

文章编号:1005—0523(2003)01—0075—04

任意作用力下旋转圆盘的动态模型

郭厚[✉], 熊国良, 李 骏

(华东交通大学 机电工程学院, 江西 南昌 330013)

摘要:推导出了受横向作用力和面内应力场作用的旋转圆盘的弯曲运动方程.通过系统的动能和势能表达式,应用哈密尔顿原理,可获得主导偏微分运动方程.在小变形情况下,运用伽辽金方法,可将偏微分方程转换为线性常微分方程组进行求解.

关键词:旋转圆盘;运动方程;伽辽金法

中图分类号:TB53 **文献标识码:**A

0 引言

过去的三十多年,发表了大量的关于旋转圆盘动力学方面的论文.其中大多数都是针对某一特定作用力情况下来建立数学模型和进行求解,例如,由一个固定弹簧产生的弹性力或由一个固定阻尼器产生的阻尼力.其中很少有学者对不稳定性机理进行研究.

Mote^[1,2], Iwan^[3,4] 和 Stahl^[3] 等学者研究了受移动载荷系统的固定圆盘的不稳定性问题. Iwan 和 Moeller^[4]、Hutton^[5] 等和许多其它学者对受固定约束系统的旋转圆盘进行了深入研究,分析了其不稳定性特征. Ono^[6], Chen^[7] 和 Bogy^[7] 等人则针对考虑摩擦力的质量-弹簧-阻尼载荷系统的旋转圆盘,进行了稳定性研究. Shen 和 Mote 的论文可能是第一篇试图解释不稳定性机理的文章,它是以受转动质量-弹簧-阻尼载荷系统的固定圆盘为研究对象的.

总之,以前的学者们并没有对上述旋转圆盘系统的物理机理作出进一步的研究和给出清晰的解释,特别是对于受任意作用力引起的不稳定性机理的研究.因此,本文提出了一个适当的动态模型,这对于理解受任意力作用的旋转圆盘的不稳定性是非常有意义的,同时它还为进一步研究和分析具体

应用对象的不稳定性奠定一个基础,具体应用对象包括圆盘木锯、计算机磁盘、硅芯片切屑刀具、转子系统及金属切削刀具等.

1 运动方程

对于同时受横向和面内作用力的旋转圆盘如图1所示,并用空间坐标系来描述该系统.对该力学模型作如下假定:

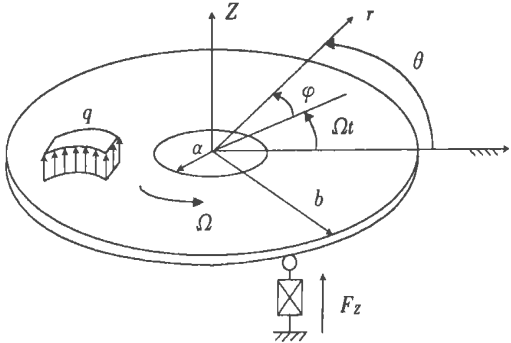


图1 受到横向作用力(q 和 F_z)的旋转圆盘

- (1) 圆盘是匀质的和各向同性的;
- (2) 圆盘的转速是恒定的;
- (3) 圆盘的厚度相对于半径是非常小的;
- (4) 转动惯量和剪切变形较小,可忽略不计;

收稿日期:2002—10—15

作者简介:郭厚[✉](1965—),男,江西吉安人,副教授.

- (5) 线性应变和转角的平方相对于整体较小;
 (6) 绕 z 轴的转角较小忽略不计;
 (7) z 方向上的应力相对于 r 和 θ 方向上的应力非常小.

上述假定可得出如下应变-位移关系:

$$\begin{aligned}\epsilon_{rr} &= \epsilon_{rl} + \epsilon_{rm} \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \epsilon_{\theta l} + \epsilon_{\theta m} \\ \epsilon_{r\theta} &= \epsilon_{\theta l} + \epsilon_{r\theta}\end{aligned}\quad (1)$$

其中:线性表面应变和弯曲应变为^[10]:

$$\begin{aligned}\epsilon_{rl} &= u_{,r} - zw_{,r} \\ \epsilon_{\theta l} &= \frac{1}{r}(u + v_{,\theta}) - \frac{z}{r}(nw_{,r} + w_{,\theta\theta}) \\ \epsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r}(u_{,\theta} - v) + v_{,r} - \frac{2z}{r}(nw_{,r\theta} - w_{,\theta})\end{aligned}\quad (2)$$

其中: u 、 v 和 w 分别是圆盘中面的径向、切向和横向位移.

非线性表面应变表示为:

$$\begin{aligned}\epsilon_{rm} &= \frac{1}{2}w_{,r}^2 \\ \epsilon_{\theta m} &= \frac{1}{2}r^2w_{,\theta}^2 \\ \epsilon_{r\theta m} &= \frac{1}{r}w_{,r}w_{,\theta}\end{aligned}\quad (3)$$

应力-应变关系由下式给出:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{rr} + \nu\epsilon_{\theta\theta}) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{\theta\theta} + \nu\epsilon_{rr}) \\ \tau_{r\theta} &= G\epsilon_{r\theta}\end{aligned}\quad (4)$$

其中 E 和 ν 分别是杨氏模量和泊松比.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

现在需要得到旋转圆盘的动能和势能的表达式.圆盘的势能可表示为:

$$P = \int_0^{2\pi} \int_a^b \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} [\sigma_{rr}\epsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta}\epsilon_{\theta\theta} + \tau_{r\theta}\epsilon_{r\theta} - \rho r \Omega^2 u] dz - q w \right\} r dr d\theta \quad (5)$$

其中, ρ 是圆盘的质量密度, Ω 是圆盘的转速, q 是均匀分布在圆盘上的横向载荷.

圆盘的动能为:

$$T = \int_0^{2\pi} \int_a^b \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} \rho [(w_{,t} + \Omega w_{,\theta})^2 + (u_{,t} + \Omega u_{,\theta})^2 + (v_{,t} + \Omega v_{,\theta} + r\Omega)^2] r dz dr d\theta \quad (6)$$

利用哈密尔顿原理:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - P) dt = 0 \quad (7)$$

将式(5)和式(6)代入式(7),经过一系列的简化过程,可推导出空间坐标系的主导方程和边界条件.

主导方程:

$$D \nabla^4 w + \rho h (w_{,u} + 2\Omega w_{,t\theta} + \Omega^2 w_{,\theta\theta} - \frac{h}{r} [(\sigma_{rr}^* w_{,r})_{,r} + \frac{1}{r} (\sigma_{\theta\theta}^* w_{,\theta})_{,\theta}] - \frac{h}{r} [(\sigma_{rr} w_{,r} + \tau_{r\theta} w_{,\theta})_{,r} + (\tau_{r\theta} w_{,r} + \frac{1}{r} \sigma_{\theta\theta} w_{,\theta})_{,\theta}]) = q(r, \theta, t) \quad (8)$$

$$\rho h (u_{,u} + 2\Omega u_{,t\theta} + \Omega^2 u_{,\theta\theta}) = \sigma_{rr,r} + \frac{1}{r} \tau_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho \Omega^2 r \quad (9)$$

$$\rho h (v_{,u} + 2\Omega v_{,t\theta} + \Omega^2 v_{,\theta\theta}) = \tau_{r\theta,r} + \frac{1}{r} \sigma_{\theta\theta,\theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} \quad (10)$$

其中:

$$\nabla^4 = \left[\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right]^2, \text{ 是双调和因子;}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \text{ 是弯曲刚度.}$$

边界条件:

$$(u, v, w, w_{,r})|_{r=a \text{ 或 } r=b} = 0 \quad (11)$$

$$(\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, M_{rr}, V_r)|_{r=a \text{ 或 } r=b} = 0 \quad (12)$$

其中: V_r 是边界上的横向作用力 ($r = a$ 或 $r = b$):

$$V_r|_{r=a \text{ 或 } r=b} = Q_{rr} + \frac{1}{r} M_{r\theta,\theta}|_{r=a \text{ 或 } r=b} \quad (13)$$

弯曲扭矩 M_{rr} , $M_{r\theta}$ 和剪切力 Q_{rr} 分别为:

$$\begin{aligned}M_{rr} &= -D[w_{,rr} + \frac{\nu}{2}(w_{,\theta\theta} + nw_{,r})] \\ M_{r\theta} &= -D(1-\nu)\frac{1}{r}(nw_{,r\theta} - w_{,\theta}) \\ Q_{rr} &= -D(\nabla^2 w)_{,r}\end{aligned}\quad (14)$$

式(8)~(12)描述了圆盘在三个坐标方向上耦合位移 u 、 v 、 w 的非线性响应.

对于小变形的薄圆盘(即,盘的变形相对于厚度来说是较小的),只需用圆盘横向位移的运动方程即可描述其动态特性.此时,和应力相关的项仅代表由面内作用力引起的应力场,面内作用力包括:面内切削力、转动离心应力和表面应力张力.由此,对于线性情况,式(8)可写成如下形式:

$$L(w) = D \nabla^4 w + \rho h (w_{,u} + 2\Omega w_{,t\theta} + \Omega^2 w_{,\theta\theta}) + L_s(w) + L_a(w) - q(r, \theta, t) = 0 \quad (15)$$

其中:

$$L_s(w) = -\frac{h}{r}[(r\sigma_r^* w, r)_{,r} + \frac{1}{r}(\sigma_\theta^* w, \theta)_{,\theta}] \quad (16)$$

$$L_a(w) = -\frac{h}{r}[(r\sigma_r w, r)_{,r} + (\tau_{\theta w, r} + \frac{1}{r}\sigma_{\theta\theta w, \theta})_{,\theta}] \quad (17)$$

L_s 是和对称应力场相关的膜算子, 对称应力场由离心力、残余应力张力产生; L_a 是和不对称应力场相关的膜算子, 不对称应力场由面内边界力产生, 如面内切削力。

$q(r, \theta, t)$ 代表总的横向作用力, 它可以是单个或多个横向作用力。对于承受固定质量-弹簧-阻尼载荷系统的旋转圆盘, 其横向作用力可以方便地由下式表示:

$$q(r, \theta, t) = -(m\omega_{,u} + c\omega_{,t} + k\omega)\frac{1}{r}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0) \quad (18)$$

其中: $\delta(\cdot)$ 是 delta 函数, (r_0, θ_0) 给出了固定载荷在空间坐标系的位置。 K , m 和 c 分别是刚度、质量和阻尼系数。

一般移动的横向力可表示为:

$$q(r, \theta, t) = \frac{1}{r}\delta(r-r_0(t))\delta(\theta-\theta_0(t))p(t) \quad (19)$$

其中: 作用力为恒力时, $p(t) = p$; 作用力是简谐力时, $p(t) = p\sin(\omega t + \psi)$ 。对于自激振动的情况, $p(t)$ 将会是圆盘位移、速度、加速度的函数。

2 求解方法

主导方程(15)是一个具有复杂边界条件的四阶偏微分方程, 难以得到准确的解析解。本文中, 应用伽辽金方法来进行求解。为此, 将旋转圆盘的横向位移假定为如下展开式形式:

$$w(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \{R_{mn}(r)[C_{mn}(t)\cos(n\theta) + S_{mn}(t)\sin(n\theta)]\} \quad (20)$$

式中 $C_{mn}(t)$ 和 $S_{mn}(t)$ 是待确定的未知函数。 m 和 n 分别表示节圆数和节径数。 $R_{mn}(r)\cos(n\theta)$ 和 $R_{mn}(r)\sin(n\theta)$ 是无约束盘的形函数, 而 $R_{mn}(r)$ 是为满足内、外弯曲边界条件而选定的径向形函数。 $R_{mn}(r)$ 可以近似为贝塞尔函数或多项式函数。这里, 设定 $R_{mn}(r)$ 为 r 的多项式形式:

$$R_{mn}(r) = \sum_{i=1}^5 E_{mni} r^{(m+i-1)} \quad (21)$$

式中 E_{mni} 是由盘外边缘边界条件决定的未知系

数, 一般 $R_{mn}(b) = 1$ 。

为便于叙述, 在(15)式中, 假定仅有一个固定的横向力 P 作用于 (r_0, θ_0) , 一个固定弹簧作用于 (r_c, θ_c) , 且仅有由离心力或张力引起的轴对称应力场(即(16)式)。将式(20)代入式(15), 应用伽辽金步骤:

$$\int_0^{2\pi} \int_a^b {}_a L(w)(R_{ql}\cos l\theta r dr) d\theta = 0 \quad (22)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_a^b {}_a L(w)(R_{ql}\sin l\theta r dr) d\theta = 0 \quad (23)$$

$$(q=0, 1, 2, \dots, M; l=0, 1, 2, \dots, N)$$

可得到如下两个式子:

$$\sum_{m=0}^M \alpha_l [\delta_{qml}^{(1)} \ddot{C}_{ml} + \delta_{qml}^{(2)} \dot{S}_{ml} + \delta_{qml}^{(3)} C_{ml}] + \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M [N_{mnql}^{(1)} C_{mn} + N_{mnql}^{(2)} S_{mn}] = PR_{ql}(r_0)\cos(l\theta_0) \quad (24)$$

$$\sum_{m=0}^M \beta_l [\delta_{qml}^{(1)} \dot{S}_{ml} - \delta_{qml}^{(2)} \dot{C}_{ml} + \delta_{qml}^{(3)} S_{ml}] + \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M [N_{mnql}^{(3)} C_{mn} + N_{mnql}^{(4)} S_{mn}] = PR_{ql}(r_0)\sin(l\theta_0) \quad (25)$$

$$(q=0, 1, 2, \dots, M; l=0, 1, 2, \dots, N)$$

式中:

$$\delta_{qml}^{(1)} = \rho h \pi \int_a^b r R_{ml}(r) R_{ql}(r) dr$$

$$\delta_{qml}^{(2)} = \rho h \pi (2l\Omega) \int_a^b r R_{ml}(r) R_{ql}(r) dr$$

$$\delta_{qml}^{(3)} = D\pi \int_a^b r \left\{ \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - l^2 \right]^2 R_{ml}(r) \right\} R_{ql}(r) dr - h\pi \int_a^b \left\{ \frac{d}{dr} \left[r \delta_{rr} \frac{dR_{ml}(r)}{dr} \right] - \frac{l^2}{r} \delta_{\theta\theta} R_{ml}(r) \right\} R_{ql}(r) dr - l^2 \Omega^2 \delta_{qml}^{(1)}$$

$$N_{mnql}^{(1)} = kR_{mn}(r_c)R_{ql}(r_c)\cos(n\theta_c)\cos(l\theta_c)$$

$$N_{mnql}^{(2)} = kR_{mn}(r_c)R_{ql}(r_c)\sin(n\theta_c)\cos(l\theta_c)$$

$$N_{mnql}^{(3)} = kR_{mn}(r_c)R_{ql}(r_c)\cos(n\theta_c)\sin(l\theta_c)$$

$$N_{mnql}^{(4)} = kR_{mn}(r_c)R_{ql}(r_c)\sin(n\theta_c)\sin(l\theta_c)$$

$$\alpha_l = \begin{cases} 1 & (l \neq 0) \\ 2 & (l = 0) \end{cases}, \quad \beta_l = \begin{cases} 1 & (l \neq 0) \\ 2 & (l = 0) \end{cases}$$

(24)式和(25)式可以写成矩阵形式:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [G]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (26)$$

其中:

$$\{x\} = (C_{00}, C_{10}, \dots, C_{M0}, C_{01}, C_{11}, \dots, C_{M1}, S_{01}, S_{11}, \dots, S_{M1}, \dots, C_{0N}, C_{1N}, \dots, C_{MN}, S_{0N}, S_{1N}, \dots, S_{MN})^T$$

一般, $[M]$ 是实对称的正定矩阵, $[G]$ 是实斜对称矩阵, $[K]$ 是实对称矩阵但不一定是正定的。同时注意到, 矩阵 $[G]$ 和 $[K]$ 是 Ω 或 Ω^2 的函数, 因此, 圆盘系统的动态特性也就取决于旋转速度。

一般线性运动方程(26)可以在状态空间的模态域解耦, 因此就可以计算出在伽辽金空间的响应 $\{x$

(t) }.通过(20)式,可将 $\{x(t)\}$ 转换为 $w(r, \theta, t)$ 形式,从而获得物理空间的响应.

3 小 结

本文以受横向作用力和面内应力场的旋转圆盘为研究对象,推导出了它的弯曲运动方程.方程中,由弯曲产生的应变能和中面的拉伸影响均被考虑进去了,因此,这对于圆盘较大幅值的振动是更符合真实情况的.应用了能量法(哈密尔顿原理),通过系统势能和动能的表达式,来获得主导偏微分运动方程.

参考文献:

[1] C. D. Mote. Stability of Circular Plates Subjected to Moving Loads[J]. Journal of Franklin Institute, 1970, (290): 329~

344.
[2] C. D. Mote. Moving-load Stability of a Circular Plate on a Floating Central Collar[J]. Journal of the Acoustical Society of America 1977, (61): 439~447.
[3] W. D. Iwan, K. J. Stahl. The response of an Elastic Disk with a Moving Mass System[J]. Journal of Applied Mechanics 40, 1973, (40): 445~451.
[4] W. D. Iwan and T. L. Moeller. The stability of a Spinning Elastic Disk with a Transverse Load System[J]. ASME Journal of Applied Mechanics 1976, (43): 485~490.
[5] S. G. Hutton, S. Chonan and B. G. Lehman. Dynamic Response of a Guided Circular Saw[J]. Journal of Sound and Vibration 1987, (112): 527~539.
[6] K. Ono, J. S. Chen and D. B. Bogy. Stability Analysis for the Head-Disk Interface in a Flexible Disk Drive[J]. ASME Journal of Applied Mechanics 1991, (58): 1005~1014.

A Dynamic Model of a Rotating Disc Subjected to Arbitrary Interactive Forces

GUO Hou-kung, XIONG Guo-liang, LI Jun

(School of Mechanical Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: The equations of flexural motion of a rotating disc with transverse interactive forces and in-plane stress fields are derived. The energy approach (Hamilton's principle) is employed to obtain the governing partial differential equation of motion from the expressions of potential and kinetic energies of the system. A set of linear ordinary differential equations in the case of small deflections is determined by application of the Galerkin's method.

Key words: Rotating of DISC; Equations of Motion; Galerkin's Method