文章编号:1005-0523(2003)01-0079-03

轮图的符号边控制数

徐保根

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:给出了所有轮图的符号边控制数.

关 键 词:符号边控制函数;符号边控制数;轮图

中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A

本文所指的图均为无向简单图,文中未说明的符号和术语同文献[1].

设 $G=(V,E)$ 为一个图,对任意 $e=uv\in E$,用 $N[e]=\{u_1v_1\in E\mid u_1=u$ 或者 $v_1=v\}$ 表示 e 在 G 中的闭边邻域,即为 e 的邻边(包括 e)集.

定义 1[2,3] 设 $G=(V,E)$ 为一个非空图,如果存在一个双值函数 $f:E\to\{+1,-1\}$ 使得 $\sum\limits_{e'\in N[e]}f(e')\geqslant 1$ 对任意 $e\in E$ 成立,则称 f 为图 G 的一个符号边控制函数(signed edge domination function),简记为 SEDF.图 G 的符号边控制数定义为 $\gamma'_s(G)=\min\{\sum\limits_{e\in E}f(e)\mid f$ 为图 G 的一个 $SEDF\}$.特别地,对于空图 $\overline{K}_n$,补充定义 $\gamma'_s(\overline{K}_n)=0$.

近些年来,图的控制概念得到了不断延伸和推广,但大多属于图的点控制.文[2]中首先给出了上述图的符号边控制概念,并确定了 m 条边的图的最小符号边控制数.文[2,3,4]中也建立了符号边控制数的界限.然而,到目前为至,除了路、星、圈和完全图外,其它图类尚不知其符号边控制数的确切值.与其它类型的控制数相比较,确定一个给定图的符号边控制数似乎更困难.文[3,4]中提出的一个问题是如何确定轮图和完全二部图的符号边控制数.本文确定了所有轮图的符号边控制数.

用 $W_{n+1}=C_n+K_1$ 表示 $n+1$ 阶轮图(即为 K_1 的唯一顶点邻接 C_n 的每一个顶点而成的图).若 x 为实数,则 $\lceil x\rceil$ 表示不小于 x 的最小整数.

引理 1 设 P_m 为 m 阶路,则存在 $M\subseteq E(P_m)$ 使得:(1) $|M|=\left\lceil\frac{m-1}{3}\right\rceil$;(2) M 中任何两条不同边的端点(在 P_m 中)均是不邻的.

证 记 $E(P_m)=\{v_iv_{i+1}\mid 1\leqslant i\leqslant m-1\}$.取 $M=\{v_iv_{i+1}\mid i\equiv 1(\mathrm{mod}3),1\leqslant i\leqslant m-1\}$即可.证毕.

引理 2 $\gamma'_s(W_{4+1})=4$

证 设 f 为 W_{4+1} 的任意一个 SEDF,不难直接验证:在 f 下,W_{4+1} 中至多有 2 条边标号为 -1,即至少有 6 条边标号为 $+1$.注意到 $|E(W_{4+1})|=8$.证毕.

从定义 1 中,不难直接看出:

引理 3 对任意图 G,均有 $\gamma'_s(G)\equiv|E(G)|(\mathrm{mod}2)$.特殊地,轮图的符号边控制数均为偶数.

为了方便起见,在下文中,我们规定:若 f 为图 G 的一个 SEDF,H 为 G 的子图,则记 $f(H)=\sum\limits_{e\in E(H)}f(e)$.

引理 4 当 n 为奇数时($n\geqslant 3$);$\gamma'_s(W_{n+1})=n-2\left\lceil\frac{n-1}{3}\right\rceil+1$

证 首先,我们证明

$$\gamma'_s(W_{n+1})\geqslant n-2\left\lceil\frac{n-1}{3}+1\right\rceil \tag{1}$$

设 f 为 W_{n+1} 的一个 SEDF 且使得 $\gamma'_s(W_{n+1})=f$

收稿日期:2002-09-01

作者简介:徐保根(1963-),男,江西南昌人,教授.

(W_{n+1}). 将 W_{n+1} 分成圈 C_n 和星 $K_{1,n}$，即 $E(W_{n+1})=E(C_n)\cup E(K_{1,n})$. 对于每一条边 $e\in E(C_n)$，由 SEDF 的定义知 $\sum_{e'\in N[e]}f(e')\geqslant 1$，其中 $N[e]$ 为 e 在 W_{n+1} 中的闭边邻域(包含 3 条 C_n 的边和 2 条 $K_{1,n}$ 的边)，因此，我们有 $\sum_{e\in E(C_n)}\sum_{e'\in N[e]}f(e')\geqslant n$，即 $3f(C_n)+2f(K_{1,n})\geqslant n$. 注意到 $\gamma'_s(W_{n+1})=f(W_{n+1})=f(C_n)+f(K_{1,n})$，即得

$$\gamma'_s(W_{n+1})\geqslant\frac{1}{3}(n+f(K_{1,n}))\qquad(*)$$

显然，$f(K_{1,n})\geqslant -1$(否则，$f(K_{1,n}\leqslant -2$，任取 $e\in E(K_{1,n})$，$\sum_{e'\in N[e]}f(e')\leqslant 0$，矛盾).

(a) 若 $-1\leqslant f(K_{1,n})\leqslant 0$；则对任意 $e\in E(C_n)$，均有 $f(e)=+1$，即 $f(C_n)=n$. 因此，我们有 $\gamma'_s(W_{n+1})=f(W_{n+1})=f(C_n)+f(K_{1,n})\geqslant n-1\geqslant n-2\left\lceil\frac{n-1}{3}\right\rceil+1$，即(1)式成立.

(b)若 $f(K_{1,n})\geqslant 1$；则由(*)式及 $\gamma'_s(W_{n+1})$ 为整数知 $\gamma'_s(W_{n+1})\geqslant\left\lceil\frac{n+1}{3}\right\rceil\geqslant n-2\left\lceil\frac{n-1}{3}\right\rceil$，根据引理 3，$\gamma'_s(W_{n+1})$ 为偶数，注意到 n 为奇数，故 $\gamma'_s(W_{n+1})\geqslant n-2\left\lceil\frac{n-1}{3}\right\rceil+1$，即 (1) 式成立.

结合(a)和(b)，我们证明了(1)式成立.

下面只需要定义 W_{n+1}($n\geqslant 3$ 且为奇数)的一个 SEDF f 使得：

$$f(W_{n+1})=n-2\left\lceil\frac{n-1}{3}\right\rceil+1\qquad(2)$$

成立即可.

当 $n=3$ 时；可以任取 W_{3+1} 中两条边 e_1 和 e_2，定义 $f(e_1)=f(e_2)=-1$，对于其余的 4 条边均定义 f 的值为 $+1$. 可见 $f(W_{3+1})=2$，(2)式成立.

当 $n=5$ 时；记 $W_{5+1}=C_5+K_1$，其中 $V(K_1)=\{v_0\}$，即 v_0 为 W_{5+1} 的中心点，对于 C_5 的顶点，按其在 C_5 上的顺时针方向依次记为 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5. 定义

$f(v_1v_2)=f(v_3v_4)=f(v_4v_5)=f(v_0v_1)=f(v_0v_2)=f(v_0v_4)=+1$

$f(v_1v_5)=f(v_2v_3)=f(v_0v_3)=f(v_0v_5)=-1$

可见，$f(W_{5+1})=6-4=2$，(2)式成立.

当 $n\geqslant 7$ 时(n 为奇数)；记 $W_{n+1}=C_n+K_1$，其中 $V(K_1)=\{v_0\}$，即 v_0 为轮的中心点. 对于 C_n 的顶点，按其在 C_n 上的顺时针方向依次记为 $v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n$. 定义

$f(v_0v_1)=+1,f(v_0v_i)=(-1)^i\quad(i=2,3,\cdots,n)$

$f(v_1v_2)=f(v_2v_3)=f(v_4v_5)=f(v_6v_7)=+1$，$f(v_3v_4)=f(v_5v_6)=-1$

(a)当 $n=7$ 时；补充定义 $f(v_7v_1)=+1$，可见，$f(W_{7+1})=9-5=4$，(2)式成立.

(b)当 $n\geqslant 9$ 时(n 为奇数)；补充定义 $f(v_7v_8)=+1$，至此，W_{n+1} 中未定义 f 值的边共有 $n-7$ 条(均在 C_n 上)，即构成一条路 P_{n-6}. 根据引理 1，存在 $M\subseteq E(P_{n-6})$ 使得 $|M|=\left\lceil\frac{n-7}{3}\right\rceil$ 且 M 中任何两条不同边的端点(在 P_{n-6} 中)均是不邻的. 当 $e\in M$ 时；定义 $f(e)=-1$，当 $e\in E(P_{n-6})\setminus M$ 时；定义 $f(e)=+1$. 可见，$f(W_{n+1})=9-5+(n-7-\left\lceil\frac{n-7}{3}\right\rceil)-\left\lceil\frac{n-7}{3}\right\rceil=n-2\left\lceil\frac{n-1}{3}\right\rceil+1$，(2)式成立.

至此，引理 4 证毕.

引理 5　当 n 为偶数($n\geqslant 6$)时，$\gamma'_s(W_{n+1})=n-2\left\lceil\frac{n-3}{3}\right\rceil$

证　首先我们证明 $\gamma'_s(W_{n+1})\geqslant n-2\left\lceil\frac{n-3}{3}\right\rceil$

$$\qquad(3)$$

与引理 4 的证明完全相同地得到其中的(*)式，即为

$$\gamma'_s(W_{n+1})\geqslant\frac{1}{3}(n+f(K_{1,n}))\qquad(*)$$

由于 n 为偶数，可见 $f(K_{1,n})$ 为偶数. 并且 $f(K_{1,n})\geqslant 0$(否则，$f(K_{1,n})\leqslant --2$，任取 $e\in E(K_{1,n})$，均有 $\sum_{e'\in N[e]}f(e')\leqslant f(K_{1,n})+2\leqslant 0$，与 f 的定义矛盾).

(a)当 $f(K_{1,n})=0$ 时；则不难看出：此时对任意 $e\in E(C_n)$，均有 $f(e)=+1$，即 $f(C_n)=n$，从而有 $\gamma'_s(W_{n+1})=f(W_{n+1})=f(C_n)+f(K_{1,n})\geqslant n\geqslant n-2\left\lceil\frac{n-3}{3}\right\rceil$，(3)式成立.

(b)当 $f(K_{1,n}\geqslant 2$ 时；由(*)式及 $\gamma'_s(W_{n+1})$ 为整数得知 $\gamma'_s(W_{n+1})\geqslant\left\lceil\frac{n+2}{3}\right\rceil$，且容易验证：$\left\lceil\frac{n+2}{3}\right\rceil\geqslant n-2\left\lceil\frac{n-3}{3}\right\rceil-1$(分别讨论，$n\equiv i\pmod 3$，$i=1,2,3$ 即可)，因此，我们有 $\gamma'_s(W_{n+1})\geqslant n-2\left\lceil\frac{n-3}{3}\right\rceil-1$，由引理 3 知，此式左端为偶数而右端为奇数(注意到 n 为偶数)，故有 $\gamma'_s(W_{n+1})\geqslant n-$

$2\left[\frac{n-3}{3}\right]$,(3)式成立.

结合(a)和(b)式,我们证明了(3)式成立.

下面只需要定义 W_{n+1}($n\geqslant 6$ 且为偶数)的一个 SEDF f 使得:

$$f(W_{n+1})=n-2\left[\frac{n-3}{3}\right] \tag{4}$$

成立即可.

当 $n=6$ 时;记 $W_{6+1}=C_6+K_1$ 的中心点为 v_0,即 $V(K_1)=\{v_0\}$,其圈 C_6 上的点按顺时针方向依次记为 $v_1,v_2,\cdots,v_6$,定义:$f(v_0v_2)=+1$,$f(v_0v_i)=(-1)^{i+1}$(当 $i\neq 2$ 时),$f(v_6v_1)=f(v_2v_3)=-1$,$f(v_1v_2)=f(v_3v_4)=f(v_4v_5)=f(v_5v_6)=+1$. 易见 $f(W_{6+1})=8-4=4$,即(4)式成立.

当 $n\geqslant 8$(n 为偶数)时;同样地,记 $W_{n+1}=C_n+K_1$ 的中心点为 v_0,即 $V(K_1)=\{v_0\}$,其圈 C_n 上的点(按顺时针方向)依次记为 $v_1,v_2,\cdots,v_n$,定义 f 如下:$f(v_0v_1)=f(v_0v_2)=f(v_0v_4)=f(v_0v_6)=f(v_0v_7)=+1$,$f(v_0v_3)=f(v_0v_5)=-1$,当 $i\geqslant 8$ 时 $f(v_0v_i)=(-1)^{i+1}$,由于 n 为偶数,故 $f(K_{1,n})=2$. 定义 $f(v_1v_2)=f(v_3v_4)=f(v_4v_5)=f(v_6v_7)=+1$ 且 $f(v_2v_3)=f(v_5v_6)=-1$,至此,未定义 f 值的 $n-6$ 条边(均在 C_n 上)构成一条路,根据引理 1,存在 $M\subseteq E(P_{n-5})$ 使得:$|M|=\left[\frac{n-6}{3}\right]$ 且 M 中任何两条不同边的端点(在 P_{n-5} 中)均是不邻的. 当 $e\in M$ 时定义 $f(e)=-1$,当 $e\in E(P_{n-5})\setminus M$ 时定义 $f(e)=+1$. 可见

$$f(W_{n+1})=f(K_{1,n})+f(C_n)=2+4-2+n-6-\left[\frac{n-6}{3}\right]-\left[\frac{n-6}{3}\right]=n-2\left[\frac{n-3}{3}\right]$$,即(4)式成立. 引理 5 证毕.

综合引理 2 和引理 4～5,我们已经确定了所有轮图的符号边控制数,即有

定理　对所有整数 $n\geqslant 3$,则

$$\gamma'_s(W_{n+1})=\begin{cases}4 & n=4\\ n-2\left[\frac{n-3}{3}\right] & n\text{ 为偶数}(n\neq 4)\\ n-2\left[\frac{n-1}{3}\right]+1 & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

顺便指出:对于完全二部图 $K_{m,n}$,虽然在文[4]中建立了 $\gamma'_4(K_{m,n})$的界限,但其确切值尚未确定,有待进一步探讨.

参考文献:

[1] Bondy. J. A. and Murty. U. S. R., Graph theory with applications[M]. Macmillan, London, 1977.

[2] Baogen Xu, On signed edge domination numbers of graphs[J]. Discrete Math. 239 (2001) 179～189.

[3] 徐保根,曾　毅. 关于图的符号边控制数的上界[J]. 华东交通大学学报, 2002(1): 75～77.

[4] 徐保根. 图的符号边控制数的下界[J]. 系统科学与数学. (待发表).

Signed Edge Domination Numbers for Wheels

XU Bao-gen

(School of Natural Science, East China Jiaotong Univ., Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper we give the signed edge domination numbers for all wheels.

Key words: signed edge domination function; signed edge domination number; wheel.