文章编号:1005—0523(2004)01—0114—03

增算子新的不动点定理及其应用

盛梅波

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:利用非对称迭代的方法研究了在没有连续性条件和紧性条件下增算子新的不动点存在性、唯一性及迭代收敛性,得出了新的不动点定理以及给出此迭代的误差估计,并在非线性方程中得到应用.

关 键 词:增算子;正规锥;不动点

中图分类号:O189.2 **文献标识码**:A

1 引 言

迭代逼近的方法是处理非线性问题的基本方法之一,特别是对于在适当序条件下的非线性单调算子问题中,应用迭代方法得出了许多好的结果(见文[1]~[6]等),本文利用非对称迭代的方法研究了在没有连续性和紧性条件下增算子新的不动点存在性、唯一性及迭代收敛性,得出此迭代的误差估计.

以下总假定 E 是一个实 Banach 空间,P 是 E 中正规锥,N 为 P 的正规常数,半序"$\leqslant$"是由锥 P 诱导的.

定义1 设 $x_0\in E$,$y_0\in E$,有 $x_0\leqslant y_0\in E$,称集合 $[x_0,y_0]=\{x\mid x_0\leqslant x\leqslant y_0\}$ 为 E 中的序区间.

定义2 设非空集合 $D\subset E$,算子 $A\to D$ 称为增算子,如果

$\forall\, x_1<x_2\in D$,有 $Ax_1\leqslant Ax_2$.

定义3 设 $A:D\to E$ 是 D 上的算子,如果存在 $x_*\in D$,使得 $Ax_*=x_*$,则称 $x=x_*$ 是算子 Ax 在 D 上的一个不动点.

2 主要结果

定理1 设 $A:[x_0,y_0]\to E$ 的增算子,存在常数 $\alpha,\beta\in(0,1)$,$\alpha+\beta<1$,满足下列两个条件:

(Ⅰ) $x_0+\alpha(y_0-x_0)\leqslant Ax_0$,$Ay_0\leqslant y_0$;

(Ⅱ) $Ay-Ax\leqslant\beta(y-x)$,当 $x_0\leqslant x\leqslant y\leqslant y_0$ 时;

则增算子 Ax 在 $[x_0,y_0]$ 上有唯一的不动点 x_*.

构造迭代格式:

$$\begin{cases} x_{n+1}=Ax_n-\alpha(y_n-x_n) \\ y_{n+1}=Ay_n \end{cases},\ n=0,1,2,\cdots.$$

都收敛于 x_*,且有误差估计式:

$$\begin{cases} \| x_n-x_* \|\leqslant N(\alpha+\beta)^n \| y_0-x_0 \| \\ \| y_n-x_* \|\leqslant N(\alpha+\beta)^n \| y_0-x_0 \| \end{cases}$$

另外对 $\forall\, u_0\in[x_0,y_0]$,作 $u_{n+1}=Au_n$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=x_*$

证明 1° 由数学归纳法验证

$$x_{n-1}\leqslant x_n<y_n<y_{n-1} \tag{1}$$

事实上,$n=1$ 时,由条件(Ⅰ)得

$x_0\leqslant Ax_0-\alpha(y_0-x_0)=x_1\leqslant Ay_0=y_1\leqslant y_0$,式(1)成立.

假设 $n=k$ 时式(1)成立,即有 $x_{k-1}\leqslant x_k<y_k\leqslant y_{k-1}$,

收稿日期:2003—10—25

作者简介:盛梅波(1966—),男,江西波阳人,华东交通大学副教授,从事非线性泛函研究.

从而有　$\alpha(y_k-x_k)\leqslant\alpha(y_{k-1}-x_{k-1})$

又由于 A 是 $[x_0,y_0]$ 上增算子,则

当 $n=k+1$ 时,由归纳假设得

$Ax_{k-1}\leqslant Ax_k\leqslant Ay_k\leqslant Ay_{k-1}$

当 $n=k+1$ 时,由归纳假设得

$x_k\leqslant Ax_{k-1}-\alpha(y_{k-1}-x_{k-1})\leqslant Ax_k-\alpha(y_k-x_k)=x_{k+1}\leqslant Ax_k\leqslant Ay_k=y_{k+1}\leqslant Ay_{k-1}=y_k$ 式(1)成立.

2° 下面证明 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 是 E 中的 Cauchy 序列.

由 1°和条件(Ⅱ)以及 A 是增算子得

$$\begin{aligned}\theta\leqslant y_n-x_n&=Ay_{n-1}-Ax_{n-1}+\alpha(y_{n-1}-x_{n-1})\\&\leqslant\beta(y_{n-1}-x_{n-1})+\alpha(y_{n-1}-x_{n-1})\\&=(\alpha+\beta)(y_{n-1}-x_{n-1})\end{aligned}$$

继续可得

$$\begin{aligned}\theta\leqslant y_n-x_n&\leqslant(\alpha+\beta)(y_{n-1}-x_{n-1})\\&\leqslant(\alpha+\beta)^2(y_{n-2}-x_{n-2})\\&\leqslant\cdots\leqslant(\alpha+\beta)^n(y_0-x_0)\end{aligned}\tag{2}$$

根据 P 的正规性得

$$\|y_n-x_n\|\leqslant N(\alpha+\beta)^n\|y_0-x_0\|\tag{3}$$

又　$\theta\leqslant x_{n+m}-x_n\leqslant y_{n+m}-x_n\leqslant y_n-x_n\leqslant(\alpha+\beta)^n(y_0-x_0)$

$\theta\leqslant y_n-y_{n+m}\leqslant y_n-x_{n+m}\leqslant y_n-x_n\leqslant(\alpha+\beta)^n(y_0-x_0)$

故　$\|x_{n+m}-x_n\|\leqslant N(\alpha+\beta)^n\|y_0-x_0\|$,

$\|y_n-y_{n+m}\|\leqslant N(\alpha+\beta)^n\|y_0-x_0\|$

因此 $\{x_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 是 E 中的 Cauchy 序列.

3° 设 $\lim\limits_{n\to\infty}=\bar{x}$, $\lim\limits_{n\to\infty}=y_n=\bar{y}$,则 $\bar{x}=\bar{y}=x$,就在 Ax 在 $[x_0,y_0]$ 上不动点.

由(1)式得

$x_0\leqslant x_n\leqslant\bar{x}\leqslant\bar{y}\leqslant y_n\leqslant y_0$, $\theta\leqslant\bar{y}-\bar{x}\leqslant y_n-x_n$

又由(2)式得

$\theta\leqslant\bar{y}-\bar{x}\leqslant y_n-x_n\leqslant(\alpha+\beta)^n(y_0-x_0)$

根据 P 的正规性得

$\|\bar{y}-\bar{x}\|\leqslant N\|(\alpha+\beta)^n\|y_0-x_0\|$

即　$x_0\leqslant\bar{y}=\bar{x}=x_*\leqslant y_0$

进一步有

$$\begin{aligned}x_n&\leqslant x_{n+1}=Ax_n-\alpha(y_n-x_n)\leqslant Ax_n\leqslant Ax_*\\&\leqslant Ay_n=y_{n+1}\leqslant y_n\end{aligned}$$

因此　$\theta\leqslant Ax_*-x_n\leqslant y_n-x_n\leqslant(\alpha+\beta)^n(y_0-x_0)$

根据 P 的正规性得

$\|Ax_*-x_n\|\leqslant N(\alpha+\beta)^n\|y_0-x_0\|$

故　$\|Ax_*-x_*\|\leqslant\|Ax_*-x_n\|+\|x_n-x_*\|\leqslant2(\alpha+\beta)^n(y_0-x_0)\to0$, $n\to\infty$

即　$Ax_*=x_*$

4° 是唯一的.设 $z'\neq x_*$,也是 Ax 在 $[x_0,y_0]$ 上的不动点,则

$x_1=Ax_0-\alpha(y_0-x_0)\leqslant Ax_0\leqslant Az'=z'\leqslant Ay_0=y_1$

由数学归纳法得　$x_n\leqslant z'\leqslant y_n$.

则　$\theta\leqslant z'-x_n\leqslant y_n-x_n\leqslant(\alpha+\beta)^n(y_0-x_0)$,

根据 P 的正规性得

$\|z'-x_n\|\leqslant N(\alpha+\beta)^n\|y_0-x_0\|$

从而　$\|z'-x_*\|\leqslant\|z'-x_n\|+\|x_n-x_*\|\leqslant2(\alpha+\beta)(y_0-x_0)\to0$, $n\to\infty$

即　$z'-x_*$

若在(3)式中令 $n\to\infty$ 便可得到误差估计式.

5° 对 $\forall\,u_0\in[x_0,y_0]$,作 $u_{n+1}=Au_n$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=x_*$

事实上,$u_0\in[x_0,y_0]$,作 $u_{n+1}=Au_n$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=x_*$

证毕

定理 2　设 $A:[x_0,y_0]\to E$ 的一个增算子,若存在常数 $\beta\in(0,1]$,满足下列两个条件:

(Ⅰ) $x_0\leqslant Ax_0$, $Ay_0\leqslant y_0$;

(Ⅱ) $\theta\leqslant Ay-Ax\leqslant\beta(y-x)$.当 $x_0\leqslant x\leqslant y\leqslant y_0$ 时.则增算子 Ax 在 $[x_0,y_0]$ 上有唯一的不动点 x_*.

构造迭代格式:$\begin{cases}x_{n+1}=Ax_n\\y_{n+1}=Ay_n\end{cases}$, $n=0,1,2,\cdots$.

都收敛于 x_*,且有误差估计式:

$$\begin{cases}\|x_n-x_*\|\leqslant N\beta^n\|y_0-x_0\|\\\|y_n-x_*\|\leqslant N\beta^n\|y_0-x_0\|\end{cases}.$$

另外对 $\forall\,u_0\in[x_0,y_0]$,作 $u_{n+1}=Au_n$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=x_*$

证:类似与定理 1 可得,设 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 是 E 中的 Cauchy 序列,设 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\bar{x}$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\bar{y}$,则 $\bar{x}=\bar{y}=x_*$ 就是 Ax 的不动点,唯一性和收敛式类似可得

定理 3　非线性算子 $Ax=\int_Dk(t,s)f(x(s))\,ds+g(t)$,其中连通闭集 $D\subset R^N$,对 D 上的有界连续函数 $x(s)$,满足下列条件满足:

(Ⅰ) $k(t,s):D\times D\to R$ 非负有界可测的,$g(t)$ 时 D 上的连续函数;

(Ⅱ) $f(x(s)):R\to R$ 有界连续且关于 $x(s)$ 增;

(Ⅲ)令 $m=\inf\limits_{t\in D}\int_Dk(t,s)\,ds$, $M=\sup\limits_{t\in D}\int_Dk(t,s)\,ds$,存在常数以及 $\alpha\in(0,1)$ 以及 $x_0(s)$, $y_0(s)$ 对使得 $x_0(s)\leqslant y_0(s)$,有

$x_0(s)+\alpha(y_0(s)-x_0(s))$

$< mf(x_0(s)) + \min g(t)$,

$Mf(y_0(s)) + \max g(t) \leqslant y_0(s)$;

(Ⅳ)存在常数 $\beta \in (0,1)$,

当 $x_0(s) \leqslant x(s) \leqslant y(s) \leqslant y_0(s)$,有

$[f(y(s)) - f(x(s))]ds < \beta(y(t) - x(t))$;

则当 $\alpha + \beta < 1$ 时,Ax 在 $[x_0(s), y_0(s)]$ 上有唯一的不动点 $x^*(s)$.

事实上:容易验证算子 Ax 在 $[x_0(s), y_0(s)]$ 上满足定理1的条件,故结论成立.

参考文献:

[1] Zhang Shisheng, Guo Weiping. On the existence and uniqueness theorems of solutions for the systems of mixed monotone operator equations with applications[J]. Applied Mathematics. A Journal of Chinese Universties(SerB), 1993, 8: 11～14.

[2] Guo Dajun, Lakshmikantham. v. Coupled fixed points of nonlinear operators with application[J]. Nonlinear Anal, 1987, 11: 623～632.

[3] 盛梅波. 关于混合单调算子新的不动点定理及应用[J]. 华东交通大学学报(自然版), 2003, 5: 117～120.

[4] 颜心力. 对称压缩算子方程解的存在与唯一性定理及应用[J]. 科学通报, 1990(10): 733～736.

[5] 许绍元. 增算子的不动点定理及其应用[J]. 江西师范大学学报(自然版), 2000, 24(1): 25～27.

[6] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1985.

On New Fixed Point Theorems of Increasing Operator and Applications

SHENG Mei-bo

(School of Natural Science East China Jiaotong University, Nanchang 330013)

Abstract: In this paper, we use nonsymmetric iteration method to study existence, uniqueness and iteration of increasing operator which only satisfy some ordered condition while have no continuous condition and compact condition, new fixed point are obtained. Finaly, application to nonlinear equation on.

Key words: Increasing operator; Normal cone; fixed point