

文章编号:1005-0523(2000) 01-0067-04

关于图的相对结合数的几点注记

邓毅雄, 刘二根, 周尚超, 徐保根

(华东交通大学 基础课部, 江西 南昌 330013)

摘要: [1]定义了图的相对结合数,对图 $G=(V,E)$, 相对结合数 $rb(G)=\max\{|S|-|N(S)|\mid \emptyset\neq S\subseteq V, N(S)\neq V\}$ 在此基础上给出了树及非连通图的相对结合数的计算方法^[3]

关 键 词: 相对结合数; 树; 非连通图; 计算

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

0 引 言

本文仅讨论简单图,此处未加定义的术语参阅文献[2]^[13]

对图 $G=(V,E)$, 设 $u\in V(G)$, 则 u 的邻域 $N_G(u)=\{v\mid v\in V(G), uv\in E(G)\}$, 对 $S\subseteq V(G)$, S 的邻域 $N_G(S)=\bigcup_{u\in S}N_G(u)$, 在不引起混淆情况下, 记 $N(S)=N_G(S)$ ^[13]

[1]引入图的相对结合数, 定义: 图 $G=(V,E)$ 的相对结合数

$$rb(G)=\max\{|S|-|N(S)|\mid \emptyset\neq S\subseteq V, N(S)\neq V\}$$

其中: 满足 $|S|-|N(S)|=rb(G)$ 的 S 称为 G 的一个 rb -集^[13]

在[1],[3]中, 作者对相对结合数进行了讨论, 特别讨论了图的相对结合数与图的结构和图含 1-因子的关系等^[13] 本文将进一步给出树 T 与非连通图的相对结合数的计算方法^[13]

1 树的相对结合数

树 T 是无圈的连通图, 而毛虫树 T 是去掉所有悬挂点得到一条路的树, 我们称这条路为该毛虫树的余路^[13] 记为 T^- , 其中有 k 个点的余路记为 $T^-(k)=u_1u_2\cdots u_k$, 相对应的毛虫树记为 $T(k)$, 并记 α 为 $u_i(i=1,2,\cdots,k)$ 在 T 中所邻接的悬挂点数, 显然 $\alpha\geq 1$, $\alpha\geq 1$, 当 $\alpha=0$ 时, 称对应的点 u_i 为零余点, 若存在 i 使 $\alpha=\alpha_{i+1}=\cdots=\alpha_{i+m-1}=0$ ^[13] 且 $\alpha_{i-1}\neq 0$, $\alpha_{i+m}\neq 0$, $i\geq 2$, $i+m-1\leq k-1$, 则称对应子路 $u_iu_{i+1}\cdots u_{i+m-1}$ 为零余子路, 特别当 m 为奇数时, 称其为奇零余子路^[13]

引理 1 设 S 为 $T(k)$ 的一个极大 rb -集, 则 $T(k)$ 的所有悬挂点均属于 S

证明 事实上, 否则若 v 是 $T(k)$ 的悬挂点, 但 $v\notin S$, 且 $uv\in E(T(k))$, 取 $S'=S\cup\{v\}$, 那么当 $u\in N(S)$ 时, 有 $N(S')=N(S)$, 则

收稿日期: 1999-06-14; 修订日期: 1999-12-30

基金项目: 江西省自然科学基金(3000009702)

作者简介: 邓毅雄(1963-), 男, 江西新干人, 华东交大基础课部, 副教授^[13]

$rb(T(k)) \geq |S'| - |N(S')| = (|S| + 1) - |N(S)| = (|S| - |N(S)|) + 1 = rb(T(k)) + 1$ (13)
矛盾;

当 $u \in N(S)$ 时, $N(S') = N(S) \cup \{u\}$. 则

$$rb(T(k)) \geq |S'| - |N(S')| = (|S| + 1) - |N(S)| + 1 = (|S| - |N(S)|) + 2 = rb(T(k)) + 2$$
 (13)

即 $|S'| - |N(S')| = rb(T(k))$, 那么 S' 也是 $T(k)$ 的 rb -集且 $|S'| = |S| + 1$ (13) 这与 S 的极大性矛盾, 因此 $T(k)$ 的所有悬挂点均属于 S (13) 同样容易证明:

引理 2 设 S 为 $T(k)$ 一个极大 rb -集, 则 $T(k)$ 所有奇零余子路的第奇数个点均属于 S (13)

定理 1 如果毛虫树 $T(k)$ 有 r 个非零余点, 有 t 条奇零余子路, 则

$$rb(T(k)) = \sum_{i=1}^k \alpha_i + t - r$$
 (13)

证明 由引理 1~2 知, 取 $T(k)$ 的一个 rb -集 S , 使 S 包含 $T(k)$ 的所有悬挂点和奇零余子路的第奇数个点, 注意到

1) 任意一条奇零余子路的第奇数个数与其在该子路上的邻域之点数之差为 1;

2) 所有满足 $\alpha_i \geq 2$ 的 u_i 均不属于 S , 事实上, 若 $u_i \in S$, 则取 $S' = S \setminus \{u_i\}$, 那么 $|N(S')| = |N(S)| - \alpha_i$, $|S'| - |N(S')| = (|S| - 1) - (|N(S)| - \alpha_i) = |S| - |N(S)| + (\alpha_i - 1) \geq |S| - |N(S)| + 1 = rb(T(k)) + 1$, 显然矛盾;

3) 若 u_i 为满足 $\alpha_i = 1$ 的点, 如果 $u_i \in S$, 取 $S' = S \setminus \{u_i\}$, 则显然有 $|S'| - |N(S')| = |S| - |N(S)|$, 从而可设 $u_i \in S$ (13) 因此

设 $S_1 = \{T(k) \text{ 所有悬挂点}\}$, $S_2 = \{\text{所有奇零余子路第奇数个点}\}$, 取 $S = S_1 \cup S_2$, 从而

$$rb(T(k)) = |S| - |N(S)| = |S_1 \cup S_2| - |N(S_1 \cup S_2)| = (|S_1| - |N(S_1)|) + (|S_2| - |N(S_2) \setminus N(S_1)|) = \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i - r\right) + t = \sum_{i=1}^k \alpha_i + t - r$$
 (13)

为了讨论树 T 的相对结合数我们先给出 2 个定义 (13)

定义 1 设 T 是树, $v \in V(T)$, 如果 v 至少与两个悬挂点相邻, 且至多与一个非悬挂点相邻, 则称 v 是 T 的外枝点 (13)

定义 2 对阶数至少是 4 的树 T , $e = uv$ 是 T 的悬挂边, 如果 e 与 2 度点邻接, 则称 e 为 T 的顶叶 (13)

记与外枝点 v 相邻的悬挂点之集为 $N^+(v)$, 且 $T_v = T - \{v\} \cup N^+(v)$.

引理 3 若树 T 无顶叶, 则 T 一定有外枝点 (13)

定理 2 设 v 是树 T 的外枝点, 则 $rb(T) = rb(T_v) + |N^+(v)| - 1$ (13)

证明 首先注意到, 对外枝点 v , 必存在 T 的 rb -集 S , 使 $N^+(v) \subset S$, 否则, 若 $N^+(v) - S \neq \emptyset$, 那么, 取 $S' = S \cup N^+(v)$, 则 $|N(S')| \leq |N(S)| + 1$ (13)

$$|S'| - |N(S')| \geq |S \cup N^+(v)| - |N(S)| - 1 = |S| - |N(S)| + (|N^+(v) - S| - 1) \geq |S| - |N(S)| = rb(T),$$

即 S 也是 T 的 rb -集且 $N^+(v) \subset S$ (13)

一方面, 我们可取 T 的 rb -集 S , 使 $N^+(v) \subset S$, 设 $S' = S \setminus N^+(v)$ (13) 则 $N_{T_v}(S') = N_T(S) \setminus \{v\}$ (13) 从而

$$rb(T) = |S| - |N_T(S)| = (|S'| + |N^+(v)|) - (|N_{T_v}(S')| + 1) = (|S'| - |N_{T_v}(S')|) +$$

$$|N_{T_v}(S')| - 1 \leq rb(T_v) + |N_{T_v}(S')| - 1$$

另一方面,若设 S_0 是 T_v 的一个 rb -集,取 $S = S_0 \cup N^+(v)$, 则 $N_T(S) = N_{T_v}(S_0) \cup \{v\}$, 且 $rb(T_v) = |S_0| - |N_{T_v}(S_0)| = (|S| - |N^+(v)|) - (|N_T(S)| - 1) = (|S| - |N_T(S)|) - |N^+(v)| + 1 \leq rb(T) - |N_{T_v}(S')| + 1$

即 $rb(T) \geq rb(T_v) + |N_{T_v}(S')| - 1$, 因此, $rb(T) = rb(T_v) + |N_{T_v}(S')| - 1$

容易证明

定理 3 若 $e = uv$ 是 T 的顶叶, 则 $rb(T \setminus \{u, v\}) = rb(T)$ (13)

由定理 1~3 知, 可通过逐步去掉树 T 的顶叶, 外枝点及其相邻的悬挂点, 将 T 化为毛虫树或阶数较小的树, 而逐步计算 T 的相对结合数 $rb(T)$, 当然, 这个过程也易于写出它的算法, 至此, 我们彻底解决了树的相对结合数的计算问题(13)

2 非连通图的相对结合数

在文献[1~2]中, 着重讨论了连通图的相对结合数, 下面我们给出非连通图的相对结合数的计算公式(13)

引理 4 设 G 是非连通图, 则 $rb(G) \geq 0$

证明 设 H 是 G 的一个连通分支(13)取 $S = V(H)$, 则 $N_G(S) = V(H) \neq V(G)$, 从而 $rb(G) \geq |S| - |N_G(S)| = |V(H)| - |V(H)| = 0$ (13)

引理 5 设 $G_i (i = 1, 2, \dots, k) (k \geq 1)$ 是 G 的所有满足 $rb(G_i) > 0$ 的连通分支, 则存在 G 的某 rb -集 S , 使 $S = \bigcup_{i=1}^k S_i$, 其中 $S_i = S \cap V(G_i)$, 且 S_i 是 G_i 的 rb -集(13)

证明 首先证明存在 G 的 rb -集 S^* , 使对所有满足 $rb(G_i) \leq 0$ 的连通分支 G_i , 有 $S^* \cap V(G_i) = \emptyset$, 否则(13)记 $S_j = S^* \cap V(G_j)$, 且 $S_j \neq \emptyset$ (13)当 $N_{G_j}(S_j) = V(G_j)$ 时, $|S_j| - |N_{G_j}(S_j)| = |S_j| - |V(G_j)| \leq 0$; 当 $N_{G_j}(S_j) \neq V(G_j)$ 时, 同样有 $|S_j| - |N_{G_j}(S_j)| \leq rb(G_j) \leq 0$ (13)所以, 取 $S' = S^* \setminus S_j$, 则

$$rb(G) \geq |S'| - |N_G(S')| = (|S^*| - |S_j|) - (|N_G(S^*)| - |N_{G_j}(S_j)|) \geq |S| - |N_G(S)| = rb(G) \quad (13)$$

从而 S' 也是 G 的 rb -集, 如此继续, 可得 G 的 rb -集 S 使 $S \cap V(G_i) = \emptyset$ (其中 $rb(G_i) \leq 0$) (13)

其次, 证明 S_i 是 G_i 的 rb -集, 一方面, $S_i \neq \emptyset$, 否则设 S_i 是 G_i 的 rb -集 (当然 $S_i \neq \emptyset$), 取 $S' = S \cup S_i$ (13)由于 $|S'| - |N_G(S')| = rb(G_i) > 0$, 则

$$rb(G) \geq |S'| - |N_G(S')| = (|S| + |S_i|) - (|N_G(S)| + |N_{G_i}(S_i)|) = (|S| - |N_G(S)|) + (|S_i| - |N_{G_i}(S_i)|) = rb(G) + rb(G_i) > rb(G) \quad (13) \quad \text{矛盾}$$

另一方面 $N_{G_i}(S_i) \neq V(G_i)$, 否则, 若存在某 S'_i , 使 $N_{G_i}(S'_i) = V(G_i)$, 设 S'_i 是 G_i 某 rb -集, 取 $S' = (S \setminus S_i) \cup S'_i$, 显然 $N_G(S') = (N_G(S) \setminus N_{G_i}(S_i)) \cup N_{G_i}(S'_i) \neq V(G_i)$, 由于 $|S_i| - |N_{G_i}(S_i)| = |S_i| - |V(G_i)| \leq 0$, 从而有

$$rb(G) \geq |S'| - |N_G(S')| = (|S| - |S_i| + |S'_i|) - (|N_G(S)| - |N_{G_i}(S_i)| + |N_{G_i}(S'_i)|) = (|S| - |N_G(S)|) + (|S'_i| - |N_{G_i}(S'_i)|) - (|S_i| - |N_{G_i}(S_i)|) \geq rb(G) + rb(G_i) > rb(G) \quad (13) \quad \text{矛盾}$$

最后, 若 S_i 不是 G_i 的 rb -集, 设 S'_i 是 G_i 某 rb -集, 取 $S' = (S \setminus S_i) \cup S'_i$, 类似推出矛盾(13)

综上所述,结论成立^[13]

定理 4 设 $G_i (i=1, 2, \dots, k)$ 是非连通图 G 的所有满足 $rb(G_i) > 0$ 的连通分支^[13]则

$$rb(G) = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ \sum_{i=1}^k rb(G_i), & k > 0 \end{cases} \quad (13)$$

证明 当 $k=0$ 时, 如果 G_j 是连通分支, 取 S 是 G 的 rb -集, $S_j = S \cap V(G_j)$ (j 取遍 G 的连通分支), 则

$$rb(G) = |S| - |N_G(S)| = \sum_j \left[|S_j| - |N_{G_j}(S_j)| \right] \leq \sum_j rb(G_j) \leq 0,$$

又由引理 4, 立得 $rb(G) = 0$ ^[13]

当 $k > 0$ 时, 由引理 5^[13]取 G 的某 rb -集 S , 使 $S = \bigcup_{i=1}^k S_i$, 其中 S_i 是 G_i 的 rb -集^[13]故

$$rb(G) = |S| - |N_G(S)| = \sum_{i=1}^k \left[|S_i| - |N_{G_i}(S_i)| \right] = \sum_{i=1}^k rb(G_i) \quad (13)$$

由定理 4 知, 非连通图的相对结合数可以转化为连通图的相对结合数来进行计算^[13]

[参 考 文 献]

- [1] 邓毅雄¹⁹.图的相对结合数[J]¹⁹.华东交通大学学报, 1995, (1) ¹⁹.
- [2] Bondy J A, Murty U S A. Graph Theory With Applications[M]¹⁹.Macmillan, London and Elserier, New York, 1976¹⁹.
- [3] 邓毅雄¹⁹.图的相对结合数的进一步结果[J]¹⁹.华东交通大学学报, 1997, (1) ¹⁹.

Several Notes on Relative Binding Numbers of Craphs

DENG Yi-xiong, LIU Er-gen, ZHOU Shang-chao, XU Bao-gen

(Basic Courses Department East China Jiaotong Univ. Nanchang 330013, China)

Abstract: The relative binding number of graph is introduced in [1]. Given a graph $G = (V, E)$, the relative binding number of G is defined as $rb(G) = \max \{ |S| - |N(S)| \mid \emptyset \neq S \subseteq V, N(S) \neq V \}$. In this paper we give the calculated method of $rb(G)$ for trees and disconnected graphs respectively.

Key words: graph; relative binding number; tree; disconnected graph; calculate