

文章编号: 1005—0523(2004)01—0027—05

非均质杆振动的高频特性分析

包忠有

(华东交通大学 土木学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 将非均质杆的纵向自由振动的特征值微分方程化为积分方程, 并通过对积分项的评估, 分析了一般边界条件下非均质杆纵向自由振动的高频渐近性质, 给出了高阶特征问题的渐近解.

关 键 词: 特征值; 非均质杆; 固有频率

中图分类号: TU991.35

文献标识码: A

1 引 言

由于涉及变系数微分方程, 非均质杆纵向自由振动问题的精确解很难求得, 对于低阶的固有频率和振型, 可借助于数值计算方法求得, 如变分法等等. 值得一提的是, 数值计算方法用于求高阶固有频率和振型时, 将遇到计算上的困难. 对于高阶固有频率和振型时, 则可采用分析方法给予评估. 本文根据高频时杆的振动性质, 进行定性的研究, 这种研究也适用于逆问题的解决. H•Hochstadt 对非均质杆作了较为详细的分析^[1], 但他所采用的方法与本文的方法不同. 本文将把特征值问题的微分方程变为积分方程, 通过对积分项的评价得到杆的高频渐近性质, 是一种较为严谨的分析方法.

2 基本方程, 边界条件及特征值问题

非均质杆纵向自由振动的基本微分方程和边界条件为^[2]

$$\frac{\partial}{\partial x} [EA(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}] = m(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, 0 < x < l \quad (1)$$

$$a_1 u(0, t) + b_1 \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$a_u(l, t) + b_2 \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

其中: $EA(x)$ 为非均质杆的抗拉刚度, $m(x)$ 为非均质杆的单位长度上的质量, a_1, a_2, b_1, b_2 , 为给定常数.

设 $U(x, y)$ 可分离为

$$u(x, t) = Y(x) T(t) \quad (4)$$

则相应的特征值方程为:

收稿日期: 2003—10—16

作者简介: 包忠有, 1959 年生, 副教授.

中国期刊网 <http://www.cnki.net>

$$\frac{d}{dx} [EA(x) \frac{dY(x)}{dx}] + \lambda m(x) Y(x) = 0 \quad (5)$$

$$a_1 Y(0) + b_1 \frac{dY(L)}{dx} = 0 \quad (6)$$

$$a_2 Y(L) + b_2 \frac{dY(L)}{dx} = 0 \quad (7)$$

设 $EA(x) \in C^2$; $m(x) \in C^2$, 因为我们所研究的是连续单杆, 故有

$$\min EA(x) > 0, \quad 0 < x < L; \quad \min m(x) > 0, \quad 0 < x < L$$

取变换

$$S = \int_u^x \sqrt{m(x)/EA(x)} dx, \quad Y(s) = \sqrt{m(x)EA(x)} Y(x) \quad (8)$$

将式(8)代入式(5), (6), (7)得

$$Y''(s) + \lambda Y(s) = R(s) Y(s) \quad (9)$$

$$A_1 Y(0) + B_1 Y'(0) = 0 \quad (10)$$

$$A_2 Y(L_1) + B_2 Y'(l_1) = 0 \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} Y'(s) &= \frac{dY(s)}{ds}, \quad Y''(s) = \frac{d^2 Y(s)}{ds^2} \\ A_1 &= [a_1 - \frac{m'(0)EA(0) + m(0)EA'(0)}{4m(0)EA(0)} b_1] / \sqrt[4]{m(0)EA(0)}, \\ B_1 &= b_1 \sqrt[4]{m(0)/(EA(0))^3}, \\ A_2 &= [a_2 - \frac{m'(L)EA(L) + m(L)EA'(L)}{4m(L)EA(L)} b_2] / \sqrt[4]{m(L)EA(L)}, \\ B_2 &= b_2 \sqrt[4]{m(L)/(EA(L))^3}, \\ l_1 &= \int_0^L \sqrt{m(x)/EA(x)} dx, \\ R(s) &= -\frac{\sqrt[4]{m(x)EA(x)}}{m(x)} \frac{d}{dx} [EA(x) \frac{d}{dx} (\frac{1}{\sqrt[4]{m(x)EA(x)}})] \end{aligned}$$

$Y(s)$ 所满足的微分方程为^[3]

$$Y(s) = Y(0) \cos(\sqrt{\lambda}s) + \frac{Y'(0)}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}s) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^s R(\tau) Y(\tau) \sin \sqrt{\lambda}(s-\tau) d\tau \quad (12)$$

设与 λ 第 n 个特征值 λ_n 相等, Y_n 为式(9)在 $\lambda = \lambda_n$ 时的解, 则

$$y_n(s) = y_n(0) \cos \sqrt{\lambda_n} s + \frac{y'_n(0)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} s + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^s R(\tau) y_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n}(s-\tau) d\tau \quad (13)$$

3 高频渐近性质

下面分别对几种边界条件进行讨论

3.1 $A_1 \neq 0, B_1 \neq 0$

此时, $y'_n(0) \neq 0$, 否则由式(10)可得 $y_n(0) = 0$, 再由柯西问题解的唯一性定理知 $y_n(s)$ 恒为零.

将式(10)代入式(13)可得

$$y'_n(s) = \frac{B_1}{A} y'_n(0) \cos \sqrt{\lambda_n} s + \frac{y'_n(0)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} s + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^s R(\tau) y_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n}(s-\tau) d\tau \quad (14)$$

$$y_n'(0) = -\frac{A_1}{B_1}$$

式(14)变为

$$y_n(s) = \cos \sqrt{\lambda_n} s - \frac{A_1}{B_1 \sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} s + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^s R(\tau) y_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n}(s-\tau) d\tau \quad (15)$$

令

$$M_n = \max |y_n(s)| \quad 0 \leq x \leq L$$

由(15)得

$$|y_n(s)| \leq 1 + \frac{A_1}{B_1 \lambda_n} + \frac{M_n}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{l_1} |R(\tau)| d\tau$$

则

$$M_n \leq \frac{A_1}{B_1 \lambda_n} + \frac{M_n}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{l_1} |R(\tau)| d\tau$$

当 n 充分大时,

$$M_n \leq [1 + \frac{A_1}{B_1 \lambda_n}] / [1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{l_1} |R(\tau)| d\tau] = 1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}) \quad (16)$$

即 M_n 不大于某一与 n 无关的常数.

$$y_n'(s) = -\sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n} s - \frac{A_1}{B_1} \cos \sqrt{\lambda_n} s + \int_0^s R(\tau) y_n(\tau) \cos \sqrt{\lambda_n}(s-\tau) d\tau \quad (17)$$

因为

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{l_1} R(\tau) y_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n}(s-\tau) d\tau \right| &\leq [1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})] \int_0^{l_1} |R(\tau)| d\tau \\ \left| \int_0^{l_1} R(\tau) y_n(\tau) \cos \sqrt{\lambda_n}(s-\tau) d\tau \right| &\leq [1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})] \int_0^{l_1} |R(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

从而求得

$$\begin{aligned} y_n'(l) &= \cos \sqrt{\lambda_n} l - \frac{A_1}{B \sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} l + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{l_1} R(\tau) y_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n}(l-\tau) d\tau \\ &= \cos \sqrt{\lambda_n} l + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} y_n'(l_1) &= -\sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n} l_1 - \frac{A_1}{B_1} \cos \sqrt{\lambda_n} l_1 + \int_0^{l_1} R(\tau) \cos \sqrt{\lambda_n}(l_1-\tau) d\tau \\ &= -\sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n} l_1 + O(1) \end{aligned} \quad (19)$$

将式(18),(19)代入边界条件(11),得

$$A_2 [\cos \sqrt{\lambda_n} l_1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})] + A_2 [-\sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n} l_1 + O(1)] = 0 \quad (20)$$

若 $B_2 \neq 0$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$W_n = \sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{l_1} + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}) \quad (21)$$

若 $B_2 = 0$ 时, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$W_n = \sqrt{\lambda_n} = \frac{2n+1}{2l_1} \pi + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}) \quad (22)$$

式中 W_n 为非均质杆发生纵向自由振动时的第 n 阶(高阶)圆频率.

3.2 $A_1 \neq 0 \quad B_1 = 0$

由边界条件(10)式知,

$$y_n'(0) = 0 \quad (23)$$

$$Y_n(s) = \sin \sqrt{\lambda_n} s + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^s R(\tau) Y_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n}(s-\tau) d\tau \quad (24)$$

进行类似推导得

$$A_2[\sin \sqrt{\lambda_n} l_1 + 0(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})] + B_2[\sqrt{\lambda_n} l_1 + 0(1)] = 0 \quad (25)$$

$$\text{若 } B_2 \neq 0, \text{ 则当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } W_n = \sqrt{\lambda_n} = \frac{2n+1}{2l_1} \pi + 0(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}) \quad (26)$$

$$\text{若 } B_2 = 0 \text{ 时, 则当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } W_n = \sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{l_1} + 0(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}) \quad (27)$$

3.3 $A_1=0, B_1 \neq 0$ 时

由边界条件(10)式知:

$$y_n'(0) = 0 \quad (28)$$

取 $Y_n(0) = 1$, 则式(13)可化为

$$Y_n(s) = \cos \sqrt{\lambda_n} s + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^s R(\tau) Y_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n}(s-\tau) d\tau \quad (29)$$

又进行类似推导, 可得

$$A_2[\cos \sqrt{\lambda_n} l_1 + 0(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})] + B_2[-\lambda_n \sin \sqrt{\lambda_n} l_1 + 0(1)] = 0 \quad (30)$$

当 $B_2 \neq 0$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$W_n = \sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{l_1} + 0(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}) \quad (31)$$

当 $B_2 = 0$ 时, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$W_n = \sqrt{\lambda_n} = \frac{2n+1}{l_1} + 0(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}) \quad (32)$$

在近似计算中, 为了提高固有频率及振型渐近表达式的近似程度, 可在式(13)中进行迭代处理, 迭代一次的式(13)为

$$\begin{aligned} y_n(s) = & y_n(0) \cos \sqrt{\lambda_n} s + \frac{y_n'(0)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} s + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^s R(\tau) [y_n(0) \cos \sqrt{\lambda_n} \tau + \frac{y_n'(0)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} \tau \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^\tau R(\tau_1) y_n(\tau_1) \sin \sqrt{\lambda_n} l_1 (\tau - \tau_1)] \sin \sqrt{\lambda_n}(s-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (33)$$

将式(33)代入以上各种情况下的边界条件, 可得到高次近似的特征方程. 例如, 在 $A_1 \neq 0, B_1 = 0$ 和 $B_2 \neq 0$ 的情况下, 可得:

$$\cos \sqrt{\lambda_n} l_1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} (1 + \frac{1}{2}) \int_0^{l_1} R(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n} l_1 + 0(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}) = 0 \quad (34)$$

4 算 例

现考察一非均质杆的纵向自由振动问题, 设杆的一端被固定, 另一端为自由, 杆的抗拉刚度及质量分布为

$$EA(X) = EA(2X^2 - 2X + 1); \quad M(x) = m(2X^2 - 2X + 1) \quad \text{其中: } EA \text{ 及 } m \text{ 为常量.}$$

为了评估杆的高频渐近性质, 分别用式(21)和能量变分法计算了十阶以下的固有频率, 其计算结果见表1, 表中 $f = \sqrt{EA/ml^2}$.

表 1 固有频率的计算结果及有关比较

固有频率 W_N	(26)式主部结果 W_N	能量变分法结果 W_N	$ W_n^* - \overline{w_n} $
W_1	1.570796f	1.524104f	0.0467f
W_6	17.27876f	17.29561f	0.0169f
W_7	20.42035f	20.43463f	0.0143f
W_8	23.56194f	23.57447f	0.0125f
W_9	26.70354f	26.71466f	0.0111f
W_{10}	29.84513f	29.85551f	0.0104f

5 结 论

由本文给出的渐近表达式可知,高频时非均质杆纵向自由振动的固有频率近似地只与 $l_1=\int_0^l \sqrt{m(x)/EA(x)} dx$ 有关,而与 $m(x)$ 和 $EA(x)$ 沿杆的具体变化情况无关,高频时振型的主部为正弦或余弦函数.从表 1 还可以看出,当 n 取值越大, $|W_n^* - \overline{w_n}|$ 值越小.对高频振动而言,弹性约束边界条件和边界条件是近似等价的.

参考文献:

[1] Hochstadt H. Asymptotic Estimates for Sturm Liouville Spectrum. Commun on Pure and ApplMath.
[2] Leonard Meirovitch, Elements of Vibration Anlysis. New York ; McGraw—Hill.
[3] 彼得罗夫斯基著·段荣译.偏微分方程讲义[M].北京:人民教育出版社.

High Frequency Feature Analyses of Non-uniform-material Bar Vibration

BAO Zhong-you

(School of Civil Eng. and Arc., East china Jiaotong Univ. Nanchang Jiangxi 330013, China)

Abstract : This paper converts the differential equations of the vertical free vibration feature values of non-uniform-material bars into integral equations. Moreover, through the appraisal of the integral items, this paper, firstly, analyzes the high frequency gradual conversion features of non-uniform-material bars under ordinary boundary conditions, and then points out the gradual advancement solution to the high rank features.

Key words : feature values ; non-uniform-material Bar ; intrinsic frequency