

文章编号:1005-0523(2000)01-0071-04

集值 u^0 -凹(凸)算子不动点的若干性质

盛梅波

(华东交通大学基础课部, 江西 南昌 330013)

摘要: 本文是文[2]的继续, 先给出集值 u^0 -增算子的概念, 然后在序条件下讨论了 u^0 -凹(凸)算子不动点的若干性质, 得出[1, 3]中在集值情形下的相应结果^[13]

关键词: u^0 -凹(凸)算子; u^0 -增算子; 强增算子; 锥; 序 Banach 空间; 不动点

中图分类号: O177.91

文献标识码: A

1 基本概念

设 P 是实 Banach 空间 E 中锥, " $\leq$ " 是由 P 导出的半序^[13] 其它相关概念见[1, 4]

定义 1 设 $A \subseteq E, x_0 \in E$, 则集合 $x_0 + A$ 为 $x_0 + A = \{y \mid y = x_0 + x, x \in A\}$ ^[13]

定义 2^[2] 设 $A, B \subseteq E$, 若 $\forall x \in A, \forall y \in B$, 均有 $x \leq y$, 则称 $A \leq B$ ^[13]

定义 3^[2] 设非空集 $D \subseteq E, T: D \rightarrow 2^E$ 是集值算子, 若 $\forall x, y \in D, x \leq y$ 蕴含 $T(x) \leq T(y)$, 则称 T 是 D 上强增算子^[13]

定义 4 设 $T: P \rightarrow 2^P$ 是集值算子, $u^0 > \theta$ 若 $x <_y$ (即 $x \leq y, x \neq y$), 均有 $\tau(x, y) > 0$, 使

$$u^0 + Ax \leq Ay \quad (1)$$

则称 T 是 P 上集值 u^0 -增算子^[13]

注: 若 T 是 P 上 u^0 -增的, 则 T 必定是 P 上强增的^[13]

定义 5^[2] 设 $T: P \rightarrow 2^P$ 是集值算子, $u^0 > \theta$ 如果

(1) $\forall x > \theta$ 有 $\alpha = \alpha_x > 0, \beta = \beta_x > 0$, 使

$$\alpha u^0 \leq T(x) \leq \beta u^0 \quad (2)$$

(2) 对任何满足 $\alpha u^0 \leq x \leq \beta u^0$ 的 $x \in P$, 以及 $0 < t < 1$, 都有 $\eta = \eta_{x,t} > 0$ 存在, 使

$$T(tx) \geq (1 + \eta)T(x) \quad (3)$$

其中 $\alpha, \beta > 0$ ^[13] 则称 T 是 P 上集值 u^0 -凹算子^[13]

若 (3) 式换成

$$T(tx) \leq (1 - \eta)T(x)$$

则称 T 是 P 上集值 u^0 -凸算子^[13]

2 主要结果

收稿日期: 1999-06-30; 修订日期: 1999-08-06

作者简介: 盛梅波(1966-), 男, 江西波阳人, 华东交通大学基础课部讲师^[13]

中国知网 <https://www.cnki.net>

定理 1 设 $T: P \rightarrow 2^P$ 是集值 w^0 -凹的强增算子, 则 T 在 P 上至多只有一个正不动点⁽¹³⁾

证 假设 x_1, x_2 是 T 的两个正不动点, 即 $x_1 > \theta, x_2 > \theta$ 使 $x_1 \in T(x_1), x_2 \in T(x_2)$ ⁽¹³⁾

由于 T 是 w^0 -凹的, 故有 $\alpha, \alpha, \beta, \beta > 0$ 存在, 使 $\alpha w^0 \leq T(x_1) \leq \beta w^0, \alpha w^0 \leq T(x_2) \leq \beta w^0$, 从而有 $\alpha w^0 \leq x_1 \leq \beta w^0, \alpha w^0 \leq x_2 \leq \beta w^0$, 即而

$$x_1 \geq \alpha w^0 = \frac{\alpha}{\beta} \beta w^0 \geq \frac{\alpha}{\beta} x_2 \triangleq t x_2$$

令 $t_0 = \sup \{ t | x_1 \geq t x_2 \}$ 因 $x_1 > \theta$ 故 $t_0 > 0$ 下证 $t_0 \geq 1$ ⁽¹³⁾ 事实上, 若 $t_0 < 1$, 由 $x_1 \geq t_0 x_2, \alpha w^0 \leq x_2 \leq \beta w^0$, 得存在 $\eta > 0$, 使

$$T(t_0 x_2) \geq (1 + \eta) t_0 T(x_2)$$

$$T(x_1) \geq T(t_0 x_2)$$

从而 $x_1 \geq (1 + \eta) t_0 x_2$, 由于 $(1 + \eta) t_0 > t_0$ 与 t_0 的定义矛盾, 于是 $t_0 \geq 1$ ⁽¹³⁾ 因此 $x_1 \geq x_2$ ⁽¹³⁾

同理可证

$$x_1 \leq x_2$$

□

定理 2 设 $T: P \rightarrow 2^P$ 是集值 w^0 -凹的强增算子, 如果 T 具有正不动点 x^* , 则对 $\forall x_0 > \theta$

作迭代

$$x_{n+1} \in T(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

都必有

$$\|x_n - x^*\|_{w^0} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty) \quad (4)$$

证 任取 $0 < t_1 < 1$, 令 $v_0 = t_1 x^*, v_{n+1} \in T(v_n), (n = 0, 1, 2, \dots)$ ⁽¹³⁾ 由得 w^0 -凹的, 于是存在 $\eta > 0$, 使

$$T(t_1 x^*) \geq (1 + \eta) t_1 T(x^*) \geq t_1 T(x^*)$$

从而 $v_1 \geq v_0$ ⁽¹³⁾ 又 $T(t_1 x^*) \leq T(x^*)$, 因而有 $v_1 \leq x^*$ ⁽¹³⁾ 类似可得

$$t_1 x^* = v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq x^*$$

令 $\rho_n = \sup \{ t | t x^* \leq v_n \}$, 显然有

$$0 < t_1 = \rho < \rho < \rho \leq \dots \leq \rho_n \leq \dots \leq 1 \quad (5)$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 1$ ⁽¹³⁾ 否则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = r < 1$ ⁽¹³⁾ 显然有 $r \geq t_1 > 0$ ⁽¹³⁾ 由于 T 的 w^0 -凹性知 $\exists \eta > 0$, 使

$$T(r x^*) \geq (1 + \eta) r T(x^*)$$

从而当 $0 < t \leq r$ 时, 有

$$T(t x^*) = T\left(\frac{t}{r} r x^*\right) \geq T(r x^*) \geq \frac{t}{r} T(r x^*) \geq (1 + \eta) t T(x^*)$$

于是

$$T(t x^*) \geq (1 + \eta) t T(x^*)$$

特别地, 有

$$T(\rho_n x^*) \geq (1 + \eta) \rho_n T(x^*)$$

由 $\rho_n x^* \leq v_n$ 及 T 的强增性, 有

$$T(v_n) \geq T(\rho_n x^*) \geq (1 + \eta) \rho_n T(x^*)$$

即

$$v_{n+1} \geq (1 + \eta) \rho_n x^*$$

从而

$$\rho_{n+1} \geq (1 + \eta) \rho_n$$

由此可得

$$\rho_n \geq (1 + \eta)^n \rho \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

显然与式(5)矛盾⁽¹³⁾

现任取 $t_2 > 1$, 令 $w_o = t_2 x^*$, $w_{n+1} \in T(w_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) (13) 同理可得

$$t_2 x^* = w_0 \geq w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n \geq \dots \geq x^*$$

令 $\xi = \inf \{ t | tx^* \geq w_n \}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi = 1$ (13)

设 $\forall x_0 > \theta$ 令 $x_{n+1} \in T(x_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) (13)

由 T 的 u^0 -凹性知, 有 $\alpha, \beta, \alpha, \beta > 0$, 使

$$\alpha_{u^0} \leq T(x^*) \leq \beta_{u^0}, \quad \alpha_{u^0} \leq T(x_0) \leq \beta_{u^0}$$

由此可得

$$\frac{\alpha}{\beta} x^* \leq \alpha_{u^0} \leq x_1 \leq \beta_{u^0} \leq \frac{\beta}{\alpha} x^*$$

取 $0 < t_1 < \min \{1, \frac{\alpha}{\beta}\}$, $t_2 > \max \{1, \frac{\beta}{\alpha}\}$, 则 $0 < t_1 < 1, t_2 > 1, v_0 = t_1 x^* \leq x_1 \leq t_2 x^* = w_0$, 根据 T 的强增性, 有

$$\theta x^* \leq v_n \leq x_{n+1} \leq w_n \leq \xi x^* \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (13)$$

因此有

$$\begin{aligned} (\theta_n - 1) \beta_{u^0} &\leq (\theta_n - 1) x^* \leq x_{n+1} - x^* \\ &\leq (\xi - 1) x^* \leq (\xi - 1) \beta_{u^0} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (13) \end{aligned}$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi = 1$, 故有

$$\|x_n - x^*\|_{u_0} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

□

推论 若 P 是 E 中正规锥, 则必有

$$\|x_n - x^*\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

定理 3 设 $T: P \rightarrow 2^P$ 是集值 u^0 -凸算子, 并且是 u^0 -增算子, 则 T 不可能有两个可以比较的正不动点 (13)

证 反证 (13) 若有 $x_1 > \theta, x_2 > \theta$ 使 $x_1 \in T(x_1), x_2 \in T(x_2)$, 而 x_1, x_2 可比较 (13) 不妨设 $x_1 < x_2$ ($x_1 \leq x_2, x_1 \neq x_2$) (13) 由于 T 是 u^0 -增算子, 故存在 $\tau > 0$, 使 $\tau u^0 + T(x_1) \leq T(x_2)$ (13) 即

$$\tau u^0 + x_1 \leq x_2$$

又 T 是 u^0 -凸算子, 则有 $\alpha, \beta > 0$, 使

$$\alpha_{u^0} \leq T(x_2) \leq \beta_{u^0}$$

于是

$$\alpha_{u^0} \leq x_2 \leq \beta_{u^0}$$

$$x_1 \leq (1 - \frac{\tau}{\beta}) x_2$$

令 $t_0 = \inf \{ t | tx_1 \leq tx_2 \}$, 显然有

$$0 < t_0 \leq 1 - \frac{\tau}{\beta} < 1, x_1 \leq t_0 x_2$$

再由 T 的 u^0 -凸性知, $\exists \eta > 0$, 使

$$T(x_1) \leq T(t_0 x_2) \leq (1 - \eta t_0) T(x_2)$$

即

$$x_1 \leq (1 - \eta t_0) x_2$$

由于 $(1 - \eta t_0 < t_0$ 与 t_0 的定义矛盾 (13)

□

注: 在定理 3 的条件下, T 可能有多个正不动点, 它们之间是不可比较的 (13) 这与定理 1 是不同的 (13)

定理 4 设 $T: P \rightarrow 2^P$ 是集值 u^0 -凹算子, 并且是强增算子, 若 T 具有正不动点 x^* , 即 $x^* \in T(x^*)$, P 为 E 中正规锥, 则必存在 $R > r > 0$, 使

$$T(x) \not\subseteq x \quad x \in P, \quad 0 < \|x\| < r \text{ 时}$$

$$T(x) \not\subseteq x \quad x \in P, \quad \|x\| > R \text{ 时}$$

证 先证 $x > \theta T(x) \leq x$, 则 $x \geq x^*$ (13) 事实上, 由 T 的 u^0 -凹性, 有 $\alpha, \beta, \alpha, \beta > 0$, 使

$$\alpha u^0 \leq T(x^*) \leq \beta u^0, \quad \alpha u^0 \leq T(x) \leq \beta u^0$$

从而

$$T(x) \geq \alpha u^0 = \frac{\alpha}{\beta} \beta u^0 \geq \frac{\alpha}{\beta} T(x^*), \quad x \geq \frac{\alpha}{\beta} x^*$$

令 $t_0 = \sup \{ t \mid x \geq tx^* \}$, 则 $t_0 \geq 1$ (13)

同理可证 $x > \theta T(x) \geq x$, 则 $x \leq x^*$ (13)

其次, 令 $r = \inf_{s \in P} \|s + x^*\|$, 则 $r > 0$ (13) 如果 $r = 0$, 则有 $s_n \in P$, 使 $\|s_n + x^*\| \rightarrow 0$, 于是 $s_n \rightarrow -x^* \in P$ 与 $x^* > \theta T(x)$ 矛盾 (13) 当 $x \in P, 0 < \|x\| < r$ 时, 必有 $x \not\subseteq x^*$ (13) 如果 $x \geq x^*$, 则 $yx - x^* \geq \theta$ 即 $\|x\| = \|y + x^*\| \geq r$ (13) 矛盾 (13) 因此, $Ax \not\subseteq x$ (13)

最后, 由于 P 是正规的, 区间 $[\theta x^*]$ 有界 (13) 令 $R = \sup_{\theta \leq s \leq x^*} \|s\|$, 当 $x \in P, \|x\| > R$ 时, 必有 $x \not\subseteq x^*$ (13) (否则 $\|x\| < R$) (13) 从而 $T(x) \not\subseteq x$ (13)

[参 考 文 献]

- [1] 郭大钧¹⁹. 非线性泛函分析[M]¹⁹. 山东科学技术出版社, 济南, 1985¹⁹.
- [2] 盛梅波¹⁹. 序 Banach 空间中一类序算子的若干性质[J]¹⁹. 华东交通大学学报, 1999, 16(2): 80~84¹⁹.
- [3] K·DeimLing· Nonlinear Functional Analysis[M]· Springer-Verlag, 1985¹⁹.
- [4] 张石生¹⁹. 不动点理论及其应用[M]¹⁹. 重庆出版社, 重庆, 1984¹⁹.

On Some Property about Fixed Point of the Multi-valued u^0 -concave (convex) Operator

SHENG Mei-bo

(Basic Corses Department, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, we define the u^0 -increasing operator and obtain some property about fixed points of multi-valued u^0 -concave (convex) operators (in [2]) in ordered Banach space. The corresponding results of [1, 3] are extended in the set-valued case.

Key words: u^0 -concave (convex) operators; u^0 -increasing operator; strongly inceasing operator; (normal) cone; ordered Banach space; fixed point