

文章编号: 1005-0523(1999) 01-0060-04

关于可数 S -闭空间

汪火云

(广州教育学院 数学系, 广东 广州 510030)

摘要: 给出了可数 S -闭空间的又一定义, 且得到了二个重要特征定理^[13]

关键词: 可数 S -闭空间; S - W -聚点; S -局部有限; S -开集; S -闭集

中图分类号: O 189.1

文献标识码: A

0 引言

T Thompson 在文献[1]中引进了 S -闭空间的定义^[13]称 X 是 S -闭的, 若对 X 的每个半开复盖, 都能选取有限子簇, 使它们的闭包复盖 X ^[13]王国俊在文献[2]中指出: S -闭空间的定义完全可以不涉及半开集的概念, 得到 S -闭空间的又一等价定义, X 是 S -闭的 $\Leftrightarrow$ 对 X 的每一正则闭复盖, 都存在有限的子复盖^[13]陈清煊在文献[3]中据此给出了可数 S -闭空间的定义^[13]称 X 是可数 S -闭的, 若对 X 的每一可数正则闭复盖, 都存在有限的子复盖^[13]但是我们在研究中发现, 如此给出的可数 S -闭空间的定义似乎不是很合理^[13]在本文中我们称 S -闭集的余集为 S -开集, 得到了 S -闭空间的又一等价定义^[13] X 是 S -闭的 $\Leftrightarrow$ 对 X 的每一个由“ S -开集组成的复盖”(简称 S -开复盖), 都能选取有限的子复盖^[13]由此, 我们重新给出了可数 S -闭空间的定义^[13]称 X 是可数 S -闭的, 若对 X 的每一可数 S -开复盖, 都存在有限的子复盖^[13]对如此定义的可数 S -闭空间, 我们得到了类似可数紧空间特征的特征定理^[13]因此, 我们认为涉及可数 S -闭空间定义本质的是 S -开集, 而不是正则闭集^[13]

1 有关术语与引理

设 X 是一个拓扑空间, $x \in X$ ^[13]令 $i(x)$ 表示含 x 的所有开集组成的集簇; $RC(x)$ 表示含 x 的所有正则闭集组成的集簇^[13]

设 $A \subset X$, 称点 x 为 A 的 S -聚点^[3], 若 $\forall U \in RC(x)$, 都有 $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ ^[13]所有 A 的 S -聚点组成的集, 称为 A 的 S -导集, 记为 $\text{cls}A$ ^[13]

设 $A \subset X$, 令 $\text{cls}A = \{x : U \cap A \neq \emptyset, \forall U \in RC(x)\}$, 称 $\text{cls}A$ 为 A 的 S -闭包^[13]若 $A = \text{cls}A$, 称 A 为 S -闭集^[4]^[13]

收稿日期: 1998-03-02

中国知网

https://www.cnki.net

作者简介: 汪火云(1963-), 男, 江西南昌人, 广州教育学院数学系副教授^[13]

设 $A \subset X, B \subset X$, 则有:

- 1) $\text{cls}A = A \cup \text{cls}A$ ^[3]
- 2) $\text{cls}A = \bigcap \{Q: Q \supset A \text{ 且 } Q \text{ 是正则开集}\}$ ^[5]
- 3) 若 $A \subset B$, 则 $\text{cls}A \subset \text{cls}B$ (易证)
- 4) $\text{cls}(A \cup B) = \text{cls}A \cup \text{cls}B$ (易证)

定义 1 称 S -闭集的余集为 S -开集^[13]

引理 1 设 $A \subset X, A$ 为 S -开集 $\Leftrightarrow A$ 为 X 中一簇正则闭集之并^[13]

证明 A 为 S -开集 $\Leftrightarrow \sim A$ 为 S -闭集 $\Leftrightarrow \sim A$ 为 X 中一簇正则开集之交 $\Leftrightarrow A$ 为 X 中一族正则闭集之交^[13]

定理 1 X 是 S -闭空间 $\Leftrightarrow$ 对 X 的每一 S -开复盖, 都存在有限的子复盖^[13]

定义 2 称 X 是可数 S -闭空间^[13] 若对 X 的每一可数 S -开复盖, 都存在有限的子复盖^[13]

定义 3 设 $A \subset X, x \in X$, 称点 x 为 A 的 S -W-聚点, 若 $\forall U \in RC(x), U \cap A$ 为无限集^[13]

定义 4 设 $\langle x_i \rangle$ 是 X 中的序列, 称点 x 是 $\langle x_i \rangle$ 的聚点, 若 $\forall U \in RC(x), \forall i \in N, \exists j \in N$ 且 $j \geq i$, 有 $x_i \in U$ ^[13]

定义 5 称集簇 $X = \{A_2: 2 \in B\}$ 是 S -局部有限的, 若 $\forall x \in X$, 存在 $U \in RC(x)$, 使 U 仅与 X 中的有限个成员相交^[13]

引理 2 集簇 $X = \{A_2: 2 \in B\}$ 是 S -局部有限的, 则 $U \{\text{cls}A_2: 2 \in B\} = \text{cls}[U \{A_2: 2 \in B\}]$ ^[13]

证明 只证 $\text{cls}[U \{A_2: 2 \in B\}] \subset U \{\text{cls}A_2: 2 \in B\}$ ^[13]

$\forall x \in \text{cls}[U \{A_2: 2 \in B\}]$, 由于 $\{A_2: 2 \in B\}$ 是 S -局部有限的, 存在 $U \in RC(x)$, 使得 U 仅与 $\{A_2: 2 \in B\}$ 中下标属于有限集 $B_0 \subset B$ 的元相交^[13] 于是, $U \cup [\{A_2: 2 \in B\}] = \emptyset$, 故 $x \notin \text{cls}[U \{A_2: 2 \in B \setminus B_0\}]$ ^[13] 由于 $\text{cls}[\bigcup \{A_2: 2 \in B\}] = \text{cls}[\bigcup \{A_2: 2 \in B \setminus B_0\}] \cup \text{cls}[\bigcup \{A_2: 2 \in B_0\}]$ ^[13] 故 $x \in \text{cls}[\bigcup \{A_2: 2 \in B_0\}] = \bigcup \{\text{cls}A_2: 2 \in B_0\} \subset \{\text{cls}A_2: 2 \in B\}$ ^[13]

引理 3 设 $X \in T_2$, 则每一独立集是 S -闭集^[13]

证明 $\forall x \in X, \forall y \neq x$ ^[13] 由于 $X \in T_2$, 故存在 $U \in N(x), V \in N(y)$, 使得 $U \cap V = \emptyset$, 从而有 $U \cap \bar{V} = \emptyset, \bar{V}$ 是含 y 的正则闭集, $\{x\} \cap \bar{V} = \emptyset$, 故 $y \in \text{cls} \{x\}$, 故 $\text{cls} \{x\} = \{x\}$ ^[13]

其它有关术语可参见文献^[6]^[13]

2 可数 S-闭空间的特征

定理 2 设 X 是拓扑空间, 则下列条件等价

- 1) X 是可数 S -闭空间^[13]
- 2) X 的每个可数无限子集有一个 S -W-聚点^[13]
- 3) X 内每一个序列有一个 S -聚点^[13]
- 4) 由 X 的不空的 S -闭集组成的任一递缩序列 $F_1 \supset F_2 \supset \dots$, 有不空的交^[13]

证明 1) $\Rightarrow$ 2) 反证, 设 X 是可数 S -闭空间, A 为 X 中可数无限子集, 但 A 没有 S -W-聚点^[13] 则 $\forall x \in X, \exists U_x \in RC(x)$, 使 $U_x \cap A$ 为有限集^[13] 令 $X = \{F: F \text{ 是 } A \text{ 的有限集}\}$ ^[13] 则 X 可数, $\forall F \in X$ ^[13] 令 $U_F = \bigcup \{U_x: U_x \cap A = F\}$, 则 $U_F \cap A = F$ 且 $\{U_F: F \in X\}$ 是 X 的可数 S -开复盖, 从而存在有限的子复盖 $\{U_{F_1}, U_{F_2}, \dots, U_{F_k}\}$, 则 $A = \bigcup \{A \cap U_{F_i}: i = 1, 2, \dots, k\}$, 故 A 为有限

集,矛盾!

2) $\Rightarrow$ 3) 设 $\langle x_i \rangle$ 是 X 内一序列, 令 $A = \{x_i; i \in \mathbb{N}\}$ 若 A 是有限集, 则 $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ 及自然数序列 $\langle ik \rangle_{k \in \mathbb{N}}$, 使得 $X_{i_k} = X_{i_0}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ 显然 x_{i_0} 是 $\langle x_i \rangle$ 的 S -聚点 若 A 是无限集, 由 2) 知 A 有一个 S - W -聚集 x , 则 $\forall U \in RC(x)$, U 有 $A = \{x_i; i \in \mathbb{N}\}$ 中无限多个点, x 是 $\langle x_i \rangle$ 的 S -聚点 (13)

3) $\Rightarrow$ 4) 设 $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ 是 X 的非空的 S -闭集组成的递缩闭序列 (13) $\forall i \in \mathbb{N}$, 取 $x_i \in F_i$, 则得 X 中一序列, 由 3) 知存在 $\langle x_i \rangle$ 的 S -聚点 x , 于是有: $\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall U \in RC(x)$, $\exists j \geq i$, 使 $x_j \in U$, 从而 $F_j \cap U = \emptyset$, $F_i \cap U = \emptyset$, 故 $x \in \text{cls} F_i = F_i$ (13) 于是 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ (13)

4) $\Rightarrow$ 1) 反证, 设 X 不是可数 S -闭空间, 则 X 有一个可数 S -开复盖 $\{U_i; i \in \mathbb{N}\}$, 它的任何有限子族不能复盖 X (13) $\forall i \in \mathbb{N}$, 令 $F_i = X \setminus U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_i$ 则 $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ 是 X 中的非空的 S -闭集组成的递缩序列 (13) 由假设知 $\exists x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$, 但 $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} X \setminus U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_i = X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_i) = \emptyset$, 矛盾!

定理 3 设 X 是 T_2 空间, 则下列条件等价:

- 1) X 是可数 S -闭空间;
- 2) X 的每一个 S -局部有限的子簇是有限的;
- 3) X 的每个 S -局部有限的单元限是有限的;
- 4) X 的每个可数无限子集有一个 S -聚点 (13)

证明 1) $\Rightarrow$ 2) 反证法, 设 X 是可数 S -闭空间, X 是 S -局部有限的子集簇且是无限的 (13) 在 X 内取可数多个非空子集 $\{A_i; i \in \mathbb{N}\}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, 令 $F_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} \text{cls} [\bigcap_{i=1}^k A_i] \neq \emptyset$, 且 $F_1 \supset F_2 \supset \dots$, 据定理 1 的 4) 知有 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ (13)

另一方面, 由 $\{A_i; i \in \mathbb{N}\}$ 亦是 S -局部有限的, 故 $\exists U \in RC(x)$ 及有限集 $N_0 \subset \mathbb{N}$ 使得 $i \in \mathbb{N} \setminus N_0$, $U \cap A_i = \emptyset$, 从而 $U \cap \text{cls} A_i = \emptyset$ (13) 若 $N_0 \neq \emptyset$, 则 $U \cap F_1 = \emptyset$, 这与 $x \in \text{cls} F_1 \mid F_1$ 矛盾! 若 $N_0 = \emptyset$, 设 N_0 内最大元为 i_0 , 则 $U \cap A_i = \emptyset$, $\forall i > i_0$ (13) 从而 $U \cap \text{cls} A_i = \emptyset$, $\forall i > A_{i_0}$ (13) 故 $U \cap F_{i_0+1} = \emptyset$, $x \in F_{i_0+1}$ 矛盾于 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ (13)

2) $\Rightarrow$ 3) 显然的 (13)

3) $\Rightarrow$ 4) 反证, 设 A 是 X 的可数无限子集, 且 A 没有 S -聚点, 令 $X = \{x_i; x_i \in A\}$, 则 X 是无限的, 下证 X 是 S -局部有限的 (13)

因为 $\forall t \in X$, $t \in \text{cls} A$, 则 $\exists U_t \in RC(t)$, 使得 $U_t \cap (A \setminus \{t\}) = \emptyset$, 故 U_t 最多与 X 中一个成员相交, 从而 X 是 S -局部有限的, 由 3) 知 A 是有限集, 矛盾!

4) $\Rightarrow$ 1) 设 A 是 X 的任一可数无限子集, 由假设知存在 $x \in \text{cls} A$, 于是 $\forall U \in RC(x)$, $\exists x_1 \in U \cap (A \setminus \{x\})$, 由引理 3 知 $\{x_1\}$ 是 S -闭集, 从而 $U \setminus \{x_1\}$ 是 S -开集取 V 是含 x 的正则闭集且 $V \subset U \setminus \{x_1\}$ (13) 于是 $\exists x_2 \in V \cap (A \setminus \{x\}) \subset U \cap A$ (13) 同理 $V \setminus \{x_2\}$ 为 S -开集 (13) 取 W 是含 x 的正则闭集且 $W \subset V \setminus \{x_2\}$ (13) 于是 $\exists x_3 \in W \cap (A \setminus \{x\}) \subset U \cap A$, ..., 于是可以得到 $U \cap A$ 内的无限多个点 $x_1, x_2, \dots$, 则 x 是 A 的 S - W -聚点, 从定理 2 的 2) 知, X 是可数 S -闭空间 (13)

称 X 是 S -到闭空间^[3], 若对 X 的每一无限子集 A , 都有 S -聚点 (13)

推论 T_2 可数 S -闭空间是 S -列闭空间 (13)

[参 考 文 献]

- [1] T Thompson ^{19}S -closed spaces[J] 19 Proc. Amer. Maths. Soc. 1976, 60:335~338
- [2] 王国俊 ^{19}S -闭空间的性质[J] 19 数学学报, 1981(1) :55~60
- [3] 陈清煊 ^{19}S -闭集, 近似紧集与 S -内核[J] 19 江西师大学报, 1986(1) :4~12
- [4] R F Dickman, R L Krystock $\cdot S$ -set and S -Perfect mapping[J] $\cdot$ Proc. Amer. Math. Soc. 1980, 80:687~69
- [5] 挥自求 19 关于 S -集与 S -闭包[J] 19 苏州大学学报, 1982(1) :28~38
- [6] 汪火云 ^{19}S -列闭空间, H -列闭空间与近似列紧空间[J] 19 江西师大学报, 1996(3) :280~284

On Countable S -closed Spaces

WANG Huo-yun

(Math. Department, Guangzhou Educational College, Guangzhou 510030, China)

Abstract: In this paper, the concept of countable S -closed spaces is renewed, and two important theorems about the characterizations of countalbe S -closed spaces are obtained.

Key words: countable S -closed spaces; S - W -accumulation point; S -locally finite; S -open set; S -closed set