文章编号:1005-0523(2004)01-0126-03

可靠性试验数据的统计分析法

丘冠英

(嘉应学院数学系,广东 梅州 514015)

摘要:应用统计理论方法分析可靠性试验数据具有深远的理论意义,在实践中有良好的作用.作者就对之作了些较深入的思考,并展开了科学论述.

关 键 词:产品;可靠性试验数据;方差;似然函数;极在似然估计;置信度(限)

中图分类号:G633 **文献标识码**:A

由于可靠性试验属于可靠性工程的重要一环,而它的数据被加工、处理、分析对研究可靠性工程来说必将不容忽视,因此针对这样的单元产品试验数据和复杂产品可靠性评估用统计理论方法进行分析.

1 用统计学分析单元产品试验数据

1) 成败型单元产品可靠性

如果产品每次试验(检)只可能成功或失败(合格或不合格),假设在一个独立试验序列中每次试验成功概率R恒定不变(贝努利概型),则n次试验出现的成功次数S服从二项概率分布(似然函数),即

$$L(R)=\begin{pmatrix} n \\ s \end{pmatrix} R^{S}(1-R)^{n-S}$$

令 $\dfrac{dL(R)}{dR}=\dfrac{d}{dR}\text{In } L(R)=0$ 则得 $\hat{R}=s/n$.

这就是参数 R 的极大似然估计.容易求得,它在一定条件下是具有一些最优性质,但不总是无偏的,且无失效时不适用.该估计的方差为

$$\sigma^2(\hat{R})=R(1-R)/n$$

当子样 n 小时,方差大,要慎用.

实际上更有用的是区间估计.可靠性的单侧置信下限为 R_L.

$$P\gamma(R_L\leqslant R)\geqslant\gamma$$

其中 γ 为置信度,R_L 由下式确定($F=n-s$):

$$\sum_{x=0}^{F}\binom{n}{x}R_L^{n-x}(1-R_L)^x=1-\gamma.$$

根据试验结果(n、F)及要求的置信度 γ,查国家标准GB4087.3-85,可以查得 R_L.

双侧区间估计为[R_L, R_U]:

$$P\gamma(R_L\leqslant R\leqslant R_U)\geqslant\gamma,$$

其中 R_L, R_U 由下式确定

$$\sum_{x=0}^{F}\binom{n}{s}R_L^{n-x}(1-R_L)^*=1-((1+\gamma)/2),$$

$$\sum_{x=0}^{F-1}\binom{n}{s}R_U^{n-x}(1-R_U)^*=(1+\gamma)/2,$$

其中,R_L, R_U 分别由(n, F)及 $1-((1+\gamma)/2)$;(n, $F-1$)及 $(1+\gamma)/2$ 查GB4087.3-85来确定.

2) 单元产品性能可靠性

设产品某项性能指标 x 是正态分布 $N(\mu,\sigma)$ 的随机变量.抽样几个产品测得 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,据此评估未知参数 μ, σ 的方法如下.

x 在以 x_i 为中心,长度为 $\triangle x$ 的区间内的概率为:

收稿日期:2003-04-10

作者简介:丘冠英(1964-),男,广东梅县人,广东嘉应学院副教授.

$$f(x_i)\cdot\triangle x=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\cdot\triangle x\right],$$

$x_1, x_2\cdots x_n$ 的概率(似然函数)为：

$$L(\mu,\sigma)=\frac{\triangle x}{\sigma\sqrt{2\pi}}^{n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right].$$

令 $\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma)}{\partial u}=0$ 及 $\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma)}{\partial u^2}=0$，得极大似然估计

$$\hat{\mu}=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

下面讨论性能可靠性的区间估计．若 a 为给定值，定义性能可靠性 $R=R_\gamma(x\geqslant a)$，则有 $a=\mu-\mu_{1-R}\cdot\sigma$，

其中 μ_{1-R} 为标准正态分布的 $1-R$ 下侧分位点．因为 μ,σ 未知，如选系数 K 使得

$$P_r(\bar{x}-Ks\leqslant\mu-\mu_{1-R}\sigma)=\gamma,$$

则可认为 $x\geqslant\bar{x}\geqslant Ks$ 的概率至少为 R 的置信度为 γ，式中 $S=(\hat{\sigma}^2\frac{n}{n-1})^{1/2}$.

令性能指标下限 $L=\bar{x}-Ks$，即容许限系数 $K=\frac{\bar{x}-L}{S}$，

由 n, K, γ 反查国家标准 GB4885－85，可得 R 值，即 $x\geqslant L$ 的性能可靠性．

若令性能指标上限 $M=\bar{x}+Ks$，即 $K=(M-\bar{x})/s$，同样查 GB4885－85，可查得 $x\leqslant M$ 的性能可靠性．

若要求 $L\leqslant x\leqslant M$，BC

$$P_{\bar{x},s}\{P_r(x\leqslant\bar{x}-K_1S)\leqslant P_1 \text{ 且 } P_r(x\geqslant\bar{x}+K_2S\leqslant P_2\}=\gamma$$

就是要以置信度 γ 保证，性能参数高于 $\bar{x}+K_2S$ 的概率不大于 P_2，低于 $\bar{x}-K_1S$ 的概率不大于 P_1，其中 $P_1, P_2\ll1$．为求得 P_1、P_2，只要令 $K_1=(\bar{x}-L)/S$，$K_2=(M-\bar{x})/S$，并由 γ, n 反查航天部标准 QJ－1384 正态分布双侧容许限系数表可得 P_1, P_2，则双尾控制下性能可靠性置信下限为 $R_L=1-(P_1+P_2)$．

3) 单元产品平均寿命(指数分布的情形)

设某电子产品抽取几个样品，测得寿命数据为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$；要求估计平均寿命．

$t_1, t_2\cdots t_n$ 的概率密度为 $L(\lambda)=\lambda^n[\exp(-\lambda\sum_{i=1}^{n}t_i]$．

令 $\frac{d}{d\lambda}\ln(L\lambda)=0$，解得 $\lambda=n/\sum t_i=n/T^*$，即 $\hat{\theta}=T^*/n$．

这就是失效率和平均寿命的极大似然估计．

上述办法是将所抽 n 个样品试验到全部失效，叫做完全寿命试验．它只适用于某些电子设备，而对于长寿电子元器则使用截尾寿命试验的办法，按截尾方式分为定数、定时、逐步截尾，它们又各分为有替换和无替换两类．

在指数分布下各种截尾试验的平均寿命估计公式以列表形式完全能表示出来(略)．其它分布类型的寿命试验和各种寿命试验、电子元器件失效率试验等的统计分析，可参考 GB2689．1～2689．4，GB5080，GB1772 等标准．

2　复杂产品(系统)可靠性评估)

对于由许多不同单元组成的复杂产品，特别是导弹、卫星等大型复杂系统，当然在原理上也可以按单元产品可靠性试验和评估方法 做，但在实际上受人力、资金、时间限制，因此发展了金字塔式系统可靠性综合与评估方法，就是充分利用元件、部件、整机、分系统、系统各级的试验信息(下大上小)，逐级向上折合，以评定全系统可靠性．但系统结构类型不同(串联、并联、储备、表决、复杂网络等)，各组成单元的失效分布类型不同(常见有成败型、指数人布或威布尔分布寿命型、应力——强度或性能指标正态分布型)，如何从单元综合出系统可靠性认识值的分布，数字困难很大，对于小子样大系统尤甚．国内外已经发展了若干个学派方法，而其中频率(经典)学派较为成熟．因此本文对此较为成熟的经典法作如下思考性的论述：

1) 成败型串联系统可靠性经典严格置信限

R．J．Buehler 在 1957 年提出，成败型串联系统可靠性严格置信下限

$$L_\gamma(X_j)=\inf\{R\mid\sum_{K=j}^{M}B_K=1-\gamma\},$$

其中　$$B_k=\prod_{i=1}^{m}\binom{n_i}{x_{i_k}}P_i^{x_{i_k}}(1-P_i)^{n-x_{i_k}}$$

$$N=\prod_{i=1}^{m}(n_i+1)$$

这里 P_i 为单元 i 的可靠性，n_i 为试验次数，x_i 为成功次数，

$i=\overline{1,m}$；X_j 为观察到的 m 维试验向量，N 为可能的试验向量总数．

$L_\gamma(X_j)$必须满足：

精确性　$P_\gamma\{R\geqslant L_\gamma(X_j)\}\geqslant\gamma, 0\leqslant R\leqslant1$；

正确性　$L_\gamma(X_j)\leqslant L_\gamma(X_j)$，若 $X_j<X_k$；

最优性　$L_\gamma(X_j)$应尽可能大.

故㊉式要求对 N 个试验向量接正则性条件排序，式中似然函数 B_k 应对等于或优于 X_j 的所有试验向量求和.

2) 成败型串联系统可靠性近似置信限

四十年来由于大型复杂系统可靠性评估的需要，加上严格置信限理论尚存在困难，所以发展了多种近似置信限方法.

极在似然估计法(MLE)根据极大似然估计在大样本情形下渐近服从正态分布，修正极大似然估计法(MML)则取极大似然理论下被估子样的方差等于二项分布(成败型)的方差. MML 法计算简单且较准确，但不能考虑无失效单元的影响. 逐次压缩法(SR)在试验次数最小单元无失效时对单元试验数据作 m－1 次压缩，信息损失多，结果保守. CMSR 法把 MML 法和 SR 法结合起来使用，取各自的优点而克服其缺点. 即在试验次数最少的单元无失效时只进行一次压缩(不同于 SR 法进行 m－1 次压缩)，然后应用 MML 折合公式；如果串联系统中不存在试验次数最少的无失效单元，则 CMSR 法直接等效于 MML 法.

设串联系统各单元试验次数 $n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_m$，其中有 j 个单元无失效. 不妨记为

$n_k=x_k$，$k=m-j+1, m-j+2,\cdots,m$；

$n_l\neq x_l$，$l=1,2,\cdots,m-j$；

CMSR 法的步骤是：

(1)据有关定理，仅考虑后 j 个单元试验结果等效于最后一个单元进行了试验

$n'_m=n_m$，$x'_m=x_m$ 且已知 $n_m=x$.

(2)将$(n'_m, x'_m,)$和(n_{m-j}, x_{m-j})按 SR 法进行一次压缩和综合可得

(n'_{m-j}, x'_{m-j}).

(3) 数据列 (n_1, x_1)，$(n_2, n_2)\cdots(n_{m-j-1}, x_{m-j-1})$，$(n_{m-j}, x_{m-j})$满足 MML 法应用条件，可用 MML 折合公式求系统等效率验结果(n, x).

有关定理保证了，在按单元试验次数排序中，当 j 个无失效单元凌乱地出现时，CMSR 法仍成立.

参考文献：

[1] 曹晋华，程　侃. 可靠性数学引论[M]. 北京：科学出版社，1996.

[2] 复旦大学编. 概率论第二册数量统计[M]. 北京：人民教育出版社，1979.

Profound Explanation about Analysing Reliablity Test Datas by Applying Statistics

QIU Guan-ying

(Department of maths，JiaYing University，Meizhou 514015，China)

Abstract: It is both significant theory meaning and very well practical function that analises reliability test datas，so the paper's author will deal with more completely about it and illustrate it scientifically.

Key words: products；reliability test datas；Variance；likelihood function；maximum likelihood estimate；reliability degree