文章编号:1005－0523(2003)01－0097－03

$\mathrm{d}\varepsilon(t)/\mathrm{d}t=\delta(t)$在时域分析中的应用

刘子英

(华东交通大学 电气电子工程学院,江西 南昌 330013)

摘要:通过对 $\mathrm{d}\varepsilon(t)/\mathrm{d}t=\delta(t)$ 证明的分析,本文得出了在时域范围内,状态变量求导时,使用 $\mathrm{d}\varepsilon(t)/\mathrm{d}t=\delta(t)$ 的条件;并且给出了具有跳跃间断点函数求导的简单方法.

关 键 词:时域分析;单位阶跃函数;单位冲击函数;冲击强度

中图分类号:TM131　　　　**文献标识码**:A

1　问题的提出

单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 与单位冲击函数 $\delta(t)$ 均为奇异函数,用单位阶跃函数可以简洁地表示电路的激励与响应,因此在《电路分析》、《信号与系统》中得到广泛的应用.

如图1(a)所示为一简单一阶 RL 电路的电感电流与电压的响应,由三要素法可得:

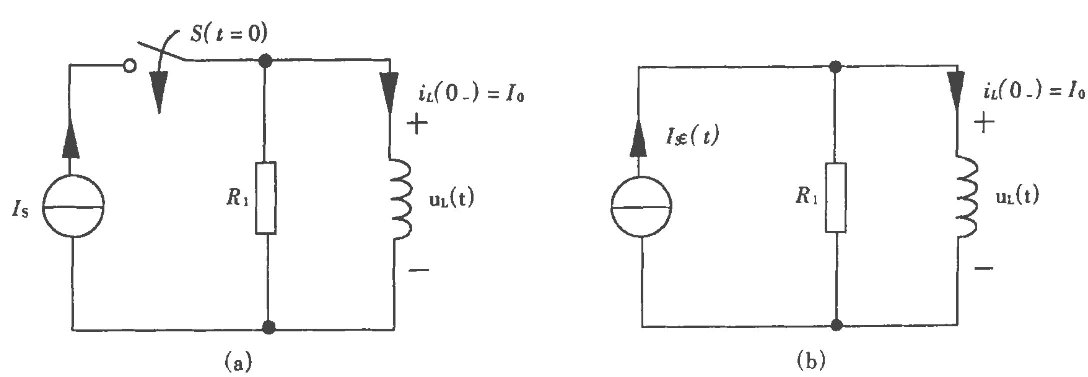

图1

$$i_L(t)=I_s+(I_0-I_s)e^{-\frac{R}{L}t}\quad (t\leqslant 0)$$

$$u_L(t)=R(I_s-I_0)e^{-\frac{R}{L}t}\quad (t\geqslant 0)$$

如果用单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 表示该电路的激励与响应,则图1(a)可改画成图1(b)所示,可省去一个开关,只要把电流源表示成 $I_s\varepsilon(t)$ 即可,相应地电感电流和电压的响应可表示为:

$$i_L(t)=[I_s+(I_0-I_s)e^{-\frac{R}{L}t}]\varepsilon(t)\tag{1}$$

$$u_L(t)=R(I_s-I_0)e^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)\tag{2}$$

利用(1)式,通过电感元件的电流电压关系 $u_L(t)=L(\mathrm{d}i_L(t)/\mathrm{d}t)$ 求得的结果是:

$$u_L(t)=R(I_s-I_0)e^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)+LI_0\delta(t)\tag{3}$$

当 $I_0=0$ 即零状态响应时(3)与(2)是一致的,

收稿日期:2002－07－10

作者简介:刘子英(1964－),女,江苏江都人,副教授.

但当 $I_0 \neq 0$ 时(3)式结果与(2)式结果不同，由电容电压与电感电流的跃变条件可以说明该电路的电感电压响应 $u_L(t)$ 无冲击成分，即(3)式是错误的.

造成这种错误的原因是由于对电感电流求导时应用了 $\mathrm{d}\varepsilon(t)/\mathrm{d}t=\delta(t)$ 引起的，所以说应用 $\mathrm{d}\varepsilon(t)/\mathrm{d}t=\delta(t)$ 是有条件的，条件只有在 $\mathrm{d}\varepsilon(t)/\mathrm{d}t=\delta(t)$ 的证明过程中去寻找.

2 关于 $\mathrm{d}\varepsilon(t)/\mathrm{d}t=\delta(t)$ 的证明

阶跃函数是个间断函数，从数学上来说在间断点的导数是不存在的，但在《电路分析》、《信号与系统》中用特殊的方法可以确定其导数，即为冲击函数 $\delta(t)$，证明如下：

设一非理想电源接入电路中，其函数变化关系为 $f(t)$，如图 2(a)；显然 $f(t)$ 对时间 t 的导数如图 2(b)，从图中可以求出矩形脉冲的面积为 1.

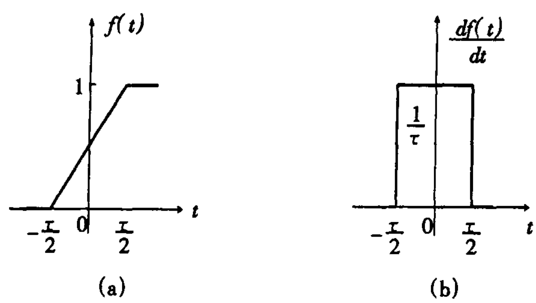

图 2

当 $\tau \to 0$ 时，由 $\varepsilon(t)$ 定义，则有 $f(t)=\varepsilon(t)$，且：

$-\frac{\tau}{2} \to 0^-, \frac{\tau}{2} \to 0^+$

而矩形脉冲的面积仍保持为 1，由 $\delta(t)$ 的定义，即有

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=\delta(t)$$

故： $\mathrm{d}\varepsilon(t)/\mathrm{d}t=\delta(t)$

3 分析及应用

在 $\mathrm{d}\varepsilon(t)/\mathrm{d}t=\delta(t)$ 的证明过程中，可以看出对于有间断点的 $\varepsilon(t)$ 函数求导必须考虑在间断点左右两侧的情况，也就是说在时域分析中应用 $\mathrm{d}\varepsilon(t)/\mathrm{d}t=\delta(t)$，此关系的条件是必须考虑换路前后的状态.

用 $u_L=L(\mathrm{d}i_L(t)/\mathrm{d}t)$ 关系求电感电压时，由于要对 $u_L(t)$ 求导必须考虑 $t<0$ 电感电流的原始状态，为了在 $i_L(t)$ 能体现出 $t<0$ 时的原始状态，应加上 $I_0\varepsilon(-t)$ 一项，这样就有：

$$i_L(t)=I_0\varepsilon(-t)+[I_0-I_s)e^{-\frac{R}{L}t}]\varepsilon(t)$$

则
$$\begin{aligned} u_L(t)&=L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \\ &=-LI_0\delta(-t)+L[I_s+(I_0-I_s)e^{-\frac{R}{L}t}]\delta(t)+R(I_s-I_0)e^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t) \\ &=R(I_s-I_0)e^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t) \end{aligned}$$

(因为 $\delta(t)=\delta(-t)$)

这一结果与(2)式相同，无冲击成分.

零状态响应时，由于 $I_0=0$，即 $I_0\varepsilon(-t)=0$，故对 $i_L(t)$ 求导时可直接用 $\mathrm{d}\varepsilon(t)/\mathrm{d}t=\delta(t)$，其实已经考虑到换路前的状态.

如图 3(a)所示，S 闭合后电路结构发生变化，电容电压要发生跃变，在求解电容电流时应用 $\mathrm{d}\varepsilon(t)/\mathrm{d}t=\delta(t)$ 也必须考虑换路前的原始状态. 由换路定则，有：

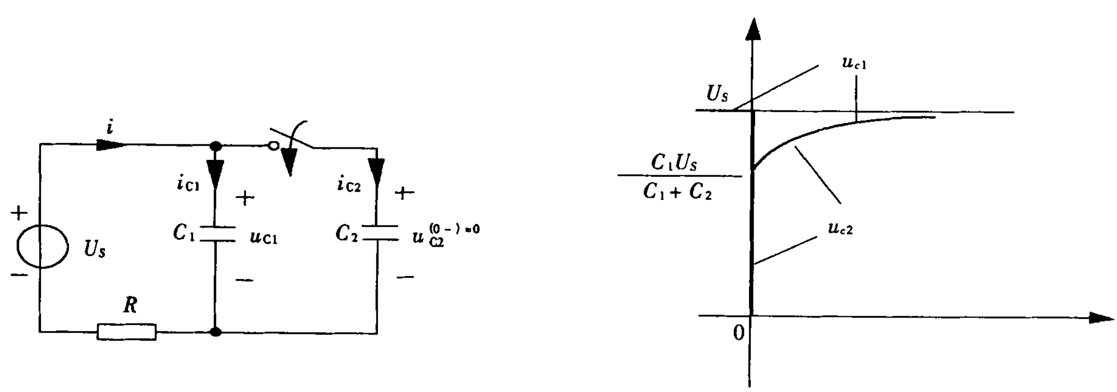

图 3

$$C_1u_{C1}(0_-)=C_1u_{C1}(0_+)+C_2u_{C2}(0_+)$$

$$u_{C1}(0_+)=u_{C2}(0_+)$$

解得:$u_{C1}(0_+)=u_{C2}(0_+)$

$$=\frac{C_1}{C_1+C_2}u_{C1}(0_-)$$

$$=\frac{C_1U_s}{C_1+C_2}$$

时间常数 $\tau=R(C_1+C_2)$

电容电压稳态值 $U_{C1}(\infty)=U_{C2}(\infty)=U_S$

由三要素法得:

$$u_{C1}(t)=u_{C2}(t)=[U_s-\frac{C_2U_S}{C_1+C_2}e^{\overline{R(C_1+C_2)}^{t}}]\varepsilon(t)$$

考虑 $t<0$ 情况,由于电容 C_2 是零状态,$U_{C2}(t)$表达式不变,而

$$u_{C1}(t)=u_S\varepsilon(-t)+[U_s-\frac{C_2U_S}{C_1+C_2}e^{\overline{R(C_1+C_2)}^{t}}]\varepsilon(t)$$

电容电流为:

$$i_{C1}(t)=C_1\frac{du_{C1}}{dt}=-\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U_S\delta(t)+\frac{C_1C_2U_S}{R(C_1+C_2)^2}e^{-\frac{t}{R(C_1+C_2)}}\varepsilon(t)$$

$$i_{C2}(t)=C_2\frac{du_{C2}}{dt}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U_S\delta(t)+\frac{C_2^2U_S}{R(C_1+C_2)^2}e^{-\frac{t}{R(C_1+C_2)}}\varepsilon(t)$$

$$i(t)=i_{C1}(t)+i_{C2}(t)=\frac{C_2U_S}{R(C_1+C_2)}e^{-\frac{t}{R(C_1+C_2)}}\varepsilon(t)$$

从图3(b)中可以看出 $i_{C1}(t)$与 $i_{C2}(t)$的冲击成分,这冲击电流是由于电容电压的跃变引起的,更确切地说是由于电容 C_1 中原储存的电荷对 C_2 的瞬间放电所引起的,而不是电源所引起的,故 $i(t)$无冲击成分.

上述结果的冲击强度为:

$$A_1=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U_S=C_1(\frac{C_1U_S}{C_1+C_2}-U_S)$$

$$=Q_{C1}(0_+)-Q_{C1}(0_-)$$

$$A_2=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U_S=C_2(\frac{C_1U_S}{C_1+C_2}-0)$$

$$=Q_{C2}(0_+)-Q_{C2}(0_-)$$

显然冲击强度为换路前后的电荷之变化.

从上述分析可以得到在时域范围内对任何具有跳跃间断点函数求导的简单方法:在间断点 必存在冲击,其冲击强度为间断点两侧的变化量,其它连续区间内仍按数学方法求导.

4　结论

a) 状态变量在时域范围内,用阶跃函数 $\varepsilon(t)$表示时,应用 $d\varepsilon(t)/dt=\delta(t)$对状态变量求导的条件是必须考虑到换路前后的两个状态.

b) 在时域范围内对某一信号进行微分处理时,在间断点 t_0(跳跃间断点)必存在冲击成分,且其冲击强度为 $A=f(t_{0+}-f(t_{0-})$,这个结论可直接应用.

参考文献:

[1] 邱关源.电路(第四版)[M].北京:高等教育出版社,1999.

Applications of the equality $d\varepsilon(t)/dt=\delta(t)$ in Time-Domain Analysis

LIU Zi-ying

(School of Electrical Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang, China)

Abstract: By the analysis to the equality $d\varepsilon(t)/dt=\delta(t)$, in time-domaim, we have obtained the condition of using equality $d\varepsilon(t)/dt=\delta(t)$ when calculating derivative of state variable. And farther gave a simple method of calculating derivative for the functions with jump discontinuous node.

Key word: time-domain analysis; unit-step function; unit-impulse function; impulse strength