文章编号:1005－0523(2004)01－0110－04

关于图的符号边控制数的下界

徐保根

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:设 $\gamma'_s(G)$ 表示图 G 的符号边控制数.本文证明了:对任意 n 阶图 G,均有 $\gamma'_s(G)\geq\lceil\frac{4\delta-n^2}{8}\rceil$,并探讨了树和完全二部图的符号边控制数.此外,还提出了若干相关问题和猜想.

关 键 词:树;完全二部图;符号边控制函数;符号边控制数
中图分类号:O157.5　　**文献标识码**:A

1 引言及定义

本文所指的图均为无向简单图,文中未说明的符号和术语同于文献[1].

设 G 为一个图.$V(G)$和 $E(G)$分别表示 G 的顶点集和边集.若 $S\subseteq V(G)$则 $G[S]$表示 S 在 G 中的导出子图.$H\subseteq G$ 表示 H 为 G 的子图.若 $u\in V(G)$则 $d_G(u)$(或 $d(u)$)表示 u 点在 G 中的度,$N_G(u)$或($N(u)$)表示 u 点在 G 中的邻域,$N_G[u]$(或 $N[u]$)$=N(u)\cup\{u\}$为闭邻域.

对于 $e\in E(G)$,$N_G(e)$表示与 e 相邻的边的集合,称为 e 的边邻域.$N_G[e]=N_G(e)\cup\{e\}$称为 e 的闭边邻域.在不会混淆的情况下,有时 $N_G[e]$和 $N_G[e]$分别记为 $N(e)$和 $N[e]$.若 $e=uv\in E(G)$,显然 $N_G[uv]=\{u'v'\in E(G)\mid u'$或$v'=v\}$.

近几年来,图的控制理论研究的内容越来越广泛[3～6],各类控制概念相继产生且研究成果不断丰富.然而,绝大多数均属于图的点控制,在文[2]中我们定义了一种边控制如下:

定义 1[2]　设 $G=(V,E)$是一个非空图,一个函数 $f:E\to\{+1,-1\}$,如果满足 $\sum_{e'\in N[e]}f(e')\geq 1$ 对一切 $e\in E$ 成立,则称 f 为 G 的一个符号边控制函数.

图 G 的符号边控制数定义为 $\gamma'_s(G)=\min\{\sum_{e\in E(G)}f(e)\mid f$ 为 G 的符号边控制函数$\}$.

由于 $-|E(G)|\leq\gamma'_s(G)\leq|E(G)|$是平凡的界限,因此,定义 $\gamma'_s(\overline{K_n})=0$.

若 $L(G)$为 G 的线图,从定义中不难看出:$\gamma'_s(G)=\gamma_s(L(G))$为 $L(G)$的符号控制数.

按照上述定义,一个图的符号边控制数有可能为一个负数.例如:令 G 为K_4 的每个顶点上增加 2 条悬挂边所得的图($|V(G)|=12$).定义 f 如下:

$$f(e)=\begin{cases}1 & \text{当 } e\in E(K_4)\subset E(G);\\ -1 & \text{否则};\end{cases}$$

显然 f 为 G 的一个符号边控制函数,从而有

收稿日期:2003－10－05
作者简介:徐保根(1963－),男,江西南昌人,教授.

$\gamma'_s(G)\leqslant\sum_{e'\in N[e]}f(e)=-2<0$.

虽然文[2]中确定了所有 m 条边的图最小符号边控制数，也刻划了 $\gamma'_s(G)=|E(G)|$ 的所有连通图．但对于一个给定一般图 G，确定 $\gamma'_s(G)$ 的值仍属于一个困难的问题．到目前为止，除了星轮、路径圈和完全图之外，其他图类尚不知其符号边控制数的确切值．符号边控制问题的研究与点控制相比较似乎更为困难一些．本文主要探讨图的符号边控制数的下界，对树和完全二部图的符号边控制数得到了更好的下界，并提出了几个相关的问题．下面列出关于符号边控制的已知结果：

引理 1[2]　(1)对任意 n 阶图 G，若 $|E(G)|=m$，则 $\gamma'_s(G)\geqslant m-\frac{\Delta}{2}n$．

(2)设 $\varphi(m)=\min\{\gamma'_s(G)\,|\,|E(G)|=m\}$，$m\geqslant1$，则

$\varphi(m)=2\lfloor\frac{1}{3}\lceil\frac{\sqrt{24m+25}+6m+5}{6}\rceil\rfloor-m$．

(3)若 G 为一个连通图，则 $\gamma'_s(G)=|E(G)|$ 当且仅当 $G=P_n(1\leqslant n\leqslant5)$ 或者 G 为一个星的细分图．

引理 2　(1) $\gamma'_s(K_{1,n})=\frac{3+(-1)^n}{2}$

(2) $\gamma'_s(P_n)=n+1-2\lfloor\frac{n-2}{3}\rfloor$

(3) $\gamma'_s(C_n)=n-2\lfloor\frac{n}{3}\rfloor$

(4) $\gamma'_s(K_n)=\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$

2　主要结果

定理 1　对任意 n 阶图 G，δ 为图 G 的最小度，则有 $\gamma'_s(G)\geqslant\lceil\frac{4\delta-n^2}{8}\rceil$．

证：设 G 为一个 n 阶图，f 是 G 的一个符号边控制函数且 $\gamma'_s(G)=\sum_{e\in E(G)}f(e)$．

记 $E_1=\{e\in E(G)\mid f(e)=1\}$，$E_2=\{e\in E(G)\mid f(e)=-1\}$．定义 G 的两个子图 G_1 和 G_2 如下：$V(G_1)=V(G)$，$E(G_i)=E_i(i=1,2)$．对于每一点 $u\in V(G)$，定义

$d^*(u)=d_{G1}(u)-d_{G2}(u)$．

设 $A=\{u\in V(G)\mid d^*(u)\geqslant0\}$，$B=\{u\in V(G)\mid d^*(u)\leqslant-1\}$，$s=|A|$，$t=|B|$．显然 $A\cup B=V(G)$，$A\cap B=\phi$，$s+t=n$．$E(G[B])=\phi$(否则，由符号边控制函数的定义知道：存在 $e=uv\in E(G[B])$，使得 $1\leqslant\sum_{e'\in N[e]}f(e')=d^*(u)+d^*(v)-f(e)$，注意到 u、$v\in B$，即 $d^*(u)\leqslant-1$，$d^*(v)\leqslant-1$，得出 $f(e)\leqslant-3$，矛盾)．记

$$E(A,B)=\{uv\in E(G)\,|\,u\in A,v\in B\}$$

定义 $p=|E_2\cap E(A,B)|-|E_1\cap E(A,B)|$，则有 $\sum_{u\in B}d^*(u)=-p<0$，$t\leqslant p$，因此至少存在一点 $v_0\in B$ 使得 $d^*(v_0)\leqslant-\lceil\frac{p}{t}\rceil$．$d_G(v_0)\geqslant|d^*(v_0)|\geqslant\lceil\frac{p}{t}\rceil$．注意到 $N_G(v_0)\subseteq A$，对每一点 $v\in N_G(v_0)$，由符号边控制函数的定义知 $d^*(v_0)+d^*(v)-f(v_0v)\geqslant1$，这导出 $d^*(v)\geqslant\lceil\frac{p}{t}\rceil$，注意到 $t\leqslant p\leqslant st$，$V=V(G)$，我们有

$$\begin{aligned}\gamma'_s(G)&=|E(G_1)|-|E(G_2)|\\&=\frac{1}{2}\sum_{u\in V}d_{G_1}(u)-\frac{1}{2}\sum_{u\in V}d_{G_2}(u)\\&=\frac{1}{2}\sum_{u\in V}d^*(u)=\frac{1}{2}\sum_{u\in A}d^*(u)=\frac{1}{2}\sum_{u\in B}d^*(u)\\&\geqslant\frac{1}{2}\sum_{u\in N(v_0)}d^*(v)-\frac{1}{2}p\geqslant\frac{1}{2}\sum_{v\in N(v_0)}\lceil\frac{p}{t}\rceil\\&=\frac{1}{2}d_G(v_0)\lceil\frac{p}{t}\rceil-\frac{1}{2}p\geqslant\frac{1}{2}\delta-\frac{1}{2}p\end{aligned}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\delta-\frac{(s+t)^2}{8}=\frac{4\delta-n^2}{8}$$，由于 $\gamma'_s(G)$ 为整数，定理 1 证毕.

注 1：定理 1 给出的下界与文[2]中给出的下界引理 1(1)是独立的，即在一般情况下两者无强弱之分. 例如，读者可以将其分别针对正则图和星.

定理 2 设 $K_{m,n}$ 为完全二部图，则

$$\gamma'_s(K_{m,n})\geqslant\begin{cases}\dfrac{2mn}{m+n-1} & \text{当 } m+n \text{ 为奇数}\\[2mm] \dfrac{mn}{m+n-1} & \text{当 } m+n \text{ 为偶数}\end{cases}$$

下面考虑树的符号边控制数. 一棵树 $T\neq K_1$，则称 T 为非平凡的.

定理 3 对于任意非平凡的数 T，均有 $\gamma'_s(T)\geqslant 1$.

证：对树 T 的阶数 $n=|V(T)|$ 用归纳法. 当 $n=2$ 或 3 时，显然成立. 若对一切阶数 $\leqslant n-1$ 的非平凡树 T'，均有 $\gamma'_s(T')\geqslant 1$ 成立. 考虑任一棵 n 阶树 T，设为 T 的一个符号边控制函数且 $\gamma'_s=\sum_{e\in E(T)}f(e)$. 当 $T=K_{1,n-1}$ 为星时，由引理 2 得 $\gamma'_s(T)\geqslant 1$. 下设 T 不是星，即 T 中包含非悬挂边.

情况 1 若 T 中存在非悬挂边 e，使得 $f(e)=-1$：

则 $T-e=T_1\cup T_2$，且 T_1 和 T_2 均为非平凡的树，由归纳假设知：$\gamma'_s(T_1)\geqslant 1$ 且 $\gamma'_s(T_2)\geqslant 1$. 注意到 $f(e)=-1$，不难看出：f 在 T_1 上的限制 $f|_{T_1}$ 是 T_1 的一个符号边控制函数，f 在 T_2 上的限制 $f|_{T_2}$ 是 T_2 的一个符号边控制函数，从而有

$$\gamma'_s(T)=\sum_{e\in E(T)}f(e)=\sum_{e\in E(T_1)}f(e)+\sum_{e\in E(T_2)}f(e)+f(e)\geqslant\gamma'_s(T_1)+\gamma'_s(T_2)+f(e)\geqslant 1.$$

情况 2 若对 T 的每一条非悬挂边 e，均有 $f(e)=1$：

由于 T 不是星，T 中至少包含一条非悬挂边 e. 令 $A=\{v\in V(T)\mid d_T(v)=1\}$ 为 T 中所有悬挂点的集合. 记 $T_0=T-A$，显然 T_0 为一棵非平凡的树，记

$$|E(T_0)|=m\geqslant 1\text{，则}|V(T_0)|=m+1,\ |A|=|V(T)|-|V(T_0)|=n-m-1.$$

对于每个顶点 $u\in V(T_0)$，在 f 下，u 点在 T 中所关联的边中至多有 $\frac{d_T(u)-1}{2}$ 条标有 -1 的悬挂边(不然的话，取 u 点所关联的任一悬挂边 e，均有 $\sum^{e'\in N[e]}f(e')\leqslant 0$ 矛盾).

在 f 下，令 T 中标有 -1 的悬挂边总数为 S，因此

$$\begin{aligned}S&\leqslant\frac{1}{2}\sum_{u\in V(T_0)}(d_T(u)-1)\\&=\frac{1}{2}\left[\sum(d_{T_0}(u)-1)+|A|\right]\\&=\frac{1}{2}(2m-|V(T_0)|+|A|)\\&=\frac{1}{2}(2m-(m+1)+n-m-1)\\&=\frac{1}{2}(n-2)\end{aligned}$$

注意到对每条非悬挂边 e，$f(e)=1$. 因此 T 中(在 f 下)标有 $+1$ 的边数不少于 $n-1-\frac{1}{2}(n-2)=\frac{1}{2}n$ 条，即有 $\gamma^1_s(T)=\sum_{u\in E(T)}f(e)\geqslant\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}(n-2)=1$.

综合情况 1 和情况 2，我们证明了 $\gamma'_s(T)\geqslant 1$. 由归纳原理得知：对一切非平凡数 T，均有 $\gamma'_s\geqslant 1$，定理 3 证毕.

为了说明定理 3 给出的界是最好可能的，我们有：

定理 4 设为任意给定的一棵树 T_0，则存在一棵树 T，使得 $T_0\subseteq T$ 且 $\gamma'_s(T)=1$.

3　若干未解决的问题及猜想

(1) 确定完全二部图的符号边控制数 $\gamma'_s(K_{m,n})$.

(2) 如何刻划满足 $\gamma'_s(T)=1$ 的树?

(3) 我们猜想:对所有的图 G,均有 $\gamma'_s(G)\leqslant|V(G)|-1$.

假如此猜想成立,根据引理1(3)知道,则此上界是最好可能的.

(4) 令 $g(n)=\min\{\gamma'_s(G)|G$ 是一个 n 阶图$\}$,如何确定 $g(n)$的值.

注3:问题(4)也在文献[2]中提出过,引理[1]中给出了所有 m 条边的图的最小符号边控制数 φ(m)的值,但对于所有 n 阶图的最小符号边控制数 g(n)的值似乎更困难一些.尽管我们探讨了 g(n)的一些下界,但 g(n)的确切值有待进一步研究.

参考文献:

[1] Bondy.J.A.and Murty U.S.R., Graph Theory with Application [M]. Macmillan,London,1977.

[2] Baogen Xu, On signed edge domination numbers of graphs [J]. Discrete Math. 239(2001) 179～189.

[3] Kang Liying, Shan Erfang, Lower bounds on dominating functions in graphs, Ars. Combinatoria 56(2000):121～128.

[4] Zhongfu Zhang, Baogen Xu, Yinzhen Li, Linzhong Liu, A note on the lower bounds of signed domination number of a graph [J]. Discrete Math. 195 (1999) 295～298.

[5] Baogen Xu. Shangchao Zhou, Characterization of connected graphs with maximum domination number [J].数学研究与评论.4(2000):523～528.

[6] T.W.Haynes, S.T.Hedetmiemi, P.J.Stater, Foundamentals of domination in graphs, Marcel Dekker Inc., New York, 1998.

On the Lower Bounds of Signed Edge Domination Numbers in Graphs

XU Bao-gen

(School of Natual Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Let $r'_s(G)$ denote the signed edge domination number of a graph G. In this paper, we prove that $\gamma'_s(G)\geqslant\lceil\frac{4\delta-n^2}{8}\rceil$ for any graph G of order n, and discuss the signed edge domination numbers for trees and complete bipartite graphs, and pose the corresponding several problems and conjectures.

Key words: Tree; complete bipartite graph; signed edge domination function; signed edge domination numbers