

文章编号: 1005—0523(2004)01—0001—07

复合压电材料尖劈端部奇性问题有限元分析

陈梦成¹, 姜 美², 朱剑军¹

(1. 土木建筑学院; 2. 机电工程学院, 江西 南昌 330013)

摘要:从应力平衡方程、电场 Maxwell 方程和尖劈边界条件构成的控制方程出发, 导出一个基于位移场、电势的弱式方程. 采用一维有限元分析技术, 沿着尖劈端部领域进行单元离散, 建立求解压电复合材料尖劈附近奇性场问题的有限元特征分析方法. 对于压电材料非常重要的电学边界问题, 本文也有所涉及, 并给出了平面导电裂纹和绝缘裂纹的算例.

关 键 词:压电材料; 尖劈端部; 奇性应力指数; 有限元

中图分类号: O346.1 **文献标识码:** A

0 引 言

压电材料因其自身固有的电弹性耦合特征, 广泛应用于信息技术、新材料技术和航天等高新技术领域的智能结构中, 譬如用来制作传感器、作动器和谐振器等. 在这些应用中, 压电传感器或作动器常常深埋或粘贴在主体结构上. 另外, 压电材料本身也多为片状材料的积层体. 因此智能结构一般是由包括压电材料在内的若干种材料复合制作而成, 这种复合结构通常会出现局部尖劈和接头(参见图 1 虚线圆圈处). 在尖劈和接头处, 由于几何和材料的不连续, 理论上应力和电位移通常会趋于无穷大, 即应力和电位移是奇异的. 如果结构在服役期间受到不利环境或载荷的影响, 该处极易诱发损伤, 形成裂纹核, 最终导致整个结构失稳. 因此, 全面、准确理解尖劈和接头的损伤机理, 对于智能复合材料结构和压电传感器/作动器的优化设计及其安全寿命的估算, 具有十分重要的理论价值和实际工程背景意义.

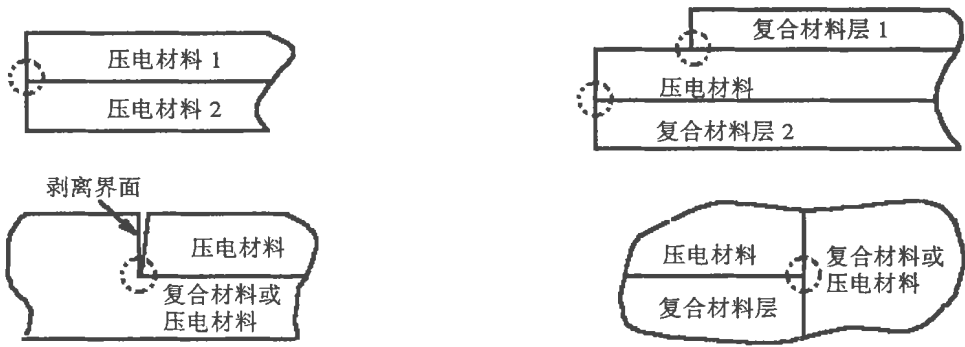


图 1 智能结构和作动器中几种典型的尖劈/接头结构

收稿日期: 2003—06—28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10362002); 江西省自然科学基金资助项目(0350062)
作者简介: 陈梦成(1962—), 男, 江西高安人, 教授, 博士.

尖劈端部奇性分析是我们研究尖劈端部应力场和电位移场的基础. 对于一般由包含压电材料在内的多种材料组合而成的压电复合材料中出现的尖劈 / 接头端部奇性分析问题, 相关研究则报道得非常少. 据作者所知, 目前只有以下几个学者讨论了压电复合材料的尖劈和接头力学问题: Chung 和 Ting^[1]研究了各向异性压电复合材料尖劈在线力, 电荷以及位错作用下力学问题; Xu 和 Rajapakse^[2]考察了极化轴在平面内时的压电复合材料尖劈和接头处的应力奇性指数; Chue 和 Chen^[3]则从三维理论出发讨论了广义平面变形作用下压电复合材料尖劈和接头处的应力奇性指数; 刘一华等^[4]对轴对称扭转界面端应力奇性指数问题进行了研究; 王效贵和许金泉^[5]则对特征值为二重根的横观各向同性压电材料异材界面端的奇性问题进行了分析.

应当指出的是, 以上分析使用的方法都是解析法. 然而, 电-力学耦合问题的解析解推导一般只适用于简单的几何图形和材料, 并且研究者本身还须具有高超的数学才能. 因此, 多数实际工程问题还有赖于数值分析. 本文打算拓展著者^[6,7]以前的工作, 即将以前只局限于分析复合材料尖劈端部应力奇性问题的特征有限元方法, 进一步建立既可分析复合压电材料尖劈和接头端部应力奇性问题又可分析电位移奇性问题的新型特征值问题的有限元方法. 文章最后给出若干应用算例, 并与已有的理论分析结果^[8]进行比较, 以说明本文方法的有效性和可行性.

另外, 需要提一下压电材料裂纹问题边界条件的问题. 对于力学分析来说, 不管裂纹内是气体还是真空介质, 应力场不存在. 但对于电学分析来说, 裂纹内介质却是载电体. 因此, 压电材料裂纹问题的求解涉及到一个几何、物理非连续的双区域问题. 关于压电材料裂纹边界条件, 目前有以下两种提法: 1) 导通裂纹(permeable crack): 在 Parton^[9]关于压电介质裂纹问题的早期分析中, 认为由于裂纹厚度很小, 裂纹内介质是一个载电体, 裂纹表面保持力学和电学边界条件连续. 导电裂纹(conducting crack)是导通裂纹的一种特殊情况, 裂纹内无介质, 但裂纹上下表面保持电势相等. 2) 绝缘裂纹(impermeable crack): 考虑到压电陶瓷材料的介电常数比缺陷(空气或真空)的介电常数高出 1 000 倍以上, 认为在裂纹表面, 应力与表面电荷为零. 这一假设最早由 Deeg^[10]提出, 并由 Pak^[11]加以详细的讨论, 简称 D-P 边界条件. 本文目前暂时考虑第二种裂纹边界条件. 对于第一种裂纹边界条件, 我们将在以后的文中讨论.

1 弱式方程

图 2 是一个复合压电材料平面尖劈的示意图. 该问题包括以下几个控制方程(由平衡条件和边界条件构成):

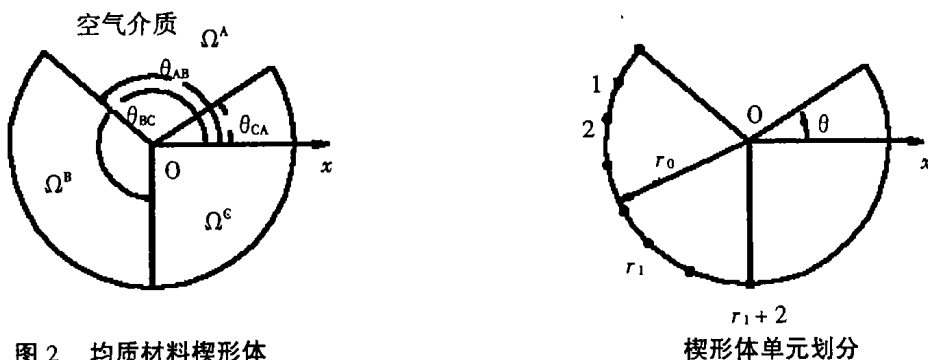


图 2 均质材料楔形体

楔形体单元划分

1) 应力平衡方程

$$\begin{cases} \nabla(r\sigma_r) - \sigma_{\theta\theta} \\ \nabla(r\sigma_\theta) - \tau_{r\theta} \end{cases} = \nabla_m(r\sigma) = 0 \quad (1)$$

$$\text{其中: } \sigma = \{\sigma_{rr} \quad \sigma_{\theta\theta} \quad \tau_{r\theta}\}^T \quad \sigma_r = \{\sigma_{rr} \quad \tau_{r\theta}\}^T \quad \tau_\theta = \{\tau_{r\theta} \quad \sigma_{\theta\theta}\}^T \quad \nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{1}{r} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \right\}$$

2) Maxwell 公式

$$\nabla(rD) = 0 \quad \text{其中: } D = \{D_r \quad D_\theta\}^T \quad (2)$$

3) 界面应力连续条件

$$(\boldsymbol{\sigma}_\theta^C - \boldsymbol{\sigma}_\theta^B) |_{\theta=\theta_{BC}} = 0 \quad (3)$$

4) 界面位移连续条件

$$(\mathbf{u}^B - \mathbf{u}^C) |_{\theta=\theta_{BC}} = 0 \quad \text{其中: } \mathbf{u} = \{u_r \quad u_\theta\}^T \quad (4)$$

5) 界面电位移连续条件

$$(\mathbf{D}^B - \mathbf{D}^C) |_{\theta=\theta_{BC}} = 0 \quad (5)$$

6) 界面电势连续条件

$$(\phi^B - \phi^C) |_{\theta=\theta_{BC}} = 0 \quad (6)$$

7) 自由边界应力条件

$$\boldsymbol{\sigma}_\theta^B |_{\theta=\theta_{AC}} = \boldsymbol{\sigma}_\theta^C |_{\theta=\theta_{AB}} = 0 \quad (7)$$

8) 自由边界电位移条件

$$\mathbf{D}_\theta^B |_{\theta=\theta_{AC}} = \mathbf{D}_\theta^C |_{\theta=\theta_{AB}} = 0 (\text{impermeable condition}) \quad (8)$$

由以上控制方程和边界条件, 得到以下的弱式方程为

$$\int_{\Omega^B \cup \Omega^C} \left(\begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta \mathbf{E} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} \right) d\Omega - R \int_{\theta_{AB}}^{\theta_{CA}} \left(\begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u} \\ -\delta \phi \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_r \\ D_r \end{Bmatrix} \right) \bigg|_{r=R} d\theta = 0 \quad (9)$$

2 有限元离散公式

为对尖劈端部进行奇性分析, 假设其邻域位移场和电势场满足以下形式:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_r(r, \theta) \\ u_\theta(r, \theta) \end{Bmatrix} = r^{\lambda+1} \begin{Bmatrix} U_r(\theta) \\ U_\theta(\theta) \end{Bmatrix} = r^{\lambda+1} \mathbf{U}(\theta) \text{ 和 } \phi = \phi(r, \theta) = r^{\lambda+1} \Phi(\theta) \quad (10)$$

因此, 方程(9)的有限元离散格式可写为

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \left(\begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta \mathbf{E} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} \right) d\Omega - \sum_e R \int_e \left(\begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u} \\ -\delta \phi \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_r \\ D_r \end{Bmatrix} \right) \bigg|_{r=R} d\theta = 0 \quad (11)$$

上式中每个单元 e 定义为扇形区域, 即: $r \in [0, R]$, $\theta \in [\theta_s^e, \theta_e^e]$; 单元 e 中角坐标采用下面形式进行插值:

$$\theta = N_s \theta_s + N_e \theta_e \quad (12)$$

其中: $N_s = (1 - \xi)/2$, $N_e = (1 + \xi)/2$, $\xi \in [-1, +1]$; 根据(10)式, 单元 e 中单元位移和电势可假定为

$$\mathbf{u}^e = r^{\lambda+1} \begin{Bmatrix} U_r(\theta) \\ U_\theta(\theta) \end{Bmatrix} = r^{\lambda+1} [N_s \mathbf{I}_2, N_1 \mathbf{I}_2, \dots, N_n \mathbf{I}_2, N_e \mathbf{I}_2] \begin{Bmatrix} U_{rs}^e(\theta) \\ U_{\theta s}^e(\theta) \\ \vdots \\ U_{rs}^e(\theta) \\ U_{\theta e}^e(\theta) \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$= r^{\lambda+1} [N_s \mathbf{I}_2, N_1 \mathbf{I}_2, \dots, N_n \mathbf{I}_2, N_e \mathbf{I}_2] \mathbf{q}_m^e$$

$$\phi = r^{\lambda+1} [N_s, N_1, \dots, N_n, N_e] \begin{Bmatrix} \phi_s^e \\ \vdots \\ \phi_e^e \end{Bmatrix} = r^{\lambda+1} [N_s, N_1, \dots, N_n, N_e] \mathbf{q}_e^e \quad (14)$$

其中 $\mathbf{I}_2$ 为二阶恒等矩阵; $N_j = \xi^{-1}(1 - \xi^2)$ $j=1, \dots, n$; $\mathbf{q}_m^e$ 为尖劈端部周边单元节点广义位移变量; $\mathbf{q}_e^e$ 为尖劈端部周边单元节点广义电势变量. 可以合写成为 $\mathbf{q}^e$.

矩阵(13)和(14)合写为:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ -\phi^e \end{Bmatrix} = r^{\lambda+1} \begin{bmatrix} N_s & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_e & 0 & 0 \\ 0 & N_s & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_e & 0 \\ 0 & 0 & -N_s & 0 & 0 & -N_j & 0 & 0 & -N_e \end{bmatrix} \{ \mathbf{q}^e \} = r^{\lambda+1} \bar{\mathbf{N}} \mathbf{q}^e \quad (15)$$

由物理方程和 Hooke 定律以及电位移和电场强度的关系,得到

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{C}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi \tag{16}$$

根据(9)~(14)进行推导可以得到下列等式:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} &= r^\lambda (\lambda \bar{\mathbf{B}}_1 + \bar{\mathbf{B}}_0) \mathbf{q} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{C}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} = r^\lambda (\lambda \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{B}}_1 + \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{B}}_0) \mathbf{q} = r^\lambda \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}(\theta) \\ \mathbf{D}(\theta) \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_r \\ D_r \end{Bmatrix} &= r^\lambda \bar{\mathbf{H}} (\lambda \bar{\mathbf{B}}_1 + \bar{\mathbf{B}}_0) \mathbf{q} \end{aligned} \tag{17}$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}}_1 &= \begin{bmatrix} N_s & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_s & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_e & 0 \\ 0 & 0 & -N_s & 0 & 0 & -N_j & 0 & 0 & -N_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad j=1, \dots, n(\text{下同}) \\ \bar{\mathbf{B}}_0 &= \begin{bmatrix} N_s & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_e & 0 & 0 \\ N_s & N_{s,\theta} & 0 & N_j & N_{j,\theta} & 0 & N_e & N_{e,\theta} & 0 \\ N_{s,\theta} & 0 & 0 & N_{j,\theta} & 0 & 0 & N_{e,\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_s & 0 & 0 & -N_j & 0 & 0 & -N_e \\ 0 & 0 & -N_{s,\theta} & 0 & 0 & -N_{j,\theta} & 0 & 0 & -N_{e,\theta} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{H}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} \end{aligned}$$

把式(13)和(15)代入弱式方程(9),得到特征方程

$$(\lambda^2 \mathbf{P} + \lambda \mathbf{Q} + \mathbf{R}) \mathbf{q} = 0 \tag{18}$$

其中 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}$ 是各单元矩阵 $\bar{\mathbf{P}}^e$ 、 $\bar{\mathbf{Q}}^e$ 、 $\bar{\mathbf{R}}^e$ 组装以后形成的总矩阵. 单元矩阵 $\bar{\mathbf{P}}^e$ 、 $\bar{\mathbf{Q}}^e$ 、 $\bar{\mathbf{R}}^e$ 分别表示如下:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}^e &= \int_{\theta'}^{\theta''} (\bar{\mathbf{B}}_1^T \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{B}}_1 - 2 \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{B}}_1) d\theta, \bar{\mathbf{R}}^e = \int_{\theta'}^{\theta''} (\bar{\mathbf{B}}_0^T \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{B}}_0 - 2 \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{B}}_0) d\theta \\ \bar{\mathbf{Q}}^e &= \int_{\theta'}^{\theta''} (\bar{\mathbf{B}}_1^T \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{B}}_0 + \bar{\mathbf{B}}_0^T \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{B}}_1 - 2 \bar{\mathbf{N}}^T (\bar{\mathbf{B}}_1 + \bar{\mathbf{B}}_0)) d\theta \end{aligned} \tag{19}$$

为了能求解方程(16),引入 $\bar{q} = \lambda q$ 得到以下标准特征方程:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} & -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{R} \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \tag{20}$$

通过一般求解特征值的程序,即可确定式(18)中的特征值 λ 和特征 $\mathbf{q}$. 在奇性分析的时候,通常感兴趣的范围是 $-1 < \text{Re } \lambda < 0$.

3 计算结果和讨论

为了便于与现有结果进行比较,我们采用方程(20)对 PZT 系列的复合压电陶瓷材料 PZT4 和 PZT5 的尖劈端部奇性问题进行了分析. 在所有的数值计算中,PZT4 和 PZT5 的电弹性参数采用表 1 值.

表 1 PZT4 与 PZT5 的材料系数表(数据来源自文献[13])

材料	C11	C12	C13	C33	C44	e15	e31	e33	β_{11}	β_{33}
	刚度系数(GN/m ²)					压电常数(C/m ²)			介电常数(pC/Vm)	
PZT4	140	78.9	75.6	115	25.3	13.0	-5.26	15.45	6368	5520
PZT5	122	77.2	77.1	113	21.0	12.3	-5.45	15.72	8116	7306

3.1 绝缘裂纹和导电裂纹奇性应力指数的数值解

在平面问题分析范围内, 我们假定分析坐标为 $X-Z$, 压电材料主轴方向为 1-3; 另外, 我们也同时假定压电材料的极化方向 Z 轴与材料的主轴方向 3 一致, 具体描述见图 3. 本文以 PZT4 压电陶瓷材料裂纹端部奇性为例, 采用上面方程(20), 并编制相应程序, 讨论平面应变情况下裂纹表面在绝缘和导电两种情况下裂纹端部奇性指数数值结果收敛情况. 在数值计算中, 单元数为 2, 单元内节点数目为 3~6 个, 计算结果如表 2.

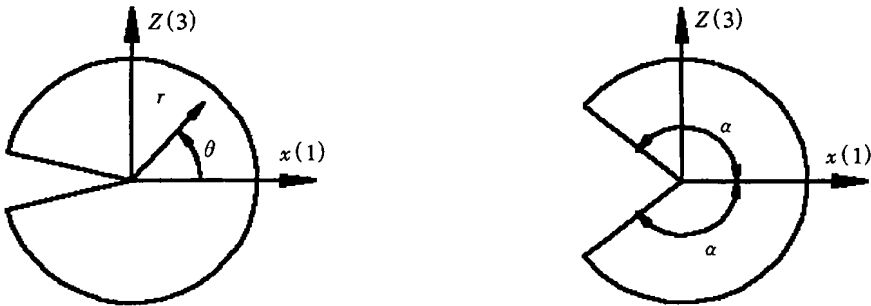


图 3 材料的主轴方向

表 2 PZT4 材料绝缘裂纹和导电裂纹的特征值计算表

内节点	电学边界条件	裂纹尖端机械 I 型特征值	裂纹尖端机械 II 型特征值	裂纹尖端压电特征值
N=3	绝缘	-0.4969145	-0.5024237	-0.5005004
N=3	导电	-0.4969145	-0.5007433	无
N=4	绝缘	-0.4999042	-0.5009825	-0.5008506
N=4	导电	-0.5006157	-0.5008506	无
N=5	绝缘	-0.5000101	-0.5001691	-0.50012274
N=5	导电	-0.5001177	-0.5001691	无
N=6	绝缘	-0.5000012	-0.5000190	-0.5000012
N=6	导电	-0.5000025	-0.5000000	无

上表中数值结果表明, 只需使用 2 个单元, 单元内节点数为 6, 裂纹尖端机械 I、II 型特征值数值结果即可很快收敛到理论值 -0.5, 压电特征值尤为如此. 由此足见本文方法不但所需单元少, 节点少, 而且精度高. 顺便指出的是, 在导电裂纹边界条件下, 裂纹端部奇性电位移场不存在. 这个结论与现有的三维有限元分析结果^[13]完全一致.

3.2 绝缘裂纹端部的奇性场角分布

图 4 和 5 考察了机电载荷作用下 PZT4 压电陶瓷材料产生平面应变时裂纹端部奇性应力场和电位移场的角分布情况, 它们分别是由机械载荷和电载荷作用产生的. I 型对应着产生张开型裂纹的机械载荷作用, IV 型则对应着电载荷作用. 为便于与理论结果^[15]比较, 我们对角分布进行了归一化处理. 即对奇性应力场角分

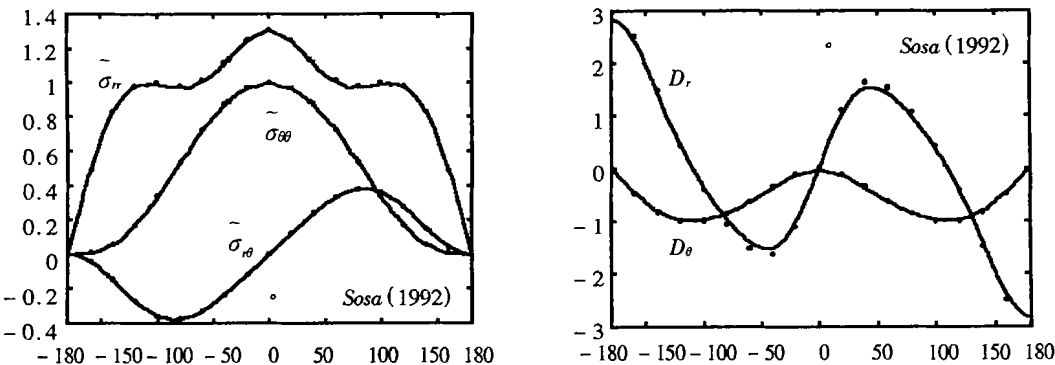


图 4 裂纹顶端应力、电位移角分布曲线(I 型)

布 σ_{rr} 、 $\sigma_{r\theta}$ 和 $\sigma_{\theta\theta}$ 进行归一化处理的时候, 是将它们分别除以 $\sigma_{\theta\theta}$ 的最大值, 而对奇性电位移场角分布 D_r 和 D_θ 行归一化处理的时候, 则是将它们分别除以 D_θ 的最大值. 应当需要说明的是: 本文在计算 I 型加载下引起的电位移场 D_r 和 D_θ 的角分布时, 反复计算表明, 单元内节点数不能超过 2. 否则, D_r 和 D_θ 角分布的数值结果会发生漂动. 除此特别之外, 其它角分布只要满足单元数 ≥ 4 和单元内节点数 ≥ 5 都能高精度的收敛到与 Sosa^[8] 的理论解.

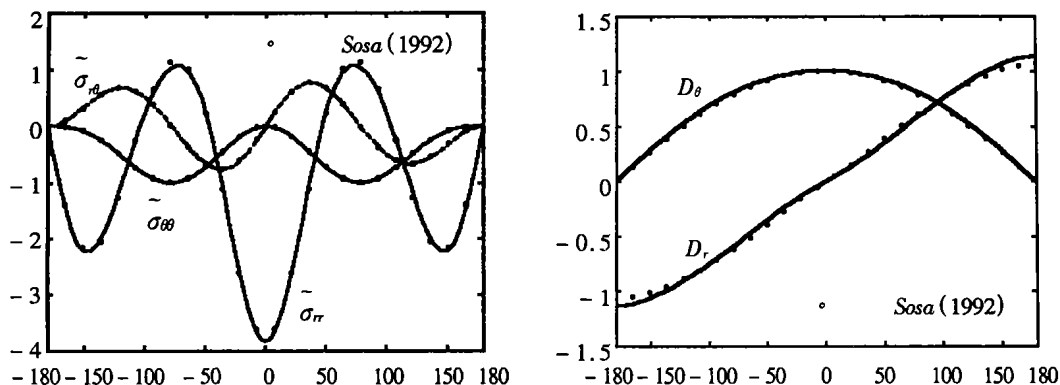


图 5 裂纹顶端应力、电位移角分布曲线 (IV 型)

3.3 任意尖劈角端部奇性应力指数

本节利用方程 (20) 分析了平面应变情况下 PZT4 压电材料含不同尖劈角时尖劈端部奇性指数的变化情况. 数值计算结果如图 6 所示. 计算结果表明: 所有的应力奇性指数均为实数. 不同的尖劈角度 (2α) (图 2), 具有不同的奇性指数. 尖劈角小于 180° 时候, 无奇异行为; $180^\circ \sim 260^\circ$ 之间有二个应力奇性指数, 第三个应力奇性指数在 $2\alpha > 260^\circ$ 才出现, 线性裂纹 ($2\alpha = 360^\circ$) 的情况下, 所有应力奇性指数均收敛于 -0.5 .

3.4 两相压电材料联结接头的奇性指数

本节考虑 PZT4 和 PZT5 两种压电材料的联结接头端部奇性指数情况, 接头的几何示意图如图 7 所示. 其中 PZT4 的极化轴跟 Z 轴的夹角为 45° , 楔型角为 180° ; PZT5 的极化轴为 Z 轴, 尖劈角为 90° . 材料的参数见表 1. 计算的结果为: $\lambda_1 = -0.4529005$, $\lambda_2 = -0.3537674$, $\lambda_3 = -0.1079129$. 文献^[3]用势函数的展开方法得到同样的特征值. 两者没有差别, 再次表明本文的计算结果精度很高.

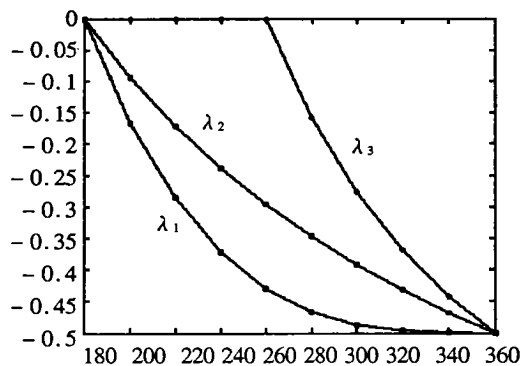


图 6 任意尖劈角端部奇性应力指数分布图

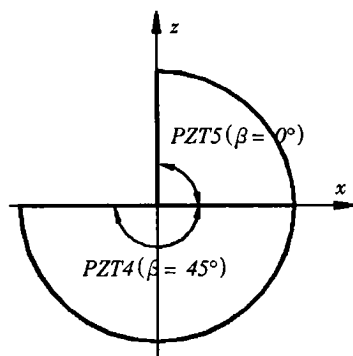


图 7 两相压电材料接头几何示意图

4 结 论

本文提出的压电有限元模式可以通过较少的单元数来研究压电材料裂纹尖端的奇异行为. 文章中得出的绝缘裂纹、导通裂纹以及两相材料联结体的奇性指数都与已有的理论分析结果表现一致, 说明本文方法的可行性. 不仅如此, 与理论分析相比, 本文的方法可以较容易的应用到压电—金属材料的连接等一系列其它的高科技领域中去.

参考文献:

- [1] Chung MY & Ting TCT. Line force, charge and dislocation in anisotropic piezoelectric composite wedges and spaces. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1995, 62; 423—428.
- [2] Xu XL & Rajapakse RKND. On singularities in composite piezoelectric wedges and junctions. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, 37; 3253—3275.
- [3] Chue CH & Chen CD. Decoupled fomulation of piezoelectric elasticity under generalized plane deformation and its application wedge problems. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39; 3131—3158.
- [4] Liu YH, Xu JQ & Ding HJ. An axisymmetric interface edge of bounded transversely isotropic piezoelectric materials under torsion. *Journal of Applied Mechanics*, 1999, 66; 821—823.
- [5] 王效贵,许金泉. 特征值为二重根的压电材料异材界面断奇性[J]. 力学季刊,2001,22;55—61.
- [6] 平学成,陈梦成. 楔形体尖端近似场的非协调元有限元特征法[J]. 华东交通大学学报,2001,18(4); 6—11.
- [7] Chen MC(陈梦成) & Sze KY. A novel hybrid finite element analysis of bimaterial wedge problems. *Engineering Fracture Mechanics*, 2001, 68;1463—1476.
- [8] Sosa H. On the fracture mechanics of piezoelectric solids, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 29, No. 21, pp. 2613—2622, 1992.
- [9] Parton VZ. Fracture mechanics of piezoelectric materials. *Acta Astro*, 1976, 3; 671—683.
- [10] Deeg WF. The analysis of dislocation, crack and inclusion problems in piezoelectric solids. Ph. D thesis, Stanford University, 1980.
- [11] Pak YE. Crack extension force in a piezoelectric material. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1990, 57;647—653.
- [12] 王子昆,郑百林. 压电陶瓷中圆币形裂纹在横向剪力下的机—电耦合行为[J]. 力学学报,1995,27(3);304—315.
- [13] Sze KY, Wang HT & Fan H. A finite element approach for computing edge singularities in piezoelectric materials. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38, 9233—9252.

FE Method for Singularities Near a Wedge of Composite Piezoelectric Materials

CHEN Meng-cheng¹, JIANG Xian², ZHU Jian-jun¹

(1.School of Civil Engineering and Architecture; 2.School of Mechanical and Electronic Engineering, East China Jiaotong Uni., Nanchang 330013, China)

Abstract: Based on stress equilibrium, electric field equation and boundary conditions, a one dimensional finite element procedure is proposed to determine singularities in around a wadge piezoelectric materials with dividing elements along their perimeters. This paper discusses the singular stress and electric displacement angular functions around a crack tip under conducting and impemeable conditions on the crack surfaces. The approach is validated by comparing its predictions with other available theoretical solutions.

Key words: piezoelectricity, wedge, singularity, finite element method