文章编号:1005－0523(2004)01－0123－03

函数差分的矩阵表示及其应用

张爱平，陈志彬

(湖南冶金职业技术学院,湖南 株洲 412000)

摘要:利用矩阵的知识,将函数各阶差分表成的向量写成函数列的向量与一个矩阵的乘积,从而揭示函数差分与函数的内在联系,加深对函数差分表的认识.

关 键 词:函数列;差分向量;边沿元素

中图分类号:TU991.35　　　　**文献标识码**:A

1 预备知识

定义1 设 $P(x)$是 x 的已知函数,h 为常数,得函数序列:

$P(x), P(x+h), P(x+2h), \cdots, CP(x+kh), \cdots$

令,$\triangle^{i}P(x)=\triangle^{i-1}P(x+h)-\triangle^{i-1}P(x)$,其中$\triangle^{0}P(x)=P(x)$($i=0,1,2,3,\cdots$)则称$\triangle^{i}P(x)$为函数P(x)关于步长 h 的 i 阶差分.

定义2 将$(a+1)^n$依二项式定理展开,将展开的项顺次地按 $n=0,1,2,\cdots$作为相应的列排列成如下的上三角形表

$$\begin{array}{cccccc}
1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & \cdots \\
 & 1 & 2a & 3a^2 & 4a^3 & \cdots \\
 & & 1 & 3a & 6a^2 & \cdots \\
 & & & 1 & 4a & \cdots \\
 & & & & 1 & \cdots
\end{array}$$

取上表的前 n 列,将下三角形位置上的元素以0补齐,得到 $n\times n$ 阶矩阵.

该矩阵记为 $\boldsymbol{P}_{n-1}[a]$.即 $\boldsymbol{P}_{n-1}[a]=\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots \\ 0 & 1 & 2a & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}$

可以证明矩阵 $\boldsymbol{P}_{n-1}[a]$的逆矩阵 $\boldsymbol{P}_{n-1}^{-1}[a]P_{n-1}[a]$

定义3 设 $P(x)$为已知函数,在步长 h 的函数列$P(x), P(x+h), \cdots, P(x+kh), \cdots$中,连续取 $k+1$ 个

收稿日期:2003－03－10

作者简介:张爱平(1967－),女,湖南泠水江人,讲师.

元素构成向量$(P(x),P(x+h),\cdots,P(x+kh)$称它为 $k+1$ 维步长 h 的函数行向量;称$(\triangle^0 P(x),\triangle P(x),\cdots,\triangle^k P(x))$为 $k+1$ 维差分向量.

定义 4 由函数列及函数的各阶差分构成的如下表:

$$\begin{array}{ccccccccc} P(x_0) & & P(x_0+h) & & P(x_0+2h) & & P(x_0+3h) & & P(x_0+4h)\cdots \\ & P(x_0) & & P(x_0+h) & & P(x_0+2h) & & P(x_0+3h)\cdots & \\ & & \triangle^2 P(x_0) & & \triangle^2 P(x_0+h) & & \triangle^2 P(x_0+2h)\cdots & & \\ & & & \triangle^3 P(x_0) & & \triangle^3 P(x_0+h)\cdots & & & \\ & & & & \cdots & & & & \end{array}$$

称这张表为函数 $P(x)$取初始值 x_0 的差分表;称 $P(x_0),\triangle P(x_0),\triangle^2 P(x_0),\cdots$为差分表左边沿元素.

2 主要结论

定理 1 已知 $k+1$ 维步长为 h 的函数行向量

$A:(P(x),P(x+h),\cdots,P(x+kh))$则 $k+1$ 维差分向量

$$(\triangle^0 P(x),\triangle P(x),\cdots,\triangle^k P(x))=(P(x),\triangle P(x+h),\cdots,P(x+kh))P_k[-1]$$

证明

将行向量$(P(x),P(x+h),\cdots,P(x+kh))$左乘矩阵 $P_k[-1]$的第 $i+1$ 列得

$\triangle^i P(x)=\sum\limits_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}P(x+jh)C_i^j$……①用数学归纳法证明该等式即可

当 $i=1$ 时,$\triangle P(x)=P(x+h)-P(x)$,等式①成立

不防假设 $i=q$ 时,等式①成立即:$\triangle^q P(x)=\sum\limits_{j=0}^{1}(-1)^{q-k}P(x+jh)C_q^j$

当 $i=q+1$ 时,$\triangle^{q+1}P(x)=\triangle^q P(x+h)-\triangle^q P(x)$

$$\begin{aligned}\triangle^{q+1}P(x)&=\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}P[x+(j+1)h]C_q^j-\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}P(x+jh)C_q^j\\ &=P[x+(q+1)h]+\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^{q-j}P[x+(j+1)h]C_q^j+(-1)^{q+1}P(x)+\\ &\quad\sum_{q=0}^{q-1}(-1)^{q-j}P[x+(j+1)h]C_q^{j+1}\\ &=P[x+(q+1)h]+(-1)^{q+1}P(x)+\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^{q-j}P[x+(j+1)h](C_q^j+C_q^{j+1})\\ &=P[x+(q+1)h]+(-1)^{q+1}P(x)+\sum_{j=1}^{q}(-1)^{q-j+1}P(x+jh]C_{q+1}^j\\ &=\sum_{j=0}^{q+1}(-1)^{(q+1)-j}P(x+jh)C_{q+1}^j\end{aligned}$$

综合以上的证明,由归纳法得$\triangle^i P(x)=\sum\limits_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}P(x+jh)C_i^j$ 等式成立.

定理 2 已知 $k+1$ 维差分向量$(\triangle^0 P(x),\triangle P(x),\cdots,\triangle^k P(x))$,则函数行向量$(P(x),P(x+h),\cdots,P(x+kh))=(\triangle^0 P(x),\triangle P(x),\cdots,\triangle^k P(x))P_k[1]$

证明由定理 1 得:

$$(\triangle^0 P(x),\triangle P(x),\cdots,\triangle^k P(x+kh))=(P(x),P(x+h),\cdots,P(x+kh))P_k[-1]$$

于是$(P(x),P(x+h),\cdots,P(x+kh))=(\triangle^0 P(x),\triangle P(x),\cdots,\triangle^k P(x+kh))P_k^{-1}[-1]$

因为 $P_k^{-1}[-1]=P_k[1]$

所以有$(P(x),P(x+h),\cdots,P(x+kh))=(\triangle^0 P(x),\triangle P(x),\cdots,\triangle P(x+kh))P_k[1]$

推论 1 已知函数 $P(x)$的 i 阶差分行向量$(\triangle^i P(x),\triangle^i P(x),\cdots,\triangle^i P(x+kh))$

则差分向量

$(\triangle^i P(x),\triangle^{i+1}P(x),\cdots,\triangle^{i+k}P(x))=(\triangle^i P(x),\triangle^i P(x+h),\cdots,\triangle^i P(x+kh))P_k[-1]$

推论 2　已知函数的差分向量$(\triangle^i P^{(x)},\triangle^{i+1}P^{(x)},\cdots\triangle^{i+k}p^{(x)})$,则行向量$(\triangle^i P^{(x)},\triangle^i P(x+h),\cdots,\triangle^i P(x+kh))=(\triangle^i P^{(x)},\triangle^{i+1}P^{(x)},\cdots\triangle^{i+k}P(x))P_k[1]$

推论 3　已知 $p(x)=\sum_{j=1}^{N}a_j p_j(x)$,(其中 $a_1,a_2\cdots,a_N$ 为常量),则

$(\triangle^i P(x),\triangle^{i+1}P(x),\cdots,\triangle^{i+k}P(x))=\sum_{j=1}^{N}a_j(\triangle^i P_j(x),\triangle^i+1P_j(x),\cdots,\triangle^{i+k}P_j(x))$

推论 4　函数 $p(x)$的差分表,由左边沿上的元素

$\triangle^{-}P(x_0),\triangle P(x_0),\triangle^2 P(x_0),\cdots$唯一确定.

定理 3　设函数 $P(x)=x^n$,则 $P(x)$的第 $n+1$ 阶差分全为零.

命题 1　设 $p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ 是 n 次多项式则$p(x)$的第 $n+1$ 阶差分全为零.

命题 2　多项式函数的差分如果满足:$\triangle^k p(x)=\begin{matrix}1 & k=i\text{ 时}\\ 0 & \text{其它}\end{matrix}$ $(k=0,1,2,\cdots)$时,则

$$p(x)=(x(x-h)\cdots(x-(i-2)h))/(i-1)!\quad h^{i-1}$$

3　应用

例 1　将多项式函数 $p(x)=x^3+x^2-3x+2$ 用函数列 $1,x,x(x-1),x(x-1)(x-2)$线性表示

解　由于 $p(x)$是三次多项式,则 $p(x)$的四阶差分全为零,取步长 $h=1$ 的函数列:$p(0)=2\quad p(1)=1$
$p(2)=8\quad p(3)=29$

由定理 1 得:$(\triangle^0 p(0),\triangle p(0),\triangle^2 p(0),\triangle p^3(0))=(p(0),p(1),p(2),p(3))\quad p_3[-1]$

$$=(2,1,8,29)\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-2&3\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{bmatrix}=(2,-1,8,6)$$

由命题 3 得:$x^3+x^2-3x+2=2-x+\frac{8}{2!}x(x-1)+\frac{6}{3!}x(x-1)(x-3)$

$$=2-x+4x(x-1)+x(x-1)(x-2)$$

例 2　求$\sum_{i=1}^{n}i^4$

解　设 $S(0)=0\quad S(n)=\sum_{i=1}^{n}i^4$,取步长 $h=1$

因为　$\triangle S(n)=S(n+1)-S(n)=(n+1)^4$ 是一个关于的 4 次多项式

所以　$S(n)$是一个五次多项式且 $S(n)$的六阶差分全部为零

取函数列:$S(0)=0\quad S(1)=1\quad S(2)=17\quad S(3)=98\quad S(4)=354\quad S(5)=979$

由定理 1 得:

$(\triangle^0 S(0),\triangle^2 S(0),\triangle^3 S(0),\triangle^4 S(0),\triangle^5 S(0))=(0,1,17,98,354,979)\quad P_5[-1]$

$$=(0,1,17,98,354,979)\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&1&-1\\0&1&-2&3&-4&5\\0&0&1&-3&6&-10\\0&0&0&1&-4&10\\0&0&0&0&1&-5\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}=(0,1,15,50,60,24)$$

于是由命题 3 得:$p(x)=n+15C_n^2+50C_n^3+60C_n^4+24C_n^5$

综上,矩阵 $P_{n+1}[-1]$,$P_{n+1}[1]$在差分表中起着重要的作用,本文通过这两个矩阵将函数列行向量与差分向量有机地结合起来,特别是按照这种计算方法通过计算机编程,更能有效地实现级数$\sum_{i=1}^{n}i^m$ 前 n 项的求和,甚至在求解等距插值多项式及曲线拟合中也有一定地应用.　(下转第 135 页)

参考文献：

[1] 胡永煊，佟为明，等．特定消谐 PWM 技术中非线形方程组解法的研究．现代电源技术(1)，中国电源学会主编，科学出版社，1997，2：136～142．

[2] 佟为明，陈向阳，等．变频电源特定消谐技术中非线性方组解法的研究[J]．中国电机工程学报，1998，(5)：54～57．

[3] 周青苗，马瑞卿，吴　斌．按谐波抑制原理形成 PWM 的新方法[J]．电力电子技术，1997，(3)：72～73．

[4] 陈　新，谢少军．用开关点预置 SHEPWNM 控制方案实现变换器调压[J]．电力电子技术，2000，(2)：19～22．

[5] 佟为明，陈向阳，等．一种输出高质量正弦波的变频电源[J]．低压电器，1998，(2)8～9．

[6] 高　桥．电力变换装置 PWM 制御方式[M]．电气学会东京支部大会(昭 60)．

[7] 王兆安，张良金，译．电力半导体变流电路[M]．北京：机械工业出版社，1993，1，156～160．

[8] 张　立，赵勇健．现代电力电子技术[M]．北京：科学出版社，1992，9，216～222．

Study on the Method of Producing PWM Waveforms According to Harmonic-suppressing Theory

LIU Fu-zhi，LIAO Yu-bo，WANG Liang

(School of Nature Science，East China Jiaotong Uni.，Nanchang 330013，China)

Abstract: Through researching the rule of producing PWM waveforms according to Harmonic-suppressing theory，this paper puts forth the existing problem and direction of improving SHE technique.

Key words: harmonic-suppressing；PWM wave；problem

(上接第 125 页)

参考文献：

[1] 李盘杆，王天明，译．组合学导引[M]．武汉：华中工学院出版社，1982．

[2] 李　庆，关　治，白峰杉，编．数值计算原理[M]．北京：清华大学出版社，2000．

Expression and Application of the Function Defference Matrixes

ZHANG Ai-ping，CHEN Zhi-bing

(Hunan Metallurgical and Technical Institute，Zhuzhou 412000，China)

Abstract: The paper makes use of the knowledge of mutrixes，and the vector of function row that expresses the every grade difference of function as the vector is made into the product of function row and a matrix，which，thereby，bring light the internal relation of function difference and function，increases knowledge of function difference list.

Key words: function-row；difference-vector；edge of elements