

文章编号:1005-0523(2003)02-0116-04

费用函数为非叠加性时的用户平衡配流

丁 亮

(中南大学 交通运输学院,长沙 410075)

摘要:提出了传统的求解用户平衡配流(UE)的数学规划模型的局限性,应用非线性互补(NCP)将用户平衡问题进行重构,使其能够在路径费用是路段费用非叠加性增函数的情况下适用,然后采用间隙函数将NCP转化成一个等价的无约束非线性规划,并提出了解法。

关键词:平衡配流;非线性互补;间隙函数;非线性规划

中图分类号:TP87

文献标识码:A

1952年, Wardrop 提出了两个著名的出行者路径选择行为准则,由此推出了用户均衡(UE)和系统最优(SO)的概念. 1956年, Beckmann 对 Wardrop 第一准则进行了一个魔术般的变换,将用户平衡配流问题等价于下面的数学规划:

$$\begin{aligned} \min Z(x) &= \sum_a \int_0^{x_a} c_a(x) dx \\ s.t. \sum_p f_p^a &= q_a \quad \forall a \\ f_p^a &\geq 0 \quad \forall p, a \\ x_a &= \sum_r \sum_s \sum_p f_p^a \delta_{a,p}^r \quad \forall a \end{aligned} \quad (1)$$

上面的模型是一个非线性规划问题,经过这样的变换后,一系列用于求解非线性规划的数学方法都可以应用于交通平衡配流问题了.但是众所周知, Wardrop 第一准则具有相当的一般化,它除了非负要求以外,并没有别的限制,而模型(1)在建立数学模型规划时,为了简化计算及建模的要求做出了一些必要的假设,这些假设在一定程度上降低了该规划模型的精度,限制了其应用的范围.本文讨论的就是其中的一个假设.

1 路径费用是路段费用的非叠加性增函数时的用户平衡

目前求解 UE 平衡问题的数学规划算法中,路

径费用(阻抗)被视为等于该路径上所有路段的单独的路段费用(阻抗)之和,此时,我们说路径费用是路段费用的叠加性增函数,在这样的假设前提下,我们在目标函数中可以用路段流量作为变量,而不是路径流量.在使用 Frank-Wolfe 等算法时,这个假设有很明显的优势,尽管每次迭代都生成新的路径,但是算法并不需要储存他们,也无需对它们进行直接操作,因此节约了大量的存储空间和运算时间.在计算机程序中,如果采用路径变量,那么这个变量名将会由组成路径的各条路段和节点的名字来命名,因此一个路径变量很可能有一个极长的“名字”,这对于计算机程序是难以计算和存储的,尤其是越大型的路网,路径数目甚至可能远远多于路段数,这时,采用路段流量而不是路径流量作为变量的优越性就更明显了.

但是在现实生活中,我们发现在很多的情况下,我们难以把路径费用简单视为该路径上所有路段费用之和,也就是说,路径费用是路段费用的非叠加性增函数.本文举出两种会导致这种结果的情况.第一种是当旅行者对时间价值的评价为非线性时.目前在理论和实践中,路段费用函数一般被认为是下面的形式:

$$c_a(x) = \lambda_a + \beta_1 t_a(x) + \beta_2 t_a(x)$$

收稿日期:2002-09-28

作者简介:丁亮(1977-),男,四川成都人,硕士研究生.

对所有的路段 a 而言, λ_a 是路段的使用费用, $t_a(x)$ 是在路段上的运行时间, β_1 是运行费用, 比如说油费等, β_2 是本路段上消耗时间的价值.

但是根据长久以来的观察, 人们在评估时间价值时的标准往往是非线性的, 就是说, 人们往往会觉得相对较短的时间有比较低的价值, 而相对较长的时间, 其价值则呈现非线性增长, 结果就是, 路径费用不能表示成:

$$\eta(f) = \sum \delta_{ap} (\lambda_a + \beta_1 t_a(x) + \beta_2 t_a(x))$$

而需要表示成为:

$$\eta(f) = \sum \delta_{ap} (\lambda_a + \beta_1 t_a(x)) + g_p(\sum \delta_{ap} t_a(x))$$

上式中, 运行费用等仍然为线性, 但是 $g_p(\cdot)$ 是一个增函数, 旅行者对时间价值的评价为非线性, 所以路径费用为路段费用的非叠加性增函数.

第二种常见的情况来自于道路收费的非叠加性. 上面的讨论中, 我们是假设道路使用的费用是可叠加的, 但是我们知道在现实中, 这是不可能的, 交通运输中, 往往距离越远, 运输的单位价格越便宜, 而且现代道路交通管理中, 我们一般用拥挤收费的从宏观上调节交通量, 举一个简单例子, A, B, C, 三地, B 在 A, C 两地之间

	A	B	C
A		¥5	¥8
B			¥5

可见, A - C 的费用往往并不等于 A - B 的费用加上 B - C 的费用, 这在高速公路的收费上, 体现的最明显. 通过类似的举措, 我们可以达到鼓励长途旅行用车, 而抑制短途旅行用车的目的, 这对于缓解城市交通供求关系不平衡是有利的. 所以, 在实际生活, 我们几乎很难找到能满足上面模型(1)的假设的情况.

2 解路径费用是非叠加性增函数时的用户平衡的模型算法

2.1 等价非线性互补问题

通过上面的论述, 我们发现, 为了更好地同现实相符合, 有必要建立一个新的模型以放松模型(1)对路径费用函数为线性的假设约束, 这样一来, 无论平衡配流的理论研究, 还是实际工作的操作都会从中收益.

将 UE 分配等价条件表示如下:

$$f_p^n (\eta_p^n - \pi^n) = 0 \quad \forall rs \in RS, \forall p \in p^n \quad (2.1)$$

$$(\eta_p^n - \pi^n) \geq 0 \quad \forall rs \in RS, \forall p \in p^n \quad (2.2)$$

$$\sum_{p \in p^n} f_p^n - q^n = 0 \quad \forall rs \in RS \quad (2.3)$$

$$f \geq 0, u \geq 0 \quad (2.4)$$

符号的含义分别是: RS 是整个网络 OD 对的集合, rs 是一个 OD 对, P^n 是 OD 对 rs 间所有路径的集合, p 是一个 OD 对的一条路径, f_p^n 是 rs 间一条路径 p 的流量, η_p^n 是 rs 间路径 p 上的路径费用, π^n 是 OD 对 rs 间最短旅行费用, q^n 是 rs 间的需求量, 本文讨论的是需求量固定的情况, f 是向量 $(\cdots, f_p^n, \cdots)$, u 是向量 $(\cdots, \pi^n, \cdots)$, n 是向量 $(\cdots, \eta^n, \cdots)$.

Aashtiani 第一个发现上面的式子等价于一个非线性互补问题.

定义 1 (非线性互补问题 NCP)

设 F 在 $R^n \rightarrow R^n$ 连续, 则 NCP 是寻找 $x \in R^n$, 使得

$$x^T F(x) = 0 \quad (3.1)$$

$$F(x) \geq 0, \quad (3.2)$$

$$x \geq 0, \quad (3.3)$$

在平衡配流问题中, 我们可设,

$$x = (fu)^T$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} (\eta_p^n - \pi^n, \forall rs \in RS, \forall p \in p^n) \\ (\sum_p f_p^n - q^n, \forall rs \in RS) \end{bmatrix}$$

Aashtiani 等人还建立了用户均衡状态的存在性理论, 他们发现, 当且仅当费用函数恒正且连续, 而需求函数非负, 连续且有上界时, NCP 与 UE 等价. 他并且还证明了当费用函数和需求函数严格单调时, 用户均衡状态唯一, NCP 存在唯一解.

2.2 利用间隙函数重构 NCP

作为一种重要的优化问题, NCP 受到广大学者的重视, 发展了许多有效的算法, 比如不动点法, 同伦法, 投影法, *Newton* 法等. 当前比较流行的是把 NCP 改造成一个数学规划来求解, 这里使用到了间隙函数.

定义 2 设 Ω 为上面 NCP 模型(3)和 $\Psi = \{x \geq 0, F(x) \geq 0\}$ 的解集, 构造一个函数 $G(x)$, 当它满足下面的条件时, 称它为 NCP 模型的间隙函数:

$$1. G(x) \geq 0$$

$$2. G(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \Omega$$

$$3. \min G(x) = 0 \text{ 为全局最小值.}$$

由此, 我们可以认为, 求解上面的 NCP 问题等价于这样一个数学规划:

$$\min G(x)$$

$$s. t. x \in \Psi, \text{ 这里, } \Psi = \{x \geq 0, F(x) \geq 0\}.$$

本文中, 我们采用的间隙函数是 $G(x) = \sum_{i=1}^n \psi$

$(x_i, F_i(x))$, i 表示第 i 个分量.

1992 年, Fischer 引入一种结构简单而奇特的 NCP 函数.

$$\varphi(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - (a + b)$$

这个函数有性质 $\varphi(a, b) = 0 \Leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0, ab = 0$

他证明, $H(x) = \varphi(a, b)$ 是半光滑的, 但是引入其自然势函数

$$\varphi(a, b) = (1/2)\phi^2(a, b)$$

是连续可微的, 所建立的 Newton 方法可以取任何起始点, 它表现出良好的特性

$$\varphi(a, b) = 0 \quad \text{当且仅当} \quad a \geq 0, b \geq 0, ab = 0$$

$$\varphi(a, b) \geq 0 \quad \text{对所有} \quad (a, b) \in R^2$$

Lo(1999)给出了 $G(x) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i, F_i(x))$ 为上面 NCP 问题(3)的等价间隙函数的证明.

2.3 变尺度法求解

经过上面的转换, 我们看到待解的是一个无约束条件的非线性规划问题, 本文试图应用变尺度法求解这个数学规划. 它是介于最速下降法与 Newton 法之间的一种比较好的解非线性问题的算法.

对于 $\min G(x)$, 应用变尺度法, 我们设置初始向量 x_0 . 为了减少计算的复杂性, 我们人为设置一个较好的初始解, 假设已知当前路网中某些路径是旅行者通常选择的, 或者说根据以往的经验, 我们已经知道一个较优的分配方案, 我们将流量分配上去, 成为 x_0 . 相对来说, 这个初始解和最优解接近. 路径费用函数取为 $\eta_p^n = \sum \delta_{ak} (\lambda_a + \beta_1 t_a(x)) + g_k (\sum \sigma_{ak} t_a(x))$, 最小路径费用这里我们取 $\pi^n = \arg\min \eta_p^n$, 初始解向量为, $x^0 = (f u)^T$.

一般 Newton 法从初始点出发用下式获得迭代点列 $\{x^k\}$:

$x^{k+1} = x^k + a_{k+1} z^{k+1}$, $z^{k+1} = -[\nabla^2 G(x^k)]^{-1} \nabla G(x^k)$, 其中, z^{k+1} 为第 $k+1$ 代迭代的方向, a_{k+1} 为步长.

作为 Newton 法的修改, 变尺度法将上式中的 $[\nabla^2 G(x^k)]^{-1}$ 用 n 阶阵 H_k 取代, 从而考察由以下关系式确定的迭代: $x^{k+1} = x^k + a_{k+1} z^{k+1}$, $z^{k+1} = -H_k \nabla G(x^k)$. 迭代进行到获得 $\nabla G(x^k) = 0$ 的迭代点时有限步终止. 问题是如何选择步长 a_{k+1} 和确定矩阵 H_k , 使算法尽量保持 Newton 法在收敛速率方面的优点.

我们很自然想到将 H_k 作为 $-\nabla^2 G(x^k)$ 的

近似来构造, 注意到 $\nabla^2 G(x^k)$ 是对称阵, 且 $\nabla G(x^{k-1}) \approx \nabla G(x^k) + \nabla^2 G(x^k)(x^{k-1} - x^k)$.

约定 H_k 的构造应该满足下面两个条件:

1. H_k 是对称阵

2. 对任何 $k \geq 1$ 成立

$$p^k = H_k r^k, \text{ 其中 } p^k = x^k - x^{k-1},$$

$$r^k = \nabla G(x^k) - \nabla G(x^{k-1})$$

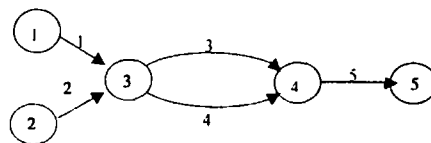
$$\text{由 } \Delta H_k = H_k - H_{k-1}, \text{ 或者改写成: } \Delta H_k r^k = p^k - H_{k-1} r^k$$

至于步长 a_{k+1} , 我们可以用两种不同的方法来确定, 如果采用精确线性搜索确定步长因子, 则 $a_{k+1} = \arg\min G(x^k - a \nabla G(x^k))$; 如果采用 Armijo 方法确定步长因子:

$$a_{k+1} = \max \left\{ \beta = \frac{1}{2^{m-1}}, G(x) - G(x - \beta \nabla G(x)) \geq \frac{1}{2} \beta \|\nabla G(x)\|^2 \right\}, m \text{ 是自然数}$$

3 数值例子

为了说明本文所构造的模型, 构造一个最简单的交通网络举例,



该网络有两个 OD 对 (1,5), (2,5), 交通需求量分别为 15, 18.75, 共四条路径, 路段时间采用美国公路局的算式: $t_a = \alpha_a \left[1 + 0.15 \left(\frac{v_a}{C_a} \right)^4 \right]$, α_a 为自由流时间, v_a 为路段流量, C_a 为容量.

路段	自由流时间 α_a	容量 C_a
1	15	10
2	10	20
3	10	20
4	15	15
5	10	30

我们先考虑路径费用为路段费用的叠加函数的情况, 即传统的 UE 平衡问题, 然后再考虑非叠加性情况下的配流, 我们在路径 2-3-5 上额外加载一个 5 单位的费用, 两种情况下的配流如下表.

OD 对 路径	叠加性		非叠加性	
	路径流量	路径费用	路径流量	路径费用
1,5 1-4-5	2.52	53.87	0.00	55.33
1-3-5	12.48	53.87	15.00	50.33
2,5 2-4-5	4.09	38.65	13.63	40.10
2-3-5	14.66	38.65	5.12	40.10

可见,当采用非叠加性路径费用时,配流情况发生了改变,这也说明了本文所讨论的问题有其实用价值,并且我们看到在非叠加情况下,配流依然也遵循 Wardrop 准则。

4 结论

目前,提出的间隙函数很多,如何减少算法复杂度和加快下降速度是判别优劣关键,比如 Chen - Chen - Kanzow 提出了新的 NCP 函数 $\varphi_{\lambda}(a, b) = \lambda \cdot \phi(a, b) + (1 - \lambda) a_+ b_+$, $\lambda \in (0, 1)$ 这里, $a_+ = \max\{0, a\}$, 他们的函数在保水平集有界得到一系列漂亮的数据和结果. 如何将这些新的数学成果应用到交通平衡配流是今后研究的方向. 另外,本文提到

的模型与算法,也可以应用到带弹性需求的用户平衡,这将会在以后另外撰文。

参考文献:

- [1] H. Lo, A. Chen. Reformulating the traffic equilibrium problem via a smooth gap function. *Mathematical and Computer Modeling*, 2000, (31), 179 - 195.
- [2] H. Lo, A. Chen. Traffic equilibrium problem with route-specific costs: Formulation and algorithms. *Transportation Research B* 2000, (34), 493 - 513.
- [3] K. Scott, D. Bernstein. Solving a best path problem when the value of time function is nonlinear. New Jersey TIDE Center, 1997.
- [4] 修乃华,高自友. 互补问题算法的新进展[J]. *数学进展*. 1999, (28), 193 - 200.
- [5] 陆化普,殷亚峰. 交通网络均衡分析的变分不等式方法[J]. *公路交通技*. 1997, (14): 24 - 29.
- [6] 高自友等. 城市交通连续平衡网络设计 - 理论与方法[M]. 北京:中国铁道出版社, 2000.
- [7] 汤代焱. 管理运筹学[M]. 长沙:湖南大学出版社, 1997.

User Equilibrium Problem with Nonadditive Route Costs

DING Liang

(Transportation College, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: This paper puts forward the baffle of the traditional mathematic program model of User Equilibrium, applies the nonlinear complementarity problem(NCP) to reformulate the UE, let it useful in situation where the route cost is non-additive, and then uses a gap function to convert the NCP to an equivalent unconstrained nonlinear programming, finally, presents an algorithm presented.

Key words: User equilibrium; Nonlinear complementarity problem; gap function; nonlinear programming