文章编号:1005-0523(2001)01-0070-06

大加权三角形不等式的一个推论及其应用

刘 健

(华东交通大学 土木建筑学院,江西 南昌 330013)

摘要: 给出了大加权三角形不等式的一个简单推论,由之简捷地推导出一些新的涉及三角形内部任一点的三元二次型不等式.

关 键 词: 三角形;点;不等式

中图分类号: O.178　　**文献标识码:** A

0 引 言

设$\triangle ABC$内部任意一点P到三顶点A, B, C与三边BC, CA, AB的距离分别为$R_1, R_2, R_3, r_1, r_2, r_3$,则对任意实数$x, y, z$有

$$x^2R_1+y^2R_2+z^2R_3 \geqslant 2(yzr_1+zxr_2+xyr_3) \tag{1}$$

这即是几何不等式中著名的三元二次型Erdös-Mordell不等式,见[1].

从已有的文献来看,类似于(1)的三元二次动点型三角形不等式并不多见.在新近出版的《不等式研究》一书的一篇拙作([2])中,笔者应用三角形的加权正弦和不等式与Carlitz-Klamkin不等式,建立了有关两个三角形同时涉及其中一个三角形内部一点的一个三元二次型不等式(即下面的(6)式),并给出了这一新结果多达50个的推论.最近,笔者发现这个内涵丰富的结果可方便地由作者在文献[3]中建立的大加权三角形不等式的一个推论得出,无需用到Carlitz-Klamkin不等式.而且,由此推论还可以很快导出其它一些新的三元二次加权不等式,本文对此作些讨论.

1 大加权不等式的一个推论

在文献[3]中,作者将有关单个三角形的重要不等式-Kooi不等式作了一般的推广,获得了下述一般性的结论:

设$\triangle A_iB_iC_i$的三边与面积分别为$a_i, b_i, c_i, \triangle_i (i=1,2,\cdots,n)$,又$x, y, z, u, v, w$与$u_j, v_j, w_j (j=1,2,\cdots,m)$均为任意正数;而正数$q_1, q_2, \cdots, q_n$满足$\sum_{i=1}^n q_i = 2(t+1)\ (t \geqslant 0)$,非负实数$p_1, p_2, \cdots, p_m$与$p, t$满足$\sum_{j=1}^m p_j = p-t-1$,则

$$\frac{x^p\prod_{i=1}^n a_i^{q_i}}{u^t\prod_{j=1}^m u_j^{p_j}}+\frac{y^p\prod_{i=1}^n b_i^{q_i}}{v^t\prod_{j=1}^m v_j^{p_j}}+\frac{z^p\prod_{i=1}^n c_i^{q_i}}{w^t\prod_{j=1}^m w_j^{p_j}} \geqslant \frac{4^{t+1}(yz+zx+xy)^{\frac{1}{2}p}\prod_{i=1}^n \triangle_i^{\frac{1}{2}q_i}}{(u+v+w)^t\prod_{j=1}^m (v_jw_j+w_ju_j+u_jv_j)^{\frac{1}{2}p_j}} \tag{2}$$

等号当且仅当$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2 \backsim \cdots \triangle A_nB_nC_n$,且$x:y:z=u_j:v_j:w_j=\operatorname{ctg}A_1:\operatorname{ctg}B_1:\operatorname{ctg}C_1 (j=1,2,\cdots,m)$, $u:v:w=\sin 2A_1:\sin 2B_1:\sin 2C_1$时成立.

不等式(1)不仅涉及了任意n个三角形,含有多组实参数,而且可用来推导许许多多的三角形不等式(见[3][5]),因此称之为大加权三角形不等式.

现在,我们来指出大加权三角形不等式(2)的一个简单推论.

收稿日期: 2000-09-29

作者简介: 刘 健(1963-),男,江西兴国人,华东交通大学助工.

在(2) 中令 $n=2, q_1=2, q_2=2$ 且 $p=2, t=1, p_j=0 (j=1,2,\cdots,m)$，则得

$$\frac{x^2a_1^2a_2^2}{u}+\frac{y^2b_1^2b_2^2}{v}+\frac{z^2c_1^2c_2^2}{w}\geqslant\frac{16(yz+zx+xy)\triangle_1\triangle_2}{u+v+w} \tag{3}$$

于上式作置换：$x\to\frac{x}{a_2}, y\to\frac{y}{b_2}, z\to\frac{z}{c_2}$，然后利用 $\triangle_2=\frac{1}{2}b_2c_2\sin A_2$ 等得

$$a_1^2\frac{x^2}{u}+b_1^2\frac{y^2}{v}+c_1^2\frac{z^2}{w}\geqslant\frac{8(yz\sin A_2+zx\sin B_2+xy\sin C_2)}{u+v+w}\triangle_1 \tag{4}$$

由于以上三元二次式的二次项 $x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy$ 前的系数均为正值，所以上式事实上对任意实数 x, y, z 均成立.

设 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 与半周及面积分别为 $a, b, c, s, \triangle$，由文[3] 中的命题 2 知，以 $\sqrt{a(s-a)}$，$\sqrt{b(s-b)}$，$\sqrt{c(s-c)}$ 为边可构成面积为 $\frac{1}{2}\triangle$ 的三角形. 因此在(3) 式中令 $a_1=\sqrt{a(s-a)}, b_1=\sqrt{b(s-b)}, c_1=\sqrt{c(s-c)}$，$\triangle A_2B_2C_2\cong\triangle A'B'C'$，立即可得大加权不等式(2) 下述推论(且以定理的形式给出)：

定理 1　对 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 与任意实数 x, y, z 及正数 u, v, w 有

$$a(s-a)\frac{x^2}{u}+b(s-b)\frac{y^2}{v}+c(s-c)\frac{z^2}{w}\geqslant\frac{4(yz\sin A'+zx\sin B'+xy\sin C')}{u+v+w}\triangle \tag{5}$$

等号当且仅当 $A'=\frac{\pi-A}{2}, B'=\frac{\pi-B}{2}, C'=\frac{\pi-C}{2}, x:y:z=\sin\frac{A}{2}:\sin\frac{B}{2}:\sin\frac{C}{2}, u:v:w=\sin A:\sin B:\sin C$ 时成立.

不等式(5) 是一个有关 x, y, z 的三元二次型不等式，而且涉及了两个三角形并含有任意的正数 u, v, w，这使得它可用来简便地推导许多新的三元二次型三角形不等式，下面我们应用它来推导有关三角形内部一点的二次型不等式.

注 1：(5) 式中等号成立的条件容易根据(2) 式等号成立的条件来确定，详略. 为简起见，本文以下也都不详细讨论不等式中等号成立的条件.

2　定理 1 的应用

以下各符号的意义同上.

在不等式(5) 中令 $u=ar_1, v=br_2, w=cr_3$，注意到恒等式 $ar_1+br_2+cr_3=2\triangle$，即得文献[2] 中的主要结果：

定理 a　对 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 内部任一点 P 以及任意实数 x, y, z 有

$$\frac{s-a}{r_1}x^2+\frac{s-b}{r_2}y^2+\frac{s-c}{r_3}z^2\geqslant 2(yz\sin A'+zx\sin B'+xy\sin C') \tag{6}$$

等号当且仅当 $A'=\frac{\pi-A}{2}, B'=\frac{\pi-B}{2}, C'=\frac{\pi-C}{2}, x:y:z=\sin\frac{A}{2}:\sin\frac{B}{2}:\sin\frac{C}{2}$ 且 P 为 $\triangle ABC$ 的内心时成立.

不等式(6) 不仅形式优美，而且有许多应用，见[2].

在不等式(5) 中取 $u=(s-a)(r_2+r_3), v=(s-b)(r_3+r_1), w=(s-c)(r_1+r_2)$，注意到恒等式：

$$(s-a)(r_2+r_3)+(s-b)(r_3+r_1)+(s-c)(r_1+r_2)=2\triangle$$

即得类似于不等式(6) 的下述结论：

定理 b　对 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 内部任一点 P 以及任意实数 x, y, z 有

$$\frac{a}{r_2+r_3}x^2+\frac{b}{r_3+r_1}y^2+\frac{c}{r_1+r_2}z^2\geqslant 2(yz\sin A'+zx\sin B'+xy\sin C') \tag{7}$$

等号当且仅当 $A'=\frac{\pi-A}{2}, B'=\frac{\pi-B}{2}, C'=\frac{\pi-C}{2}, x:y:z=\sin\frac{A}{2}:\sin\frac{B}{2}:\sin\frac{C}{2}$ 且 $(r_2+r_3):(r_3+r_1):(r_1+r_2)=\sin^2\frac{A}{2}:\sin^2\frac{B}{2}:\sin^2\frac{C}{2}$ 时成立.

令 P 为 $\triangle ABC$ 的内心，则 $r_1=r_2=r_3=r$ (r 为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径)，由(7) 式得

$$ax^2+by^2+cz^2\geqslant 4r(yz\sin A'+zx\sin B'+xy\sin C') \tag{8}$$

接着取 $x=\sqrt{r_1}, y=\sqrt{r_2}, z=\sqrt{r_3}$，立得

推论 b.1　$\sqrt{r_2 r_3 \sin A'} + \sqrt{r_3 r_1 \sin B'} + \sqrt{r_1 r_2 \sin C'} \leqslant \frac{1}{2} s$　(9)

这是文[2]中未指出但也可由(6)式导出的不等式.

在(7)式中令 $A' = \frac{\pi - A}{2}, B' = \frac{\pi - B}{2}, C' = \frac{\pi - C}{2}$,并作置换 $x \to x\sqrt{\frac{r_a}{a}}, y \to y\sqrt{\frac{r_b}{b}}, z \to z\sqrt{\frac{r_c}{c}}$,得

$$\frac{r_a}{r_2 + r_3} x^2 + \frac{r_b}{r_3 + r_1} y^2 + \frac{r_c}{r_1 + r_2} z^2 \geqslant 2\left(yz\frac{\sqrt{r_b r_c}}{bc}\cos\frac{A}{2} + zx\frac{\sqrt{r_c r_a}}{ca}\cos\frac{B}{2} + xy\frac{\sqrt{r_a r_b}}{ab}\cos\frac{C}{2}\right) \tag{10}$$

因有 $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{r_b r_c}{bc}}$ 等,于是可得

推论 b.2　对△ABC 内部任一点 P 及实数 x, y, z 有

$$\frac{r_a}{r_2 + r_3} x^2 + \frac{r_b}{r_3 + r_1} y^2 + \frac{r_c}{r_1 + r_2} z^2$$
$$\geqslant 2\left(yz\cos^2\frac{A}{2} + zx\cos^2\frac{B}{2} + xy\cos^2\frac{C}{2}\right) \tag{11}$$

等号当且仅当 $x : y : z = \sin A : \sin B : \sin C$,且 $(r_2 + r_3) : (r_3 + r_1) : (r_1 + r_2) = \sin^2\frac{A}{2} : \sin^2\frac{B}{2} : \sin^2\frac{C}{2}$ 时成立.

上式非常类似于[2]中推论 24 的不等式:

$$\frac{r_a}{r_1} x^2 + \frac{r_b}{r_2} y^2 + \frac{r_c}{r_3} z^2 \geqslant 4\left(yz\cos^2\frac{A}{2} + zx\cos^2\frac{B}{2} + xy\cos^2\frac{C}{2}\right) \tag{12}$$

前面的定理 a 与定理 b 事实上均为定理 1 简单而直接的推论,如果将一些已知的不等式应用到不等式(5)中,则也可直接了当地得出新的不等式来.例如,根据 Carlitz-Klamkin 不等式:

$$(s - a) r_2 r_3 + (s - b) r_3 r_1 + (s - c) r_1 r_2 \leqslant s r^2 \tag{13}$$

由(5)立即可知下述不等式(14)对任意正数 x, y, z 继而对任意实数 x, y, z 成立:

定理 c　对△$A'B'C'$与△ABC 内部任一点 P 以及任意实数 x, y, z 有

$$\frac{a}{r_2 r_3} x^2 + \frac{b}{r_3 r_1} y^2 + \frac{c}{r_1 r_2} z^2 \geqslant \frac{4}{r}(yz\sin A' + zx\sin B' + xy\sin C') \tag{14}$$

等号当且仅当△$A'B'C'$与△ABC 均为正三角形,$x = y = z$ 且 P 为正△ABC 的中心时成立.

由此结论出发,又可推得几个新的三角形不等式.

容易知道不等式(14)等价于

$$\frac{a}{r_1} x^2 + \frac{b}{r_2} y^2 + \frac{c}{r_3} z^2 \geqslant \frac{4}{r}(yz r_1 \sin A' + zx r_2 \sin B' + xy r_3 \sin C') \tag{15}$$

再令△$A'B'C'$为正三角形,即得有关三角形内部一点的不等式:

推论 c.1　$\frac{a}{r_1} + \frac{b}{r_2} + \frac{c}{r_3} \geqslant \frac{2\sqrt{3}(r_1 + r_2 + r_3)}{r}$　(16)

设△ABC 为锐角三角形,则易知当 P 为△ABC 的外心时有 $r_1 = R\cos A, r_2 = R\cos B, r_3 = R\cos C$($R$ 为△ABC 的外接圆半径),从而由(15)立得

推论 c.2　对锐角△ABC 与任意△ABC 及实数 x, y, z 有

$$x^2 \mathrm{tg}\, A + y^2 \mathrm{tg}\, B + z^2 \mathrm{tg}\, C \geqslant \frac{2R}{r}(yz\cos A\sin A' + zx\cos B\sin B' + xy\cos C\sin C') \tag{17}$$

据此及 Eluer 不等式 $R \geqslant 2r$,又得以下简洁的涉及两个三角形的不等式:

推论 c.3　在锐角△ABC 与任意△ABC 中有

$$\cos A\sin A' + \cos B\sin B' + \cos C\sin C' \leqslant \frac{1}{4}(\mathrm{tg}\, A + \mathrm{tg}\, B + \mathrm{tg}\, C) \tag{18}$$

在(17)式中令 $A' = \frac{\pi - A}{2}, B' = \frac{\pi - B}{2}, C' = \frac{\pi - C}{2}$,并作置换 $x \to \frac{x}{\sqrt{a}}, y \to \frac{y}{\sqrt{b}}, z \to \frac{z}{\sqrt{c}}$,然后利用简单的不等式 $\sqrt{bc} \leqslant 2R\cos\frac{A}{2}$ 等,则又可得以下二次型不等式:

推论 c.4　$$\frac{x^2}{r_2r_3}+\frac{y^2}{r_3r_1}+\frac{z^2}{r_1r_2}\geqslant\frac{2}{Rr}(yz+zx+xy)\tag{19}$$

设 $\triangle ABC$ 内部任一点 P 到顶点 A,B,C 的距离分别为 R_1,R_2,R_3,则成立以下已知的不等式(见[3]):

$$ar_1R_1+br_2R_2+cr_3R_3\leqslant 2R\triangle\tag{20}$$

据此及定理 1 的不等式(5),立即可得

定理 d　对 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 内部任一点 P 以及任意实数 x,y,z 有

$$\frac{s-a}{r_1R_1}x^2+\frac{s-b}{r_2R_2}y^2+\frac{s-c}{r_3R_3}z^2\geqslant\frac{2}{R}(yz\sin A'+zx\sin B'+xy\sin C')\tag{21}$$

等号当且仅当 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 均为正三角形,$x=y=z$ 且 P 为正 $\triangle ABC$ 的中心时成立

由此易得

推论 d.1　对锐角 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 及实数 x,y,z 有

$$\frac{s-a}{\cos A}x^2+\frac{s-b}{\cos B}y^2+\frac{s-c}{\cos C}z^2\geqslant 2R(yz\sin A'+zx\sin B'+xy\sin C')\tag{22}$$

上式显然推广了[2]中推论 26 的不等式:

$$\frac{s-a}{\cos A}x^2+\frac{s-b}{\cos B}y^2+\frac{s-c}{\cos C}z^2\geqslant(yza+zxb+xyc)\tag{23}$$

仿(19)式的推导,由(21)可得

推论 d.2　对 $\triangle ABC$ 内部任一点 P 有

$$\frac{x^2}{r_1R_1}+\frac{y^2}{r_2R_2}+\frac{z^2}{r_3R_3}\geqslant\frac{2(yz+zx+xy)}{R^2}\tag{24}$$

特别地有

$$\frac{1}{r_1R_1}+\frac{1}{r_2R_2}+\frac{1}{r_3R_3}\leqslant\frac{6}{R^2}\tag{25}$$

此式稍弱于文[6]中尚未解决的猜想不等式:

$$r_1R_1+r_2R_2+r_3R_3\leqslant\frac{3}{2}R^2\tag{26}$$

根据著名的林鹤一不等式(见[1]):

$$\frac{R_2R_3}{bc}+\frac{R_3R_1}{ca}+\frac{R_1R_2}{ab}\geqslant 1\tag{27}$$

的等价式:

$$R_2R_3\sin A+R_3R_1\sin B+R_1R_2\sin C\geqslant 2\triangle\tag{28}$$

由定理 d 易得

推论 d.3　对$\triangle$ABC 内部任一点 P 有

$$(s-a)\frac{R_1}{r_1}+(s-b)\frac{R_2}{r_2}+(s-c)\frac{R_2}{r_2}\geqslant\frac{4\triangle}{R}\tag{29}$$

这里针对不等式(29)顺便提出一个更强的猜想不等式:

猜想 1　设 P 为$\triangle ABC$ 内部任一点,AP,BP,CP 分别变 BC,CA,AB 于 L,M,N,记 $PL=r_1'$,$PM=r_2'$,$PN=r_3'$,

则 $$(s-a)\frac{R_1}{r_1'}+(s-b)\frac{R_2}{r_2'}+(s-c)\frac{R_2}{r_3'}\geqslant\frac{4\triangle}{R}\tag{30}$$

接下来,我们再建立有关 R_1,R_2,R_3 与 r_1,r_2,r_3 的一个二次型不等式.为此,先证以下不等式:

$$a\frac{r_1R_1}{R_2R_3}+b\frac{r_2R_2}{R_3R_1}+c\frac{r_3R_3}{R_1R_2}\leqslant s\tag{31}$$

记 $\angle BPC=\alpha$,$\angle CPA=\beta$,$\angle APB=\gamma$,则由余弦定理易得

$$a=\sqrt{(R_2\sin\beta+R_3\sin\gamma)^2+(R_2\cos\beta-R_3\cos\gamma)^2}$$

从而可见

$$a\geqslant R_2\sin\beta+R_3\sin\gamma$$

同理知 $b \geqslant R_3\sin\gamma + R_1\sin\alpha \quad c \geqslant R_1\sin\alpha + R_2\sin\beta$

三式相加即得

$$R_1\sin\alpha + R_2\sin\beta + R_3\sin\gamma \leqslant s \tag{32}$$

易证 $\sin\alpha = \frac{ar_1}{R_2R_3}$, $\sin\beta = \frac{br_2}{R_3R_1}$, $\sin\gamma = \frac{cr_3}{R_1R_2}$，故由上式立知(31)成立(其等号仅当 P 为 $\triangle ABC$ 的内心时成立)．

按不等式(5)与不等式(31)并注意到 $\triangle = rs$，就知对正数 x, y, z 继而对任意实数 x, y, z 成立下式：

$$\frac{(s-a)R_2R_3}{r_1R_1}x^2 + \frac{(s-b)R_3R_1}{r_2R_2}y^2 + \frac{(s-c)R_1R_2}{r_3R_3}z^2 \geqslant 4r(yz\sin A' + zx\sin B' + xy\sin C')$$

再作置换：$x \to x\sqrt{\frac{R_1}{R_2R_3}}$, $y \to y\sqrt{\frac{R_2}{R_3R_1}}$, $z \to z\sqrt{\frac{R_3}{R_1R_2}}$，就得

$$\frac{s-a}{r_1}x^2 + \frac{s-b}{r_2}y^2 + \frac{s-c}{r_3}z^2 \geqslant 4r\left(yz\frac{\sin A'}{R_1} + zx\frac{\sin B'}{R_2} + xzy\frac{\sin C'}{R_3}\right)$$

也即成立下述不等式：

定理e 对 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 内部任一点 P 以及任意实数 x, y, z 有

$$\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{r_1}x^2 + \frac{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{r_2}y^2 + \frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{r_3}z^2 \geqslant 4\left(yz\frac{\sin A'}{R_1} + zx\frac{\sin B'}{R_2} + xy\frac{\sin C'}{R_3}\right) \tag{33}$$

等号当且仅当 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 均为正三角形，$x = y = z$ 且 P 为正 $\triangle ABC$ 的中心时成立．

令 P 为 $\triangle ABC$ 的内心，则由(33)又得

推论e.1 对 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 及实数 x, y, z 有

$$x^2\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + y^2\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + z^2\operatorname{ctg}\frac{C}{2} \geqslant 4\left(yz\sin\frac{A}{2}\sin A' + zx\sin\frac{B}{2}\sin B' + xy\sin\frac{C}{2}\sin C'\right) \tag{34}$$

上式中取 $x = a, y = b, z = c$，利用恒等式：

$$a^2\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + b^2\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + c^2\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = 4s(R + r) \tag{35}$$

及 $\triangle = bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ 等，易得

推论e.2 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中有

$$\frac{\sin A'}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{\sin B'}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{\sin C'}{\cos\frac{C}{2}} \leqslant \frac{R + r}{r} \tag{36}$$

上式与文[2]中推论8的不等式：

$$\frac{\sin A'}{\sin A} + \frac{\sin B'}{\sin B} + \frac{\sin C'}{\sin C} \leqslant \frac{R + r}{r} \tag{37}$$

比较起来颇为有趣．

另外，由定理e易得

推论e.3 对 $\triangle ABC$ 内部任一点 P 与实数 x, y, z 有

$$\frac{x^2}{r_1\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{y^2}{r_2\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{z^2}{r_3\sin^2\frac{C}{2}} \geqslant 8\left(\frac{yz}{R_1} + \frac{zx}{R_2} + \frac{xy}{R_3}\right) \tag{38}$$

注2： 以上未予说明等号成立条件推论不等式，其等号成立条件的均要求 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 为正三角形，$x = y = z$ 且 P 为正 $\triangle ABC$ 的中心(除去不涉及的因素)．

考虑不等式(38)的推广，应用计算机作验证后，我们提出以下

猜想2 设 $0 < k \leqslant 3$，则对 $\triangle ABC$ 内部任一点 P 与实数 x, y, z 有

$$\frac{x^2}{r_1^k\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{y^2}{r_2^k\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{z^2}{r_3^k\sin^2\frac{C}{2}} \geqslant 2^{k+2}\left(\frac{yz}{R_1^k} + \frac{zx}{R_2^k} + \frac{xy}{R_3^k}\right) \tag{39}$$

参考文献：

[1] D·S·Mitrinović, J·E·Pečaric and V·Volenec, Recent Advances in Geometric Inequalities, Keuwer Academic Publishers, 1989.

[2] 刘　健19.一个三元二次型几何不等式的应用与推广[C]19.不等式研究19.西藏：西藏人民出版社，2000 19.

[3] 刘　健19.涉及多个三角形的不等式[J]，湖南数学年刊，1995，15(4)：29～42.

[4] 刘　健19.一类几何不等式的两个定理及其应用[J]，华东交通大学学报，1998，15(3)：75～79.

[5] 刘　健19.Carlitz－Klamkin 不等式的指数推广及其应用[J]，铁道师范学院学报，1999，16(4)：73～79.

[6] 刘　健19.100 个待解决的三角形不等问题[C]. 几何不等式在中国19.南京：江西苏教育出版社，1996.

A Deduction of an Inequality for Heavy Weighted Triangles and its Applications

LIU　Jian

(School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong Univ, Nanchang 330013 China)

Abstract: This paper presents a simple deduction of an inequality for heavy weighted triangles, and with it some new quadratic inequalities of three variants at any point within a triangle.

Key words: triangle; point; inequality