|_E^2 - B_2 \|u\|_E^{\frac{2}{s}} - B_3 \end{aligned}$$

式中: $B_1 = \frac{1}{2}, B_2 = \frac{2\lambda}{2_s^*} S_s^{-\frac{2}{s}}, B_3 = \left(\frac{\lambda}{2_s^*} \right) |\Omega|$ 。

考虑函数

$$g(t) = B_1 t^2 - B_2 t^{\frac{2}{s}} - B_3$$

容易验证 g 在 $t_1 = \left(\frac{S_s^{\frac{2}{s}}}{2\lambda} \right)^{\frac{1}{2_s^* - 2}}$ 取得最大值, 取

$$\lambda_*' = \left[\frac{\frac{5}{3} (S_s)^{\frac{3}{2s}} 2^{\frac{2s-3}{2s}}}{C|\Omega|} \right]^{\frac{2s}{3-2s}}, \text{ 那么对任意的 } \lambda \in (0, \lambda_*') \text{ 有}$$

$$M_1 = g(t_1) = \frac{s}{3} (S_s)^{\frac{3}{2s}} (2\lambda)^{\frac{2s-3}{2s}} - c \left(\frac{\lambda}{2_s^*} \right) |\Omega| > 0 \quad (28)$$

可以发现对任意的 $M_0 \in (0, M_1), t_0 < t_1$ 有 $g(t_0) = M_0$ 。然后引入辅助函数

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq t_0, \\ \frac{B_1 t^2 - B_3 - M_1}{B_2 t^{\frac{2}{s}}}, & t \geq t_1, \\ C^\infty, x(t) \in [0, 1], & t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

容易验证 $x(t) \in [0, 1]$ 且 $x(t) \in C^\infty$ 。设 $\beta(u) = x(\|u\|)$, 考虑截断泛函 $J: E \rightarrow \mathbf{R}$,

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u_n\|_E^2 + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \phi_u' u^2 dx - \beta(u) \int_{\Omega} F dx - \frac{\lambda \beta(u)}{2_s} \int_{\Omega} |u|^{\frac{2_s^*}{s}} dx \quad (29)$$

因而

$$J(u) \geq B_1 \|u_n\|_E^2 + B_2 \beta(u) \|u\|_E^{\frac{2_s^*}{s}} - c \left(\frac{\lambda}{2_s^*} \right) |\Omega| =: \bar{g}(\|u\|_E)$$

式中: $\bar{g}(t) = B_1 t^2 - B_2 x(t) t^{\frac{2_s^*}{s}} - B_3$ 且

$$\bar{g}(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq t_0 \\ M_1, & t \leq t_1 \end{cases}$$

利用上述论断, 有以下结论。

引理 3.3 设 $J(u)$ 的定义为式(29), 则

- 1) $J \in C^1(E, \mathbf{R})$, J 是偶的且下有界。
- 2) 如果 $J(u) < M_0$, 则 $\bar{g}(\|u_n\|) < M_0$, $\|u_n\| < t_0$, 且 $I(u) = J(u)$ 。

- 3) 存在 λ_* 使得对任意的 $\lambda \in (0, \lambda_*)$, 对于 $d < M_0 \in \left(0, \min \left\{ M_1, \frac{s}{3} S^{\frac{3}{2s}} \lambda^{\frac{2s-3}{2s}} - \varepsilon_1 \right\} \right)$, J 满足局部 PS 条件。

证明 容易验证 1) 和 2)。由于 2) 和引理 3.1 知 3)。

引理 3.4 假设 (\tilde{f}_1) 成立, 则对任意的 $k \in N$, 存在 $\delta(k) > 0$ 使得 $\gamma(\{u \in X: J(u) \leq \delta(k)\} \setminus \{0\}) \geq k$ 。

证明 由 (\tilde{f}_1) 知 $F(x, \varepsilon u) \geq G(\varepsilon)(\varepsilon u)$ 且当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 有 $G(\varepsilon) \rightarrow \infty$ 。给定 $k \in N$ 且设 E_k 是 E 的一个 k 维子空间。因为 E_k 中的所有范数等价, 定义

$$\alpha_k = \inf_{\|u\|_k=1} \int_{\Omega} |u|^{\frac{2_s^*}{s}} dx, \beta_k = \inf_{\|u\|_k=1} \int_{\Omega} |u|^2 dx,$$

则对任意的 $u \in E_k, \varepsilon \in (0, t_0)$,

$$\begin{aligned} I(\varepsilon u) = J(\varepsilon u) &\leq \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\lambda \varepsilon^{\frac{2_s^*}{s}}}{2_s} \alpha_k - G(\varepsilon) \varepsilon^2 \beta_k + C \varepsilon^4 \\ &\leq \varepsilon^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\lambda \varepsilon^{\frac{2_s^*}{s}-2}}{2_s} \alpha_k - G(\varepsilon) \beta_k + C \varepsilon^2 \right] \\ &=: -\delta(k). \end{aligned}$$

由于 $G(\varepsilon) \rightarrow \infty (\varepsilon \rightarrow 0)$, 当给定的 ε 足够小时, 有 $-\delta(k) < 0$ 。因此

$$\{u \in E_k: \|u\|_k = \varepsilon\} \subset \{u \in E: J(u) \leq -\delta(k)\} \setminus \{0\}.$$

定理 1.2 的证明 考虑

$$\Sigma_k = \{A \in X \setminus \{0\}: A \text{ 是闭的且 } A = -A, \gamma(A) \geq k\}$$

且定义

$$c_k = \inf_{A \in \Sigma_k} \sup_{x \in A} G(x)$$

利用引理 3.3 可得 $-\infty < c_k < 0$ 。满足引理 3.2 的条件 (A_1) 和 (A_2) , 继而, 存在一个解序列收敛到 0。从而, 定理 1.2 由引理 3.3 得到。

参考文献:

- [1] NEZZA E D, PALATUCCI G, VALDINOCI E. Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces[J]. Bulletin des Sciences Mathématiques, 2012, 136(5): 521-573.
- [2] BERTOIN J. Lévy processes[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [3] KURIHARA S. Large-amplitude quasi-solitons in superfluid films[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1981, 50(10): 3262-3267.
- [4] CAFFARELLI L A, ROQUEJOFFRE J M, SIRE Y. Variational problems with free boundaries for the fractional Laplacian[J]. Journal of the European Mathematical Society, 2010, 12(5): 1151-1179.
- [5] TANKOV P. Financial modelling with jump processes[M]. Chapman and Hall/CRC, 2003.
- [6] CAFFARELLI L A, SALS A, SILVESTRE L. Regularity estimates for the solution and the free boundary of the obstacle problem for the fractional Laplacian[J]. Inventiones mathematicae, 2008, 171(2): 425-461.
- [7] SILVESTRE L. Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator[D]. The University of Texas at Austin, 2005.
- [8] SILVESTRE L. On the differentiability of the solution to the Hamilton-Jacobi equation with critical fractional diffusion [J]. Advances in Mathematics, 2011, 226(2): 2020-2039.
- [9] AIBERTI G, BOUCHITTE G, SEPPECHER P. Phase transition with the line-tension effect [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1998, 144(1): 1-46.
- [10] BISCI G M, RADULESCU V D, SERVADEI R. Variational methods for nonlocal fractional problems[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.
- [11] ZHANG J J, DO O J M, SQUASSINA M. Fractional schrödinger poisson systems with a general subcritical or critical nonlinearity[J]. Advanced Nonlinear Studies, 2016, 16(1): 15-30.
- [12] TENG K, AGARWAL R P. Existence and concentration of

- positive ground state solutions for nonlinear fractional Schrödinger–Poisson system with critical growth[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2018, 41(17): 8258–8293.
- [13] ZHI Z, YAN L, YANG Z. Existence and multiplicity of solutions for a fractional $-$ Laplacian equation with perturbation [J]. *Journal of Inequalities and Applications*, 2021(1): 1–13.
- [14] 冯胜豪, 王莉, 黄玲. 双临界项的分数阶薛定谔–泊松方程组非平凡解[J]. *华东交通大学学报*, 2021, 38(6): 114–119.
- FENG S H, WANG L, HUANG L. Nontrivial solution for fractional Schrödinger–Poisson type equations with double critical terms[J]. *Journal of East China Jiaotong University*, 2021, 38(6): 114–119.
- [15] CHE G, CHEN H, SHI H, et al. Existence of nontrivial solutions for fractional Schrödinger–Poisson system with sign-changing potentials[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2018, 41(13): 5050–5064.
- [16] SHEN L, YAO X. Least energy solutions for a class of fractional Schrödinger–Poisson systems[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2018, 59(8): 081501.
- [17] PUCCI P, XIANG M Q, ZHANG B L. Multiple solutions for nonhomogeneous Schrödinger–Kirchhoff type equations involving the fractional $-$ Laplacian in [J]. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2015, 54(3): 2785–2806.
- [18] TENG K. Existence of ground state solutions for the nonlinear fractional Schrödinger–Poisson system with critical Sobolev exponent[J]. *Journal of Differential Equations*, 2016, 261(6): 3061–3106.
- [19] RABINOWITZ P H. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*[M]. American Mathematical Society, 1986.
- [20] KAJIKIYA R. A critical–point theorem related to the symmetric mountain–pass lemma and its applications to elliptic equations[J]. *Journal of Functional Analysis*, 2005, 225(2): 352–370.



第一作者: 钟巧澄(1996—), 硕士研究生, 研究方向为偏微分方程。E-mail: 1097743227@qq.com。



通信作者: 王莉(1983—), 教授, 博士, 研究方向为偏微分方程。E-mail: wangli.423@163.com。

(责任编辑: 吴海燕 刘棉玲)