文章编号:1005-0523(2001)01-0066-02

再论线性多目标规划有效解的有效率

傅丽仙，　马本江，　盛梅波

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌　330013)

摘要:对文[1]中的优势集进行重新定义,讨论了非劣极点优势集的性质⒀在此基础上修正了文[1]中有效率的定义⒀

关　键　词:多目标规划;优势集;有效率;修正;Pareto 有效解

中图分类号:O221.6.59　　　　**文献标识码**:A

1　优势集的定义及其性质

已知(LVP) $\min\limits_{x\in R} Z = cx$ 其中$C=(C_{ij})_{p\times n}$,$R=\{x\in E^n \mid ax = b, x\geqslant 0, A=(a_{ij})_{m\times n}, b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T\}$为有界集⒀

由文[1]知,(LVP)的非劣极点为有限个,记为$R^*=\{x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(k)}\}$是$(LVP)$的$k$个非劣极点,$k\in N$⒀

相应于(LVP)的线性加权意义下的单目标问题为:

$(LSP)_\lambda$　$\min\limits_{x\in R} Z_\lambda = \lambda^T Cx$ 其中 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)^T\in$ 牷$^+$,其中 牷$^+=\{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_p)^T \mid$ 诸 $\lambda_j>0$ 且 $\sum\limits_{j=1}^{p}\lambda_j=1\}$

在文[1]的讨论下,有如下平行的定义和结论:

定义1　已知x是(LVP)的有效解,称$E\{\lambda|\lambda\in$ 牷$^+$,x是$(LSP)_\lambda$的最优解$\}$是x的优势集⒀

定理1　已知x是(LVP)的有效解,则其优势集$E=\{\lambda|\lambda\in$ 牷$^+$,$\lambda^T Cx\leqslant\lambda^T Cx^{(i)},i=\overline{1,k}\}$,其中$x^{(i)}\in R^*(i=\overline{1,k})$是$(LVP)$的所有非劣投点⒀

定理2　(优性包容定理):(LVP)的任一非极点的有效点的优势集都包含于某一非劣极点的优势集中,且其优势集为P维空间中$P-1$维超平面的一部分⒀

设$x^{(i)}\in R^*(i=\overline{1,k})$,则其优势集$E_i$有以下性质:

1) 凸性:$\forall\ \lambda_1,\lambda_2\in E_i$,$\eta_1+\eta_2=1,0\leqslant\eta_1,\eta_2\leqslant 1$ 有 $\eta_1\lambda_1+\eta_2\lambda_2\in E_i$

证明　因为 $E_i=\{\lambda|\lambda\in$ 牷$^+$,$\lambda^T Cx^{(i)}\leqslant\lambda^T Cx^{(j)},x^{(j)}\in R^*,j=\overline{1,k}\}$

$=\{\lambda|\lambda\in$ 牷$^+\}\cap\{\lambda|\lambda^T Cx^i\leqslant\lambda^T Cx^{(j)},j=\overline{1,k}\}$

即　E_i是两个凸集的交,因此它是凸集⒀

2) 锥性:$\forall\ \lambda\in E_i,k>0$ 有 $k\lambda\in E_i$

证明　此性质与凸性证明类同⒀

3) 可测性:$E_j(i=\overline{1,k})$勒贝格可测⒀

证明　同文[1]引理5⒀

4) 可分离性:E_i与E_j彼此是可分离的,$i\neq j$,$i=\overline{1,k}$,$j=\overline{1,k}$⒀

性质1　$\bigcup\limits_{i=1}^{k}E_i=$ 牷$^+$

证明　同文[1]中的定理3⒀

从以上讨论知:R^*中的点(权重意义下)集中了(LVP)所有有效解的优性(见定理2,性质1),具有代表性⒀因此,(LVP)决策可只考虑R^*中的点(非劣极点),而不必考虑其它有效点⒀

2　(LVP)的非劣极点的有效率

定义2　设$\lambda_1,\lambda_2\in$ 牷$^+$,如果存在数$k>0$,使$\lambda_1=k\lambda_2$,则称λ_1与λ_2为彼此等价的权重点⒀

由性质2知,若$\lambda_1\in Ei$,必有$\lambda_2\in Ei$,反之亦然⒀

因此,R^*中的点$x^{(i)}(i=\overline{1,k})$"优性的大小"取决于其优势集$E_i$中所含从$(\underbrace{0,\cdots,0}_{P个})$点出发牷$^+$中超射线的"个数"的多少,问题在于这个"个数"怎么度量⒀注意到它们都是从$(\underbrace{0,\cdots,0}_{P个})$点出发的,每条射线我们都截取单位1的长度作成集合来度量它,具有一定的合理性⒀为此令$U=\{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)\mid\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_p^2\leqslant 1,\lambda\in$ 牷$^+\}$,有如下定义:

收稿日期:2000-10-09;修订日期:2000-11-15

作者简介:傅丽仙(1972-),女,福建仙游人,华东交通大学助教.

定义 3　对于 $x \in R^*$,E 是其优势集,称 $\eta = \frac{m(E \cap U)}{mU}$ 为非劣极点 x 的有效率⒀其中 $m(E \cap U)$、mU 分别表示集合 $E \cap U$ 与 U 的勒贝格测度⒀

定理 3　已知 $x \in R^*$,η是其有效率,则 $\eta = 1 \Leftrightarrow x$ 是(LVP)的绝对最优解⒀

证明　同文[1]中定理 2

定理 4　已知 $x^{(i)} \in R^*$,η_i是其有效率($i = \overline{1,k}$)

则　$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i = 1⒀$$

证明　由性质 4,性质 1 反定义 3 易知⒀

以上讨论进一步指出了(LVP)决策可以考虑 R^* 中的点(非劣极点)的理论依据,并从新的角度——依 R^* 中各点有效率的大小——给出了这些非劣极点的排序⒀

3　示例

例　$(P)\ \min\limits_{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

其中　$R = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - 4 \geqslant 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6 \leqslant 0 \\ x_2 \leqslant 2 \\ x_2 \geqslant 1 \end{array} \right\}$

解　(P)为线性双目标规划⒀

易知(P)的非劣极点只有两个

$$x_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_B = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

由定理 1 知:

A 点的优势集

$$E_A = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \middle| 2\lambda_2 - \lambda_1 \leqslant 0 \right\}$$

由定义 3 求得 A 点的有效率

$$\eta_A = \frac{2arctg^{1/2}}{\pi} \doteq 0.35$$

又由定理 4 知 B 点的有效率为:

$$\eta_B = 1 - \eta_A = 0.65$$

附:按文[1]所述,本例 A 点的效率 $\eta = 0.25$⒀B 点的有效率 $\eta_B = 0.75$⒀显然 $\eta_A > \eta_A$,$\eta_B < \eta_B$,这是由于文[1]中在 $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ 线附近等价的点(从原点出发射线上的点)较坐标轴附近等价的点取得"多"的缘故⒀也即在 $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ 线附近轻$^{++}$内从原点出发的射线段取得较坐标轴附近的射线段"长",这由本文性质 2 看,是不合理的⒀

参考文献:

[1]　马本江. 线性多目标规划有效解的有效率[J]. 系统工程与电子技术. 2000,22(2):35～37.

[2]　运筹学教材编写组. 运筹学[M]. 北京:清华大学出版社,1990.

[3]　林锉云,董加礼. 多目标优化的方法与理论[M]. 长春:吉林教育出版社,1992.

Rediscuss the Probability of Efficiency of Efficient Solution of Linear Multi-Objective Programming

FU Li-xian,　MA Ben-jiang,　SHENG Mei-bo

(School of Natural Science, East China Jiaotong univ., Nanchang 330013 China)

Abstract: This paper gives a new definition of the superior set, and discuss the nature of efficient vertex of superior set. On the base of this nature, it also amends the defininction of the probability of efficiency.

Key words: Multi-objective programming; superior set; probability of efficiency; amendment; efficient solution of Pareto.