

文章编号:1005—0523(2003)01—0042—03

非线性粘弹性梁——柱的动力学模型及其简化

包忠有¹, 喻晓今¹, 邱小林²

(1. 华东交通大学 土木建筑学院; 2. 江西航天科技职业学院, 江西 南昌 330013)

摘要:对材料满足 Leademan 非线性本构关系、且两端简支的梁—柱的动力学模型运用 Galerkin 方法进行截数据简化变为常微分—积分, 从而将均匀粘弹性梁—柱动力学行为的偏微分方程进一步简化为常数分方程。

关键词:粘弹性梁柱; 运动微分方程; Leademan 关系; Galerkin 方法

中图分类号: O322

文献标识码: A

0 引言

粘弹性结构的数学模型是研究结构稳定性等动力学行为的基础。Suire 和 Cekerbun 建立了大变形线性粘弹性的动力学模型并应用 Galerkin 方法进行了简化^[1], 继而他们又建立了大变形线性粘弹性梁的动力学模型并进行了简化^[2]。在此基础上研究了粘弹性梁的周期和混沌动力学行为。本文则采用 Leademan 的非线性本构关系^[3], 对非线性粘弹性梁柱的动力学行为进行数学建模。

1 非线性粘弹性梁—柱的动力学模型

研究一类均匀矩形截面梁—柱在纵向和轴向荷载作用下的纵向运动。设梁的纵向位移为 $y(x, t)$ 、单位长度质量为 ρ 、纵向分布荷载为 $F(x, t)$ 、轴向荷载为 $P(t)$ 、截面上弯矩为 $M(x, t)$, 则梁柱的动力学方程为

$$\rho \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + P(t) \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + P(t) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = F(x, t) \quad (1)$$

式中:

$$M(x, t) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z \sigma(x, z, t) dz \quad (2)$$

$\sigma(x, z, t)$ 为截面应力;

h 为梁的高度;

t 为时间

对于非线性粘弹性材料, 其应力—应变关系由 Leademan 关系^[3]给出为

$$\sigma(x, z, t) = E_0 \epsilon(x, z, t) + \int_0^t E(t - t_0) g(\epsilon(x, z, t)) dt \quad (3)$$

式中:

$E(t)$ 为松弛函数, $t=0$ 时为 E_0 为材料的初始 Young 模量; $\epsilon(x, z, t)$ 为轴向应变; 非线性函数定义为

$$g(\epsilon(x, z, t)) = \epsilon(x, z, t) + \beta^2 \epsilon(x, z, t) + \gamma^3 \epsilon(x, z, t) \quad (4)$$

其中 β 和 γ 使得小应变 $g(\epsilon) \rightarrow \epsilon$ 。

对于小应变应力—位移的几何关系为

$$\epsilon(x, z, t) = -z \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad (5)$$

将式(4)、(5)代入式(3)得到

$$\begin{aligned} \sigma(x, z, t) = & E_0 \left[-z \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \beta^2 \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 - \gamma Z^3 \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right)^3 \right] + \int_0^t E(t - \tau) \\ & \left(-Z \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \beta^2 \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 - \gamma Z^3 \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right)^3 \right) d\tau \end{aligned}$$

收稿日期: 2002—09—24

作者简介: 包忠有(1950—), 男, 江西广丰人, 华东交通大学副教授。

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0}^3 \Big] d\tau \quad (6)$$

将(6)式代入(2)式并计算相应积分得到弯矩的表达式

$$M(x, t) = E_0 \left[\frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \gamma \frac{h^5}{80} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right] + \int_0^t E(t-\tau) \left[\frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \gamma \frac{h^5}{80} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right] d\tau \quad (7)$$

利用式(7)可将式(1)改写为

$$P \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + E_0 \left[\frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \gamma \frac{h^5}{80} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right] + \int_0^t E(t-\tau) \left[\frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \gamma \frac{h^5}{80} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right] d\tau + P(t) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = F(x, t) \quad (8)$$

式(8)为非线性粘弹性梁柱的动力学模型

2 两端简支非线性粘弹性梁——柱的简化动力学模型

为了求解式(8)中的各种力学参数,应结合初始条件和边界条件对方程进行进一步简化,这里仅考虑两端简支的情形.其边界条件为

$$\begin{aligned} x=0 \text{ 及 } x=l \text{ 处,} \\ y(0, t) = M(0, t) \\ l \text{ 为梁柱的长度.} \end{aligned} \quad (9)$$

应用 Galerkin 方法,在边界(9)式下,式(8)中 $y(x, t)$ 可展开为 Fourier 正弦级数

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (10)$$

在只考虑前一项时,如记 $q^1(t)$ 为 $q(t)$,则将式(10)代入式(8)得到

$$\begin{aligned} P q(t) \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{E_0 h^2}{12} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 [q(t) + \int_0^t \dot{D}(t-\tau) q(\tau) d\tau] \cdot \sin \frac{\pi x}{l} + \gamma \frac{E_0 h^5}{80} \left(\frac{\pi}{l} \right)^8 \cdot [q^3(t) + \int_0^t \dot{D}(t-\tau) q^3(\tau) d\tau] (\sin^2 \frac{\pi x}{l} - 2 \cos^2 \frac{\pi x}{l}) \sin \frac{\pi x}{l} + P(t) \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 q(t) \sin \frac{\pi x}{l} = F(x, t) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{其中: } D(t) = \frac{E(t)}{E_0} \quad (12)$$

将式(11)两端同乘以 $\sin \frac{\pi x}{l}$; 然后在 $[0, l]$ 上

积分得到

$$\begin{aligned} P q + \omega^2 - \eta p(t) q + \kappa q^3 + \omega^2 \int_0^t \dot{D}(t-\tau) q^3(\tau) d\tau + \kappa \int_0^t \dot{D}(t-\tau) q^3(\tau) d\tau = Q(t) \end{aligned} \quad (13)$$

式中

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{E_0 h^3}{12 P} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4; \quad \eta = \left(\frac{\pi}{l} \right)^2; \quad \kappa = 3 \gamma \frac{E_0 h^5}{32 P} \left(\frac{\pi}{l} \right)^8; \\ Q(t) &= \frac{1}{P} \int_0^t F(x, t) \sin \left(\frac{\pi x}{l} \right) dx \end{aligned}$$

对于标准线性固体材料的松弛特性,

$$D(t) = a + bc^{-a}$$

代入式(13),得

$$\begin{aligned} a q + (\omega^2 + \kappa q^2 - \eta p(t)) q + a \omega^2 + (1-b) + \eta p(t) q + \kappa a (1-b) q^3 = Q(t) + a Q(t) \end{aligned} \quad (15)$$

从而完成了非线性粘弹性梁柱动力学行为的数学建模工作.

参考文献:

- [1] Suire G, Cederbaum G. Elastica type dynamic stability analysis of viscoelastic columns[J]. Arch Appl Mech, 1994, 64, 307~316.
- [2] Suire G, Cederbaum G. Periodic and chaotic behavior of viscoelastic nonlinear (elastica) bars under harmonic excitations. Int J Mech Sci, 1995, 37, 753~772.
- [3] Leademan H. Large longitudinal retarded elastic deformation of rubberlike network polymers polymer Trans soc Rheol, 1962, 6, 361~382.
- [4] Smart J Williams J G. A comparison of single integral non-linear viscoelasticity theories J Mech phys solids, 1972, 20, 313~324.

A Dynamical Model for Nonlinear Viscoelastic Beam-Columns

BAO Zhong-you¹, YU Xiao-jin¹, QIU Xiao-lin²

(1. East China Jiaotong Univ.; 2. Jiangxi Hangtian Science and Technolgy Institute, Nanchang 330013, China)

Abstract: The integro-partial-differential equation that governs the dynmical behavior of homogenous material of the beam-columns obeys the Leaderman nonlinear consitutive relation. In the case of two simple supported ends, the Galerkin method is applied to simplify the eguation into a integro-differntial eguation. For a class of certain material, the eguation is further simplified to a differential eguation.

Key words: visvoelastic beam-column; differential egution of motion; leademan relation; galerpcin method

简讯 1:

《冷藏运输的市场需求及技术发展的研究》
荣获湖南省科技进步二等奖

由中南大学、华东交通大学、铁道部科学研究院、诚昌车辆厂共同完成的科研成果《冷藏运输的市场需求及技术发展的研究》荣获了二〇〇二年湖南省科技进步二等奖,华东交通大学是第二获奖单位.日前,温盛儒教授从长沙捧回了湖南省人民政府给学校及他个人颁发的获奖证书.

《冷藏运输的市场需求及技术发展的研究》是铁道部的科技研究开发计划项目.这次获奖的是该项目的研究报告及应用成果.该研究报告长达四十多万字,全面系统地调查分析了全国各省市、地区的冷藏运输货源的分布及其结构,分析了各类易腐货物的货源货流与运输特性,研究了铁路冷藏运输工具、保鲜及相关技术的现状、发展趋势及对策,研究了我国铁路冷藏运输管理体制及收入清算办法的改革方案.内容丰富、数据翔实、观点新颖、方法科学.经专家评审,认为“已达到国际先进水平”.

该项研究成果已被铁道部及湖南省有关部门采纳及应用.据铁路及地方运输与财务部门提供的数据可见,该项成果的推广应用“已取得了高达 12 亿元以上的经济效益和显著的社会效益”.

科研处 温盛儒
2003.1.10