

文章编号: 1005—0523(2003)01—0089—05

一个新的与 Fermat 问题相关的几何不等式

刘 健¹, 褚小光²

(1. 华东交通大学 土木建筑学院, 江西 南昌 330013; 2. 上海华源步云有限公司 上海 200001)

摘要:应用 Fermat 问题的结论, 给出了平面上任一点到三角形三顶点距离之和的一个新下界, 指出了它的应用, 提出了四个有关三角形的不等式猜想.

关 键 词:三角形; 不等式; 点

中图分类号: O178

文献标识码: A

1 引 言

17 世纪的法国业余数学家之王 P. Fermat (费马) 曾向伽利略的著名学生托里拆里提出以下有趣的著名问题(见[1]): 在 $\triangle ABC$ 的平面上求一点 P , 使 P 点到 $\triangle ABC$ 三顶点的距离之和为最小. 托里拆里用好几种方法解决了这一问题, 得到结论: 当 $\triangle ABC$ 的最大内角小于 120° 时, 则在形内存在一点 P 使 $\angle BPC = \angle CPA = \angle APB = 120^\circ$, 这点即是使 $PA + PB + PC$ 为最小的点; 当 $\triangle ABC$ 的最大内角不小于 120° 时, 则当 P 为最大内角所在的顶点时, $PA + PB + PC$ 为最小.

如设 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 与面积分别为 a, b, c, Δ , 则易知上述 Fermat 问题的结论可表述为下面的不等式(参见[2]):

(I) 当 $\max(A, B, C) < 120^\circ$ 时, 有

$$PA + PB + PC \geq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)/2 + 2\sqrt{3}\Delta}; \quad (1)$$

(II) 当 $A \geq 120^\circ$ 时, 有

$$PA + PB + PC \geq b + c. \quad (2)$$

以上两个不等式是按条件给出的, 缺乏一般性, 对于任意三角形, 如何用三角形的常见元素来给出和式 $PA + PB + PC$ 的下界? 这是一个有趣的几何不等式问题.

1935 年, M. Schreiber 首先建立了以下不等式^[2]:

$$PA + PB + PC \geq 6r, \quad (3)$$

其中 r 为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径, 但上式很弱, 两年后, U. T. Bodewadt 给出了更强式^[2]:

$$PA + PB + PC \geq 2\sqrt{3}\Delta. \quad (4)$$

1987 年, W. Janous 应用微积建立了与和式 $PA + PB + PC$ 相关的不等式^[3]:

$$(PA + PB + PC)(1/a + 1/b + 1/c) > 5, \quad (5)$$

其中常数下界 5 为最佳值.

收稿日期: 2002—05—20

作者简介: 刘健(1963—), 男, 江西兴国人, 助理研究员.

1991 年, 陈计与楼红卫则证明了不等式^[4]:

$$(PA + PB + PC) \sqrt{1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2} \geq 9. \quad (6)$$

1993 年, 刘健应用林鹤一不等式证得了强于不等式(4)的以下结果^[5]:

$$PA + PB + PC \geq \sqrt{2bc + 2ca + 2ab - a^2 - b^2 - c^2}. \quad (7)$$

以上是有关和式 $PA + PB + PC$ 的一类不等式研究的大致情况. 应当指出的是, 尽管推导这类不等式的方法有所不同, 但目前还没有一个结果是最强的. 因此, 寻求和式 $PA + PB + PC$ 新的下界仍是值得研究的.

2 主要结果及其证明

在本文中, 我们将根据 Fermat 问题的结论, 也即按不等式(1)、(2)来建立一个新的有关 $PA + PB + PC$ 的线性不等式, 并由之推证几个稍弱的不等式.

我们获得的主要结果可表述如下:

定理 设 $\triangle ABC$ 内切圆半径为 r , 相应于边 a, b, c 上的中线分别为 m_a, m_b, m_c , 则对任一点 P 有

$$PA + PB + PC \geq (m_a + m_b + m_c + 3r)/2, \quad (8)$$

等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形且 P 为其中心时成立.

为证上述结论, 先给出几个两个引理.

引理 1^[6] 设 $\triangle ABC$ 的半周长与外接圆半径分别为 s, R , 其余符号同上, 则

$$(m_a + m_b + m_c)^2 \leq 4s^2 - 16Rr + 5r^2, \quad (9)$$

等号仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

引理 2 符号同上, 则在 $\triangle ABC$ 中有

$$(I) \quad m_a + m_b + m_c \leq 4R + r; \quad (10)$$

$$(II) \quad m_a + m_b + m_c + 3r \leq \frac{4}{\sqrt{3}}s, \quad (11)$$

等号均仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

证明 (I) 按中线公式 $2m_a = \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$, 容易验证恒等式:

$$16(m_b m_c)^2 = (2a^2 + bc)^2 + 2(a + b + c)(b + c - a)(b - c)^2$$

$$4m_b m_c \leq 2a^2 + bc \quad (12)$$

从而知

于是利用等式 $4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$, 可知

$$(m_a + m_b + m_c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)/4 + (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + bc + ca + ab)/2$$

$$= [7(a^2 + b^2 + c^2) + 2(bc + ca + ab)]/4$$

因此, 欲证(11)只要证:

$$7(a^2 + b^2 + c^2) + 2(bc + ca + ab) \leq (4R + r)^2. \quad (13)$$

应用恒等式:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(s^2 - 4Rr - r^2), \quad (14)$$

$$bc + ca + ab = s^2 + 4Rr + r^2, \quad (15)$$

可将(13)式化为 $s^2 \leq 4R^2 + 5Rr + r^2$, 则 $s^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2 + r(R - 2r)$. 由重要的 Gerretsen 不等式^[2]: $s^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ 与 Euler 不等式 $R \geq 2r$ 易知这是成立的, 于是不等式(11)得证.

(II) 显然, 欲证(11)只要证:

$$3(m_a + m_b + m_c)^2 + 18r(m_a + m_b + m_c) + 27r^2 \leq 16s^2. \quad (16)$$

按(9)、(10)即知

$$3(m_a + m_b + m_c)^2 + 18r(m_a + m_b + m_c) + 27r^2$$

$$\leq 3(4s^2 - 16Rr + 5r^2) + 18r(4R + r) + 27r^2$$

$$= 12s^2 + 24Rr + 60r^2$$

于是证(16)只要证 $4s^2 \geq 24Rr + 60r^2$, 也即 $4(s^2 - 16Rr + 5r^2) + 40r(R - 2r) \geq 0$, 根据 Gerretsen 不等式^[2]: $s^2 \geq 16Rr - 5r^2$ 与 Euler 不等式 $R \geq 2r$ 可知这式成立, 从而(11)得证.

注: 不等式(10)即为专著[2]中的不等式 8.2, 但[2]中的证明只适合于非钝角三角形, 以上证明则适于任意三角形.

定理的证明 下面根据 Fermat 问题的结论来完成证明.

(I) 当 $\max(A, B, C) < 120^\circ$ 时, 根据不等式(1), 只要证下式:

$$\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)/2 + 2\sqrt{3}\Delta} \geq (m_a + m_b + m_c + 3r)/2,$$

由 $\Delta = rs$ 与恒等式(14)即知上式等价于

$$4(s^2 - 4Rr - r^2 + 2\sqrt{3}rs) \geq (m_a + m_b + m_c + 3r)^2,$$

$$\text{即 } (m_a + m_b + m_c)^2 + 6r(m_a + m_b + m_c) \leq 4s^2 - 16Rr + 5r^2 - 18r^2 + 8\sqrt{3}rs.$$

按引理 1 即知, 要证上式只要证:

$$4s^2 - 16Rr + 5r^2 < 4(b+c)^2 - 12r(b+c) + 9r^2,$$

$$\text{即 } 4(b+c)^2 + 16Rr + 4r^2 - 4s^2 > 12r(b+c).$$

由 $2s = (a+b+c)$ 与恒等式 $16Rr + 4r^2 = 2bc + 2ca + 2ab - a^2 - b^2 - c^2$ 知上式等价于

$$2b^2 + 2c^2 + 8bc - 2a^2 > 12(b+c)r,$$

$$\text{这等价于 } 3(a+b+c)(b+c-a) + (c+a-b)(a+b-c) > 12r(b+c). \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{由于} \quad & 3(a+b+c)(b+c-a) + (a+b-c)(c+a-b) \\ & > 2\sqrt{3(a+b+c)(b+c-a) \cdot (a+b-c)(c+a-b)} \\ & = 8\sqrt{3s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ & = 8\sqrt{3}rs, \end{aligned}$$

因此, 要证不等式(17)只要证 $8\sqrt{3}s > 12(b+c)$, 即要证

$$a+b+c > \sqrt{3}(b+c). \quad (18)$$

当 $A \geq 120^\circ$ 时, 按余弦定理知 $a^2 \geq b^2 + c^2 + bc$, 从而易证 $2a \geq \sqrt{3}(b+c)$, 由此即知(18)成立. 于是不等式(17)在 $\max(A, B, C) > 120^\circ$ 时成立.

综上, 定理的不等式(8)得证, 其等号成立的条件是很易确定的.

3 三个弱化的结论

在这一节中, 我们从不等式(8)出发可证明三个弱化的不等式.

结论 1 设 $\triangle ABC$ 相应于边 a, b, c 上的高线分别为 h_a, h_b, h_c , 其余符号同上, 对 $\triangle ABC$ 与任一点 P 有

$$PA + PB + PC \geq (m_a + m_b + m_c + h_a + h_b + h_c)^2/3. \quad (19)$$

不等式(19)在形式上较不等式(8)更为优美, 它显然要强于不等式:

$$PA + PB + PC \geq 2(h_a + h_b + h_c)/3. \quad (20)$$

但与陈计、楼红卫猜测成立的不等式^[7]:

$$PA + PB + PC \geq 2(w_a + w_b + w_c)/3, \quad (21)$$

(其中 w_a, w_b, w_c 为 $\triangle ABC$ 相应边上的内角平分线)不分强弱.

比较不等式(8)与不等式(4)的强弱时, 我们还发现由(8)可推得下述结论:

结论 2 符号同上, 则对 $\triangle ABC$ 与任意一点 P 有

$$PA + PB + PC \geq s\sqrt{3} + 3r. \quad (22)$$

根据不等式(22)又可进一步得

结论 3 符号同上, 则对 $\triangle ABC$ 与任一点 P 有

$$PA + PB + PC \geq 2(m_a/h_a + 2)r. \quad (23)$$

由不等式(23)易知

$$PA + PB + PC \geq (b^2 + 4bc + c^2)/(bc).$$

进一步我们发现上式还可加强如下:

结论 4 符号同上, 则对 $\triangle ABC$ 与任一点 P 有

$$PA + PB + PC \geq 3r(\sqrt{b/c} + \sqrt{c/b})^2/2 \quad (24)$$

不等式(24)较弱, 它与 U.T.B odewadt 的不等式(4)是不分强弱的.

应当指出的是, 尽管结论 1—结论 4 的不等式要弱于不等式(8), 但要直接证明它们并非容易.

4 注记与猜想

众所周知, 相关不等式之间强弱的关系是值得重视的. 在这一节中, 我们将指出前面一些不等式之间的强弱关系, 同时提出相关的几个尚待解决的猜想.

本文的主要结果不等式(8)强于不等式(3)是显然的, 但不等式(8)与 Bodewadt 不等式(4)的强弱关系不易看出, 通过其弱化的不等式(25)即易知不等式(8)要强于不等式(4). 不等式(8)与不等式(5)–(7)诸不等式相比是不分强弱的. 另外在此指出, 由已知的三角形不等式见[9]:

$$(2bc + 2ca + 2ab - a^2 - b^2 - c^2)(1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2) \geq 9, \quad (25)$$

可见不等式(7)要强于不等式(6). 利用恒等式(14)、(15)易证上式等价于

$$(2bc + 2ca + 2ab - a^2 - b^2 - c^2)(1/a + 1/b + 1/c)^2 \geq 25 + 4r/R. \quad (26)$$

据此又知不等式(7)强于 Janous 不等式(5). 确切地说, 由(7)、(26)两式易知不等式(5)可加强为

$$(m_a + m_b + m_c + h_a + h_b + h_c)^2 \geq 36\sqrt{3}\Delta \quad (27)$$

如果上式成立, 则知不等式(19)也要强于不等式(4).

不等式(19)还很有可能强于等式(28), 为此提出以下

猜想 2 在 $\triangle ABC$ 中有

$$m_a + m_b + m_c + h_a + h_b + h_c \geq 6(m_a/h_a + 2)r. \quad (28)$$

由不等式(24)作类比, 并经计算机验证提出

猜想 3 符号同上, 则对 $\triangle ABC$ 与任一点 P 有

$$PA + PB + PC \geq 3r(\sqrt{m_b/m_c} + \sqrt{m_c/m_b})^2/2. \quad (29)$$

最后, 我们提出一个类似于不等式(28)的猜想来结束本文.

猜想 4 对 $\triangle ABC$ 与任一点 P 有

$$PA + PB + PC \geq 2(m_b/h_b + m_c/h_c + 1)r. \quad (30)$$

参考文献:

- [1] [德国]H. 德里著, 100 个著名初等数学问题—历史和解[M]. 上海科学技术出版社, 1980 年.
- [2] [荷兰]O. Bottema 等著, 单尊译, 北京: 北京大学出版社, 1991, 9.
- [3] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić and V. Volenec. Recent Advances in Geometric Inequalities. Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [4] 陈 计, 楼红卫. 问题征解解答[J]. 数学通讯, 11(1989), 41.
- [5] 刘 健. 三个新的三角形不等式[M]. 教学月刊, 8(1993), 1~4.
- [6] 褚小光, 杨学技. 关于三角形中线的若干不等式, 不等式研究[M]. 拉萨: 西藏人民出版社, 2000, 6.
- [7] 陈 计, D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, V. Voenec, Ji Chen. Addenda to the monograph "Recent Advances in Geometric Inequalities", Part I, 宁波大学学报(理工版), 1991, 2, 79~145.
- [8] 杨学技, Shc73 的证明, 不等式研究[M]. 拉萨: 西藏人民出版社, 2000, 6.

A New Geometry Inequality with The Fermat Problem

LIU Jian¹, CHU Xiao-guang²

(1. East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 2. Huayuan Bu Yun Limited Company, Shanghai 200001, China)

Abstract: By using of the conclusions of the Fermat problem, we obtained a new lower bound for sum of distance from any point in a triangle plane to three vertices, some applications are given and four conjectures are put forward.

Key words: triangle; inequality; point

我校人文社会科学研究获江西省优秀成果奖

我校四项人文社会科学研究荣获江西省第十次社会科学优秀成果奖. 获奖名单如下:

二等奖获得者: 刘小丽 南昌铁路局货源组织与预测相关问题研究

三等奖获得者: 徐佩华 对社会主义事业长期性和实现模式多样性的探讨

张 诚 转型改制中女性就业研究

邓卫权 田径专修男生标枪技评量化标准与方法的初步研究

科研处 黄少援

2003. 1. 10