文章编号:1005-0523(2000)01-0025-05

弹簧设计中的模糊可靠性分析

洪家娣， 郭厚焜， 施振邦

(华东交通大学 机械工程学院，江西 南昌 330013)

摘要:以弹簧为研究对象，运用模糊数学理论和可靠性设计方法，建立了弹簧设计中同时存在随机性和模糊性的可靠性模型及计算式，并给出了计算实例19.

关 键 词:弹簧；设计；模糊可靠性

中图分类号:TH131.3 **文献标识码:**A

1 引 言

随着模糊数学理论的发展和不断完善，模糊可靠性设计作为一门新兴的设计方法，在机械设计领域中已逐步得到了应用19.模糊可靠性设计克服了可靠性设计中忽视设计参数模糊性的不足，使设计模型更合理，更符合实际情况19.

弹簧是机械设备中应用十分广泛的弹性元件，它具有结构简单、制造方便等优点19.在弹簧的常规设计中，将剪切应力、材料性能(许用剪切应力)都视为常量，未考虑其数据的分散性，并按一定的强度条件进行设计或验算，用安全系数来满足其可靠性19.实际上，工作应力和许用应力都非常量，而是随机变量或模糊变量19.一方面，由于载荷的偏差、钢丝直径的偏差、簧圈中径的偏差等因素，使工作应力的数值具有随机性；另一方面，由于受客观条件的限制，弹簧的许用剪切应力也不可能为定值，而是存在着相当大的取值范围，即弹簧从完全不许用到完全许用之间有一个中介过渡过程，当考虑这一中介过程时，许用剪切应力就不仅存在着随机性，而且具有模糊性，这种变量称为模糊变量，它可以用模糊集合与隶属函数来表示19.

弹簧的模糊可靠性设计，是将剪切应力作为服从某种分布规律的随机变量，将许用剪切应力作为具有某种连续性隶属函数的模糊变量，根据模糊可靠性定义，求出弹簧在工作应力作用下不失效的概率19.

1 模糊可靠性模型

1.1 模糊可靠度

在论域 X 中，对任意 $x \in X$，指定了一个数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \in [0,1]$，这时我们说 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 确定了一个 X 的模糊子集 $\underset{\sim}{A}$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 称为 x 的 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 称 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数(13)如果模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 是一个随机变量，则称 $\underset{\sim}{A}$ 为一个模糊事件(13)

收稿日期:1999-07-22；**修订日期:**1999-10-10

作者简介:洪家娣(1948-)，女，上海市人，华东交通大学机械工程学院，副教授(13)

在论域 X 上对于连续的模糊随机事件 A，若隶属函数为 $\mu_A(x)$，概率密度函数 $p(x)$，则模糊可靠度为

$$R = P(A) = \int_x \mu_A(x) \cdot p(x) \mathrm{d}x \tag{1}$$

1.2 剪切应力分布

据一阶矩原理，对于下述形式的随机变量函数：

$$y = G x_1^{a1} x_2^{a2} \cdots x_n^{an} \tag{2}$$

式中：$x_1, x_2, \cdots x_n$ 为相互独立的随机变量；$G, a1, a2, \cdots an$ 为常数[13]

若各随机变量 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 的均值分别为 $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_n$，标准差分别为 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n$，则该函数的均值

$$\mu_y = G \mu_1^{a1} \mu_2^{a2} \cdots \mu_n^{an} \tag{3}$$

标准差

$$\sigma_y^2 = \mu_y^2 \left[\left(\frac{a_1 \sigma_1}{\mu_1} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{a_n \sigma_n}{\mu_n} \right)^2 \right] = \mu_y^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 c_{xi}^2 \tag{4}$$

式中：$c_{xi} = \sigma_i / \mu_i$，$c_{xi}$ 称为随机变量 x_i 的变异系数[13]

本文中讨论常用的圆柱螺旋弹簧的剪应力分布，在外力 F 作用下，压缩(位伸)弹簧的钢丝内侧剪应力具有最大值

$$\tau = k(8FD)/(\pi d^3) \tag{5}$$

式中：k 为曲度系数[13]

$$k = (4D - d)/(4D - 4d) + 0.615 d/D \tag{6}$$

其中：F 为外力；D 为弹簧中径；d 为钢丝直径[13]

圆柱螺旋弹簧在受压缩(拉伸)时的最大剪应力与曲度系数、载荷、弹簧中径、钢丝直径等随机变量有关[13]由于弹簧剪应力函数表达式(5)与(2)相似，由式(3)、(4)可得均值和标准差：

$$\mu_\tau = \bar{k} \frac{8\bar{F}\bar{D}}{\pi \bar{d}^3} \tag{7}$$

式中：$\bar{k}, \bar{F}, \bar{D}, \bar{d}$ 分别为各变量相对应的均值[13]

$$\sigma_\tau = \left[\left(\frac{\partial \tau}{\partial k} \right)^2 \cdot \sigma_k^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial F} \right)^2 \cdot \sigma_F^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial D} \right)^2 \cdot \sigma_D^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial d} \right)^2 \cdot \sigma_d^2 \right]^{1/2} =$$

$$\frac{8}{\pi} \left[\left(\frac{\bar{F}\bar{D}}{\bar{d}^3} \right)^2 \sigma_k^2 + \left(\frac{\bar{k}\bar{D}}{\bar{d}^3} \right)^2 \sigma_F^2 + \left(\frac{\bar{k}\bar{F}}{\bar{d}^3} \right)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{3\bar{k}\bar{F}\bar{D}}{\bar{d}^4} \right)^2 \sigma_d^2 \right]^{1/2} \tag{8}$$

式中：$\sigma_k, \sigma_F, \sigma_D, \sigma_d$ 分别为各变量相对应的标准差[13]

剪切应力的变异系数

$$C_\tau = \sigma_\tau / \mu_\tau = (C_k^2 + C_F^2 + C_D^2 + 9C_d^2)^{1/2} \tag{9}$$

式中：C_K, C_F, C_D, C_d 分别为各变量相对应的变异系数[13]

各变量的均值，标准差和变异系数可以如下确定：

1) 曲度系数 K：

其均值 $\bar{K}$ 按(6)计算，标准差 σ_k 可根据弹簧钢丝直径 d 和弹簧中径 D 的公差估算，其平均为 $\sigma_k \approx 0.045$；

2) 轴向载荷 F

其均值 $\bar{F}$ 可按名义工作载荷取值[13]标准差 σ_F 及变异系数 C_F 可按载荷的允许偏差 $\pm \Delta F$

确定,即 $\sigma_F = \Delta F/3$; $C_F = \Delta F/(3F)$;

3) 弹簧中径 D

其均值 D 可按名义尺寸取值⒀标准差的估计值 σ_D 见表 1⒀

表 1　弹簧径 D 的标准差 σ_D

精度		等级		
		1	2	3
弹簧指数	4～8	$0.003\,3D$	$0.005D$	$0.006\,6D$
D/d	8～16	$0.005D$	$0.006\,6D$	$0.01D$

4) 弹簧钢丝直径 d

其均值 $\bar{d}$ 可按名义尺寸取值,标准差 σ_d、变异系数 C_d 见表 2⒀

表 2　弹簧钢丝直径 d 的 σ_d 及 C_d

弹簧钢丝直径 d/mm	0.7～1.0	1.2～3.0	3.5～6.0	8～12
σ_d/mm	0.01	0.01	0.013	0.133
C_d	0.014～0.01	0.008～0.003 3	0.003 7～0.002	0.016～0.007

若已知各变量的均值和标准差,由式(7)、(8)、(9)可求出弹簧剪切应力的均值、标准差和变异系数⒀

1.3　许用剪切应力的隶属函数

弹簧的许用剪切应力为模糊变量,其模糊子集为隶属函数所刻划⒀由于许用剪切应力从许用值过渡到不许用值是一个渐近的衰减过程,因而其取值应该有一定范围的过渡,对于此类问题,可用偏小型的隶属函数来表示,如降半矩形分布、降半 轴分布、降半正态分布、降半梯形分布等,其中常用的有降半正态分布

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & 当\ x \leqslant \alpha \\ \exp[-k(x-\alpha)^2], & 当\ x > \alpha \end{cases} ⒀ \tag{10}$$

其中:$\mu(x)$ 为应力对许用值的隶属度,α、k 为分布系数⒀

1.4　模糊可靠度计算

设弹簧的剪切应力服从正态分布,其概率密度数为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\tau}\exp\left[-\frac{(x-\mu_\tau)^2}{2\sigma_\tau^2}\right] \tag{11}$$

式中:σ_τ 为剪切应力的标准差,μ_τ 为剪切应力的均值⒀

将式(10)、(11)代入式(1),可得到弹簧不失效的模糊可靠度

$$R = P(A) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mu(x)\cdot p(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\int_{-\infty}^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\tau}\exp\left[-\frac{(x-\mu_\tau)^2}{2\sigma_\tau^2}\right]\mathrm{d}x + \int_{\alpha}^{+\infty}\exp[-k(x-\alpha)^2]\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\tau}\exp\left[-\frac{(x-\mu_\tau)^2}{2\sigma_\tau^2}\right]\mathrm{d}x =$$

$$\Phi\left(\frac{\alpha-\mu_\tau}{\sigma_\tau}\right) + \frac{1}{(2k\sigma_\tau^2+1)^{1/2}}\cdot\exp\left[\frac{k(\alpha-\mu_\tau)^2}{2k\sigma_\tau^2+1}\right]\left\{1-\Phi\left[\frac{a-\mu_\tau}{\sigma_\tau(2k\sigma_\tau^2+1)^{1/2}}\right]\right\} \tag{12}$$

式中:$\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数,其值由正态函数表获得⒀

2 计算实例

某圆柱压缩螺旋弹簧的钢丝直径 $d=4.5$ mm，弹簧中径 $D=32$ mm，最大轴向负荷为 $F_{max}=425(1\pm0.15)$ N，材料为冷拔 65Mn，其抗拉强度极限为 $\sigma_B=1\,300\sim1\,500$ MPa，已知弹簧的承载能力和所受的载荷均为正态分布，试求弹簧不失效的模糊可靠度。

解：1) 弹簧剪切应力分布参数的计算

利用本文的计算式，可得到曲度系数、负荷、弹簧中径、钢丝直径、剪切应力的均值、标准差、变异系数如表3。

表3 曲度系数、负荷、弹簧中径、钢丝直径、剪切应力的均值、标准差、变异系数

	曲度系数 K/N	负载 F/N	弹簧中径 D/mm	钢丝直径 σ/mm	剪切应力 τ/MPa
均　值	1.2	425	32	4.5	459.86
标准差 σ	0.045	21.25	0.16	0.0135	28.97
变异系数 C	0.037	0.05	0.005	0.003	0.063

2) 隶属函数的确定

根据模糊度公理，当隶属度 $\mu(x)=0.5$ 时的边界最模糊，即最难确定此时的许用剪切应力是否属于不失效状态。

取式(10) $\sigma=1\,400$ MPa，$\mu(x)=0.5=\exp[-k(1\,500-1\,400)^2]$。得 $k=6.93\times10^{-3}$，因而隶属函数

$$\mu(x)=\begin{cases}1; & \text{当 } x\leqslant 1\,400;\\ \exp[-6.93\times10^{-3}(x-1\,400)^2], & \text{当 } x>1\,400\end{cases}$$

3) 许用剪切应力的分布参数

弹簧抗拉强度的均值及标准差

$$\sigma_B=(1300+1500)/2=1\,400\ \text{MPa};$$

$$\sigma_{\sigma_B}=(\sigma_{B,\max}-\sigma_{B,\min})/6\text{MPa}=(1500-1300)/6=33.33\ \text{MPa};$$

$C_{\sigma_B}=33.33/1\,400=0.023\,8$。

弹簧的许用剪切极限的均值及标准差

$$\tau_s=0.4535\,\sigma_B=0.453\,5\times1\,400\text{MPa}=634.9\ \text{MPa};$$

$$\sigma_{\tau_s}=C_{\tau_s}\tau_s\approx C_{\sigma_B}\tau_s=0.023\,8\times634.9\text{MPa}=15.11\ \text{MPa}。$$

4) 弹簧不失效的模糊可靠度

将有关数据代入式(12)，得到　　$R=P(A)=0.998\,9$

3 结　论

1) 本文中所提出的弹簧模糊可靠性设计方法由于考虑了设计变量的随机性和模糊性，因而更合理、更接近实际情况；

2) 本文中提出的设计方法，稍加修改，可用于其它机械零件的模糊可靠性计算，因而有一

定的推广应用价值⒀

[参 考 文 献]

[1] 汪培庄19.模糊集合论及其应用[M]19.上海:上海科学技术出版社,1993 19.
[2] 刘惟信19.机械可靠性设计[M]19.北京:清华大学出版社,1996 19.
[3] 卢玉明19.机械零件的可靠性设计[M]19.北京:高等教育出版社,1989 19.
[4] 洪家娣,施振邦.起重机的模糊可靠性分析[J]19.华东交通大学学报,1999,16(2) 19.

Analysis on Fuzzy Reliability of Spring Design

HONG Jia-di, GUO Hou-kun, SHI Zhen-bang
(Mechanical Engineering College, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: The reliability model of spring design and its calculation formula are set up Fuzzy mathematical theory and in reliability design method. lt is shown that in spring design there exist fuzzy variables and random variables simultaneously. And some calculating example are given.

Key words: spring; design; fuzzy reliability