

文章编号: 1005-0523(2000) 01-0075-04

关于锐角三角形的一个几何不等式

刘 健

(华东交通大学 土木工程学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 证明了涉及锐角三角形与任意一点的一个新的几何不等式, 提出了有关任意三角形与一点的几个猜想不等式 19.

关 键 词: 锐角三角形; 内角平分线; 不等式; 点

中图分类号: O178

文献标识码: A

0 引 言

1975 年, M S Klamkin^[1]建立了下述重要的几何不等式, 设 $\triangle ABC$ 的三边为 a, b, c , 则对任意实数 x, y, z 与任意一点 P 有

$$(x + y + z)x\overrightarrow{PA}^2 + y\overrightarrow{PB}^2 + z\overrightarrow{PC}^2 \geq yza^2 + zxb^2 + xyc^2 \quad (1)$$

等号当且仅当 $x : y : z = S_{\triangle BPC} : S_{\triangle CPA} : S_{\triangle APB}$ 时成立^[13]

Klamkin 不等式(1)有许多漂亮的推论, 其中一个简单的是

$$a\overrightarrow{PA}^2 + b\overrightarrow{PB}^2 + c\overrightarrow{PC}^2 \geq abc \quad (2)$$

等号当且仅当 P 为 $\triangle ABC$ 的内心时成立, 见[2]^[13]

记 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R , 相应边上的高线为 h_a, h_b, h_c , 则易知(2)式等价于

$$\frac{PA^2}{h_a} + \frac{PB^2}{h_b} + \frac{PC^2}{h_c} \geq 2R \quad (3)$$

此式启发作者考虑了几个类似于于式(3)左端的和式的下界, 获得了下述一个结论:

定理 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 其半周为 s , 相应边上的内角平分线为 w_a, w_b, w_c , 则对任意一点 P 有

$$\frac{PA^2}{w_a} + \frac{PB^2}{w_b} + \frac{PC^2}{w_c} \geq \frac{4}{9} \frac{s}{s} \quad (4)$$

等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形且 P 为其中心时成立^[13]

1 定理的证明

为证不等式(4), 由 Klamkin 不等式(1)自然会去考虑证明有关锐角 $\triangle ABC$ 内角平分线与边长的不等式

收稿日期: 1998-10-23; 修订日期: 1999-06-08

作者简介: 刘 健(1963-), 男, 江西兴国人, 华东交通大学助工^[13]

$$\frac{a^2}{w_b w_c} + \frac{b^2}{w_c w_a} + \frac{c^2}{w_a w_b} \geq \frac{4}{9} \sqrt{3} s \left(\frac{1}{w_a} + \frac{1}{w_b} + \frac{1}{w_c} \right) \quad (5)$$

计算机的验证表明上式对锐角 $\triangle ABC$ 成立的可能很大,但经研究发现,证明(5)并非易事^[13]下面我们将另辟蹊径来证明不等式(4)(13)为此,先给出几个引理^[13]

引理 1^[3] 设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r ,其余符号同上,则

$$\frac{1}{w_a} + \frac{1}{w_b} + \frac{1}{w_c} \leq \frac{1}{Rr} + \frac{1}{2r^2} \quad (6)$$

等号仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立^[13]

注:未说明为锐角三角形的 $\triangle ABC$ 均指任意三角形,下同^[13]

引理 2^[4] 在锐角 $\triangle ABC$ 中有

$$s^2 \geq 4R^2 + (2 - 2\sqrt{2})Rr + (7 + 4\sqrt{2})r^2 \quad (7)$$

等号当且仅当锐角 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立^[13]

引理 3 在锐角 $\triangle ABC$ 中有

$$\frac{w_b w_c}{w_a} + \frac{w_c w_a}{w_b} + \frac{w_a w_b}{w_c} \leq 3\sqrt{3}s \quad (8)$$

等号当且仅当锐角 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立^[13]

证 显然,不等式(8)等价于

$$\left(\frac{1}{w_a} + \frac{1}{w_b} + \frac{1}{w_c} \right)^2 \leq \frac{3\sqrt{3}s}{w_a w_b w_c} \quad (9)$$

由角平分线公式:

$$w_a = \frac{2}{b+c} \frac{bcs(s-a)}{b+c} \quad (10)$$

与 Heron 公式:

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (11)$$

(Δ 为 $\triangle ABC$ 的面积)易知

$$w_a w_b w_c = \frac{8abc\Delta}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

据此及引理可知,欲证式(9)只需证:

$$\frac{1}{r} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2r} \right) \leq \frac{3\sqrt{3}(b+c)(c+a)(a+b)}{8abc\Delta},$$

由 $abc = 4\Delta R$, $\Delta = rs$ 及恒等式(见[2]):

$$(b+c)(c+a)(a+b) = 2s(s^2 + 2Rr + r^2) \quad (12)$$

可知,前式等价于 $3\sqrt{3}(s^2 + 2Rr + r^2) \geq 8(R+2r)s$,两边平方整理后又知上式等价于

$$27s^4 - (64R^2 + 148Rr + 202r^2)s^2 + 27(2R+r)^2r^2 \geq 0$$

$$\text{即 } 27s^2[s^2 - 4R^2 - (2 - 2\sqrt{2})Rr - (7 + 4\sqrt{2})r^2] + [44R^2 - (94 + 54\sqrt{2})Rr - (13 - 108\sqrt{2})r^2]s^2 + 27(2R+r)^2r^2 \geq 0,$$

按引理 2 又知,欲证上式只需证

$$[44R^2 - (94 + 54\sqrt{2})Rr - (13 - 108\sqrt{2})r^2]s^2 + 27(2R+r)^2r^2 \geq 0 \quad (13)$$

当 $44R^2 - (94 + 54\sqrt{2})Rr - (13 - 108\sqrt{2})r^2 > 0$ 时,上式显然成立^[13]

当 $44R^2 - (94 + 54\sqrt{2})Rr - 13 - 108\sqrt{2})r^2 \leq 0$ 时, 由简单的不等式 $s \leq \frac{3-\sqrt{3}}{2}R$ 可知, 欲证 (13) 式只要证

$$[44R^2 - (94 + 54\sqrt{2})Rr - 13 - 108\sqrt{2})r^2]R^2 + 4(2R + r)^2 \geq 0,$$

$$\text{即 } 44R^4 - (94 + 54\sqrt{2})R^3r + (3 + 108\sqrt{2})R^2r^2 + 16Rr^3 + 4r^4 \geq 0$$

$$\text{也即 } (R - 2r)[44(R - 2r)R^2 + (76 - 54\sqrt{2})R^2r + 6Rr(R - 2r) + (3R - 2r)r^2] \geq 0 \quad (13)$$

由 Euler 不等式 $R \geq 2r$ 可见上式成立, 从而不等式 (8) 获证, 且易知其等号成立的条件⁽¹³⁾

引理 4^[5] 设 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 分别位于多边形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 的边 $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ 所在直线上, $S_{A_1A_2 \cdots A_n}$ 表示多边形的面积, 则对平面任意一点 P 有

$$PA_1 \cdot M_nM_1 + PA_2 \cdot M_1M_2 + \cdots PA_n \cdot M_{n-1}M_n \geq 2|S_{A_1A_2 \cdots A_n}| \quad (14)$$

等号仅当 $PA_1 \perp M_nM_1, PA_2 \perp M_1M_2, \dots, PA_n \perp M_{n-1}M_n$ 时成立

引理 5 对 $\triangle ABC$ 与任意一点 P 有

$$PA \cos \frac{A}{2} + PB \cos \frac{B}{2} + PC \cos \frac{C}{2} \geq s \quad (15)$$

等号仅当 P 为 $\triangle ABC$ 内心时成立.

证 显然只需证 P 位于 $\triangle ABC$ 平面内的情形, 设 $\triangle ABC$ 的内切圆分别与边 BC, CA, AB 切于 D, E, F (13) 则易证 $EF = 2r \cos \frac{A}{2}, FD = 2r \cos \frac{B}{2}, DE = 2r \cos \frac{C}{2}$. 根据引理 4 有

$$2r \left[PA \cos \frac{A}{2} + PB \cos \frac{B}{2} + PC \cos \frac{C}{2} \right] \geq 2\Delta$$

从而得不等式 (15), 且易确定其等号成立的条件⁽¹³⁾

引理 6 对任意实数 x, y, z 与 $\triangle ABC$ 有

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2yz \cos A + 2zx \cos B + 2xy \cos C \quad (16)$$

等号当且仅当 $x : y : z = \sin A : \sin B : \sin C$ 时成立.

不等式 (16) 即为著名的 Wolstenholme 不等式 (见文献 [2]), 证明是非常简单的, 从略:

下面, 我们给出本文定理的证明⁽¹³⁾ 显而易见, Wolstenholme 不等式 (16) 等价于

$$(x + y + z)^2 \geq 4 \left[yz \cos^2 \frac{A}{2} + zx \cos^2 \frac{B}{2} + xy \cos^2 \frac{C}{2} \right] \quad (13)$$

$$\text{由此知 } \left[\frac{wbwc}{wa} + \frac{wcwa}{wb} + \frac{wawb}{wc} \right]^2 \geq 4 \left[wa \cos^2 \frac{A}{2} + wb \cos^2 \frac{B}{2} + wc \cos^2 \frac{C}{2} \right]$$

再按引理 3 便如, 在锐角 $\triangle ABC$ 中有

$$wa \cos^2 \frac{A}{2} + wb \cos^2 \frac{B}{2} + wc \cos^2 \frac{C}{2} \leq \frac{3-\sqrt{3}}{4}s \quad (17)$$

等号仅当锐角 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立⁽¹³⁾

现依 Cauchy 不等式有

$$\left[wa \cos^2 \frac{A}{2} + wb \cos^2 \frac{B}{2} + wc \cos^2 \frac{C}{2} \right] \left[\frac{PA^2}{wa} + \frac{PB^2}{wb} + \frac{PC^2}{wc} \right] \geq \left[PA \cos \frac{A}{2} + PB \cos \frac{B}{2} + PC \cos \frac{C}{2} \right]^2$$

由此根据引理 5 与及不等式(17), 立知

$$\frac{PA^2}{w_b} + \frac{PB^2}{w_b} + \frac{PC^2}{w_c} \geq \frac{4}{3} \frac{1}{3} s$$

即不等式(4)成立, 且易见其等号仅当锐角 $\triangle ABC$ 为正三角形, P 为其中心时成立^[13]

2 几个猜想

对任意三角形, 应用计算机考察, 我们提出与不等式(4)不分强弱的一个猜想:

猜想 1 设 $\triangle ABC$ 相应边上的中线为 m_a, m_b, m_c , 则对 $\triangle ABC$ 与任一点 P 有

$$\frac{PA^2}{w_a} + \frac{PB^2}{w_b} + \frac{PC^2}{w_c} \geq \frac{4}{9}(m_a + m_b + m_c) \quad (18)$$

与此相似的一个未解决的问题是

猜想 2 对 $\triangle ABC$ 与任一点 P 有

$$\frac{PA^2}{m_a} + \frac{PB^2}{m_b} + \frac{PC^2}{m_c} \geq \frac{4}{9}(w_a + w_b + w_c) \quad (19)$$

另外, 提出类似于引理 5 的 2 个猜想

猜想 3 对 $\triangle ABC$ 与任一点 P 有

$$PA \cos^2 \frac{A}{2} + PB \cos^2 \frac{B}{2} + PC \cos^2 \frac{C}{2} \geq \frac{1}{2}(m_a + m_b + m_c) \quad (20)$$

猜想 4 对 $\triangle ABC$ 与任一点 P 有

$$PA \csc \frac{A}{2} + PB \csc \frac{B}{2} + PC \csc \frac{C}{2} \geq \frac{4}{3}(w_a + w_b + w_c) \quad (21)$$

[参 考 文 献]

- [1] M S Klamfin. Geometric Inequalities via the polar Moment of Inertia[J]. Math. Mag. 1975, 48:44~46.
- [2] D S Mitrinović, J E Pecarić and V Volenec. Recent Advances in Geometric Inequalities[M]. Kluwer Academic Publishers, 1989 19.
- [3] 杨学枝¹⁹.关于角平分线的一个不等式[J]¹⁹.数学通讯, 1995, (8):17 19.
- [4] 陈胜利¹⁹.关于 R, r 与 s 的锐角三角形不等式[J], 见:单尊主编¹⁹几何不等式在中国¹⁹南京:江苏教育出版社, 1996, 72~81 19.
- [5] 刘 健¹⁹.问题征解 42 评注[J]¹⁹.数学通讯, 1993, (9):40~41 19.

A Geometric Inequality for an Acute Angled Triangle

LIU Jian

(College of Civil Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, a new geometric inequality for ang acute angled triangle and ang point is proposed and proved In addition several other inequalities are put forward

Key words: acilte triangle; angular bisector; inequality; point.