

文章编号: 1005—0523(2003)01—0086—03

混合单调算子对的公共不动点定理

盛梅波¹, 董祥南²

(1. 华东交通大学 基础科学学院 南昌 330013; 2. 江西师范大学 数学系 南昌 330027)

摘要: 利用一种非对称迭代格式进一步研究了一类混合单调算子对的公共不动点的存在性、唯一性, 并得出此迭代的误差估计.

关 键 词: 混合单调算子; 正规锥; 公共不动点

中图分类号: O189.2

文献标识码: A

1 引 言

迭代逼近的方法是处理非线性问题的基本工具之一, 特别是对于在适当的序条件下的非线性单调算子问题应用迭代方法得出了许多好的结果(见文^{[1][2][3]}等), 本文利用一种非对称迭代格式进一步研究了一类混合单调算子对的公共不动点的存在性、唯一性, 并得出此迭代的误差估计.

以下总假定 E 是一个实 Banach 空间, P 是 E 中正规锥, N 为 P 的正规常数, 半序“ $\leq$ ”是由锥 P 诱导的.

定义 1 设 $x_0 \in E, y_0 \in E$, 有 $x_0 < y_0$, 称集合 $[x_0, y_0] = \{x \mid x_0 < x < y_0\}$ 为 E 中的序区间.

定义 2 设非空集合 $D \subset E$, 算子 $A: D \times D \rightarrow E$ 称为混合单调算子, 如果

(I) 对每个固定的 $y \in D, A(x, y)$ 在 D 上关于 x 是单调递增的;

(II) 对每个固定的 $x \in D, A(x, y)$ 在 D 上关于 y 是单调递减的;

定义 3 设 $A: D \times D \rightarrow E$ 是 D 上的算子, 如果

(I) 如果存在 $x \in D, y \in D, x \leq y$, 使得 $A(x, y) = x, A(y, x) = y$ 则称 (x, y) 是算子 A 在 D 上的一个耦合不动点.

(II) 如果存在 $x_* \in D$ 使得, 使得 $A(x_*, x_*) = x_*$, 则称 $x = x_*$ 是算子 A 在 D 上的一个不动点.

2 主要结果

定理 1 设 $A, B: [x_0, y_0] \times [x_0, y_0] \rightarrow E$ 的两个混合单调算子, 若 A 在 $[x_0, y_0]$ 上是连续算子, 且存在常数 $\alpha, \beta \in (0, 1), \alpha + \beta < 1$, 满足下列两个条件:

(I) $x_0 + \alpha(y_0 - x_0) \leq B(x_0, y_0) \leq A(y_0, x_0) \leq y_0$;

(II) $\theta \leq A(y, x) - B(x, y) \leq \beta(y - x)$, 当 $x_0 \leq x < y \leq y_0$ 时;

(III) $B(y, x) \leq A(y, x)$, 当 $x_0 \leq x < y \leq y_0$ 时. 则混合单调算子对 $A(x, y) = z, B(x, y) = z$ 在 $[x_0, y_0]$ 上有唯一的公共不动点 z_0 .

构造迭代格式:

$$\begin{cases} x_{n+1} = B(x_n, y_n) - \alpha(y_n - x_n) \\ y_{n+1} = A(y_n, x_n) \end{cases}, n = 0, 1, 2, \dots$$

都收敛于 z_0 , 且有误差估计式

$$\begin{cases} \|x_n - z_0\| \leq N(\alpha + \beta)^n \|y_0 - x_0\| \\ \|y_n - z_0\| \leq N(\alpha + \beta)^n \|y_0 - x_0\| \end{cases}$$

证明 1° 由数学归纳法验证

收稿日期: 2002—09—25

作者简介: 盛梅波(1966—), 男, 江西波阳人, 华东交通大学副教授, 硕士.

$$x_{n-1} \leq x_n \leq y_n \leq y_{n-1} \quad (1)$$

事实上, $n=1$ 时, 由条件(I)得

$$x_0 \leq B(x_0, y_0) - \alpha(y_0 - x_0) = x_1 \\ < B(x_0, y_0) \leq A(y_0, x_0) = y_1 \leq y_0,$$

式(1)成立.

假设 $n=k$ 时式(1)成立, 即有

$$x_{k-1} \leq x_k \leq y_k \leq y_{k-1}$$

$$\text{从而有 } \alpha(y_k - x_k) \leq \alpha(y_{k-1} - x_{k-1})$$

又由于 B 是 D 上混合单调算子, 则 $B(x_{k-1}, y_{k-1}) \leq$

$$B(x_k, y_{k-1}) \leq B(y_k, x_k),$$

当 $n=k+1$ 时, 由归纳假设得

$$x_k \leq B(x_{k-1}, y_{k-1}) - \alpha(y_{k-1} - x_{k-1}) \\ \leq B(x_{k-1}, y_{k-1}) - \alpha(y_k - x_k) \\ \leq B(x_k, y_k) - \alpha(y_k - x_k) = x_{k+1} \\ < B(x_k, y_k) \leq A(y_k, y_k) = y_{k+1} \\ \leq A(x_{k-1}, y_k) \leq A(y_{k-1}, x_k) \\ \leq A(y_{k-1}, x_{k-1}) = y_k$$

式(1)成立.

2° 下面证明 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 是 E 中的 Cauchy 序列.

由 1° 和条件(II)以及 A, B 的混合单调性得

$$\theta \leq y_n - x_n \\ = A(y_{n-1}, x_{n-1}) - B(x_{n-1}, y_{n-1} + \alpha(y_{n-1} - x_{n-1}))$$

$$\leq \beta(y_{n-1} - x_{n-1}) + \alpha(y_{n-1} - x_{n-1}) \\ = (\alpha + \beta)(y_{n-1} - x_{n-1})$$

继续可得

$$\theta \leq y_n - x_n \\ \leq (\alpha + \beta)(y_{n-1} - x_{n-1}) \\ \leq (\alpha + \beta)^2(y_{n-2} - x_{n-2}) \\ \leq \dots \\ \leq (\alpha + \beta)^n(y_0 - x_0)$$

根据 P 的正规性得

$$\|y_n - x_n\| \leq N(\alpha + \beta)^n \|y_0 - x_0\| \quad (2)$$

又

$$\theta \leq x_{n+m} - x_n \leq y_{n+m} - x_n \\ \leq (\alpha + \beta)^m(y_0 - x_0) \\ \theta \leq y_n - y_{n+m} \leq y_n - x_{n+m} \\ \leq (\alpha + \beta)^m(y_0 - x_0)$$

故

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq N(\alpha + \beta)^m \|y_0 - x_0\|$$

$$\|y_n - y_{n+m}\| \leq N(\alpha + \beta)^m \|y_0 - x_0\|$$

因此 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 是 E 中的 Cauchy 序列.

3° 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bar{y}$, $\bar{x} = \bar{y} = z_0$ 就是 A, B 的公共不动点.

由(1)式得

$$x_n \leq \bar{x} \leq \bar{y} \leq y_n, \theta \leq \bar{y} - \bar{x} \leq y_n - x_n$$

根据 P 的正规性得 $x_0 \leq \bar{y} = \bar{x} = z_0 \leq y_0$

由条件(III)得,

$$x_n < B(x_n, y_n) \leq B(z_0, z_0) \leq B(y_n, x_n) \\ \leq A(y_n, x_n) = y_{n+1} \leq y_n \quad (3)$$

因此 $\theta \leq B(z_0, z_0) - x_n \leq y_n - x_n$

根据 P 的正规性得

$$\|B(z_0, z_0) - z_0\| \leq \|B(z_0, z_0) - x_0 - x_n\| + \|x_n - z_0\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

即 $B(z_0, z_0) = z_0$

另一方面 A 在 $[x_0, y_0]$ 上连续, 故 $z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} A(y_n, x_n) = A(z_0, z_0)$

综合之, z_0 是 A, B 的公共不动点.

4° z_0 是唯一的. 设 $z' \neq z_0$ 也是 A, B 在 $[x_0, y_0]$ 上的公共不动点, 则

$$x_1 < x_1 + \alpha(y_0 - x_0) = B(x_0, y_0) \\ \leq B(z', z') = z' \leq B(y_0, x_0) \\ \leq A(y_0, x_0) = y_1$$

由数学归纳法得 $x_n \leq z' \leq y_n$. 从而 $z' = z_0$.

最后, 在(2)式中令 $n \rightarrow \infty$ 便可得到误差估计式. 证毕

注意: 在定理 1 中算子 A 的连续性不可缺少.

例 1 $E = (-\infty, +\infty)$, $P = [0, +\infty]$, 算子 $A, B: \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \rightarrow E$,

$$A(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(x - y) & x > y \\ 0 & x \geq y \end{cases} \quad \text{与 } B(x,$$

$$y) = \frac{3}{4}, \forall x, y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

可以验证 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$, A 不连续, 但 A, B 满足定理 1 中的其它条件, 显然 $A(x, x) = 0 \neq \frac{3}{4} = B(x, x)$, 不可能存在公共不动点.

推论 1 设 $A: [x_0, y_0] \times [x_0, y_0] \rightarrow E$ 的连续混合单调算子, 且存在常数 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, 使得

$$(I) \quad x_0 + \alpha(y_0 - x_0) \leq A(y_0, x_0) \leq y_0;$$

(II) $\theta \leq A(y, x) - B(x, y) \leq \alpha(y - x)$, 当 $x_0 \leq x < y \leq y_0$ 时.

则 $A(x, y)$ 在 $[x_0, y_0]$ 上有唯一的不动点 z_0 .

构造迭代格式:

$$\begin{cases} x_{n+1} = A(x_n, y_n) - \alpha(y_n - x_n), \\ y_{n+1} = A(y_n, x_n) \end{cases},$$

$n=0, 1, 2, \dots$.

都收敛于 z_0 , 且有误差估计式

$$\begin{cases} \|x_n - z_0\| \leq N(\alpha + \beta)^n \|y_0 - x_0\| \\ \|y_n - z_0\| \leq N(\alpha + \beta)^n \|y_0 - x_0\| \end{cases}.$$

将定理 1 的条件 (II) 加强后, 算子 A 的连续性可以去掉.

定理 2 设 $A, B: [x_0, y_0] \times [x_0, y_0] \rightarrow E$ 的两个混合单调算子, 若存在常数 $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $\alpha + \beta < 1$, 满足下列两个条件:

(I) $x_0 + \alpha(y_0 - x_0) \leq B(x_0, y_0) \leq A(y_0, x_0) \leq y_0$;

(II) $\theta \leq A(y, x) - B(x, y) \leq \beta(y - x)$, 当 $x_0 \leq x < y \leq y_0$ 时.

则混合单调算子对 $A(x, y) = z, B(x, y) = z$ 在 $[x_0, y_0]$ 上有唯一的公共不动点 z_0 .

构造迭代格式:

$$\begin{cases} x_{n+1} = B(x_n, y_n) - \alpha(y_n - x_n), \\ y_{n+1} = A(y_n, x_n) \end{cases},$$

$n=0, 1, 2, \dots$.

都收敛于 z_0 , 且有误差估计式:

$$\begin{cases} \|x_n - z_0\| \leq N(\alpha + \beta)^n \|y_0 - x_0\| \\ \|y_n - z_0\| \leq N(\alpha + \beta)^n \|y_0 - x_0\| \end{cases}.$$

证明 类似于定理 1 的证明, 只需在 (3) 式变为

$$\begin{aligned} x_n &< B(x_n, y_n) \leq B(z_0, z_0) \leq A(z_0, z_0) \\ &\leq A(y_n, x_n) = y_{n+1} \leq y_n(3') \text{ 即可.} \end{aligned}$$

例 2 $E = (-\infty, +\infty)$, $P = [0, +\infty)$, 算子

$$A, B: \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \rightarrow E,$$

$$A(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(x - y) & x \geq y \\ 0 & x < y \end{cases}$$

$$\text{与 } B(x, y) = \frac{3}{4}, \forall x, y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

则 A, B 有唯一的公共不动点 $z_0 = \frac{3}{4}$.

定理 3 设 $A, B: [x_0, y_0] \times [x_0, y_0] \rightarrow E$ 的两个混合单调算子, 若存在常数 $\beta \in (0, 1)$, 满足下列两个条件:

(I) $x_0 \leq B(x_0, y_0) \leq A(y_0, x_0) \leq y_0$;

(II) $\theta \leq A(y, x) - B(x, y) \leq \beta(y - x)$, 当 $x_0 \leq x < y \leq y_0$ 时.

则混合单调算子对 $A(x, y) = z, B(x, y) = z$ 在 $[x_0, y_0]$ 上有唯一的公共不动点.

构造迭代格式:

$$\begin{cases} x_{n+1} = B(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = A(y_n, x_n) \end{cases}, n=0, 1, 2, \dots$$

都收敛于 z_0 , 且有误差估计式:

$$\begin{cases} \|x_n - z_0\| \leq N\beta^n \|y_0 - x_0\| \\ \|y_n - z_0\| \leq N\beta^n \|y_0 - x_0\| \end{cases}.$$

事实上类似于定理 1 的证明:

$$x_{n-1} \leq x_n \leq y_n \leq y_{n-1} \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$\theta \leq y_n - x_n$$

$$= A(y_{n-1}, x_{n-1}) - B(x_{n-1}, y_{n-1})$$

$$\leq \beta(y_{n-1} - x_{n-1}).$$

于是结论成立.

参考文献:

- [1] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1985.
- [2] Li Guozhen, Dong Xiangnan. Fixed point theorems of set-valued quasi-increasing operator [J]. Applied Functional Analysis, International Academic Press, 1, 1993, 126~132.
- [3] 董祥南. 耦合不动点定理及其应用[J]. 江西师范大学学报(自然版), Vol 17, 1993(2), 109~115.

Common Fixed Point Theorems of Some Comple Mixed Monotone Operators

SHENG Mei-bo¹, DONG Xiang-nan²

(1. School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013; 2. Department of Mathematics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330027)

Abstract: In this paper, the comple mixed monotone operator is studied, and existence, uniqueness and iteration of common fixed point on comple mixed monotone operator are obtained.

Key words: Mixed montone operator, Normal cone, Common fixed point