

文章编号: 1005-0523(2005)01-0007-05

各向异性两相材料界面端部的奇性应力指数

平学成^{1,2}, 陈梦成¹, 谢基龙², 李强²

(1. 华东交通大学, 江西 南昌 330013; 2. 北京交通大学 机电学院, 北京 100044)

摘要:提出了一个新的、基于位移的、求解各向异性两相材料界面端部奇性应力指数的非协调元特征分析法. 该方法与过去的有限元特征分析方法^[8]相比的显著特点是: 导出虚功原理的出发点不同; 有限元单元形式为非协调元; 楔形体端部邻域内的位移场假定没有采用奇异变换技术. 运用该方法可以直接求解各向异性两相材料界面端部附近奇性应力指数, 计算结果表明, 本文方法较原有方法使用的单元少而且精度高.

关键词:两相材料; 界面端; 奇性应力指数; 非协调元有限元法

中图分类号: O346.1

文献标识码: A

0 引言

复合材料奇性场的求解方法中, 大体有解析法和数值法两种. 解析法^[1~4]有理论性强和精度高等优点. 数值方法可以处理一些解析方法难以求解的楔形体和联接体端部的奇性应力指数, 其中, 有限元法^[5~10]应用广泛. 本文主要以文^[8]的基本思想为线索, 从应力平衡方程和楔形体边界条件构成的弱式控制方程出发, 导出一个更为简单的、基于位移的特征问题虚功原理. 根据这个原理, 采用一维有限元分析技术, 沿着楔形体端部邻域近似场周边进行单元离散, 继而建立一个分析楔形体端部近似场的标准特征矩阵方程. 为进一步提高数值结果的精度和减少单元的使用, 本文的有限元单元形式采用一维非协调元方法^[11]. 最后, 本文运用非协调元特征分析法计算平面应力条件下各向异性两相材料界面端部的奇性应力指数, 以检验其有效性和精确性.

1 基本原理

1.1 控制方程的弱式

图 1 是一个两相材料楔形体示意图. 该问题包括以下几个控制方程:

1) 应力平衡方程

$$\frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\sigma_{\theta})}{\partial \theta} - \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \frac{\partial(\sigma_{\theta\theta})}{\partial \theta} + \frac{\partial(r\sigma_{r\theta})}{\partial r} + \sigma_{r\theta} = 0 \quad (1)$$

2) 楔形体边界条件

$$\sigma_{\theta\theta}|_{\theta=-\alpha_1} = \sigma_{r\theta}|_{\theta=-\alpha_1} = \sigma_{\theta\theta}|_{\theta=\alpha_2} = \sigma_{r\theta}|_{\theta=\alpha_2} = 0 \quad (2)$$

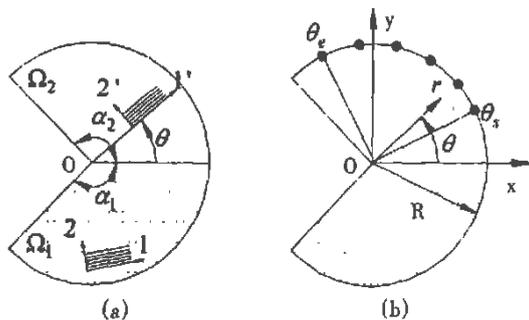


图 1 (a) 各向异性复合材料楔形体 (b) 有限元单元划分

收稿日期: 2003-12-11

作者简介: 平学成(1975-), 男, 黑龙江延寿人, 华东交通大学讲师, 博士生.

(1)式和(2)式中的为原点设在奇异点的极坐标, α_1 、 α_2 为相邻两材料的楔形角(如图 1a)。为了求解特征问题, 沿着的弧周界不施加任何条件, 那么由控制方程构成的弱式方程为

$$\int_0^R [(\delta u)^T \begin{Bmatrix} -\sigma_{r\theta} \\ -\sigma_{\theta\theta} \end{Bmatrix}] |_{\theta=\alpha_1} dr + \int_0^R [(\delta u)^T \begin{Bmatrix} \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{Bmatrix}] |_{\theta=-\alpha_2} |_{\theta=-\alpha_2} dr - \int_{\Omega} \frac{1}{r} (\delta u)^T \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial(\sigma_{r\theta})}{\partial \theta} - \sigma_{\theta\theta} \\ \frac{\partial(\sigma_{\theta\theta})}{\partial \theta} + \frac{\partial(r\sigma_{r\theta})}{\partial r} + \sigma_{r\theta} \end{array} \right\} d\Omega = 0$$

上式中 δ 为变分算子, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $u = \{u_r, u_{\theta}\}^T$ 。经过整理, (3)式简化为

$$\int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \int_0^R \delta \epsilon^T \sigma r dr d\theta - R \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} (\delta u)^T \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} |_{r=R} d\theta = 0 \quad (4)$$

式中 $\sigma = \{\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}\}^T$ 。(4)式很象用传统虚功原理导出的特征问题方程, 但应该说明的是, 这里第二项中的 $\sigma_{r\theta}$ 、 $\sigma_{\theta\theta}$ 是从变形位移得到的而不是预先给定的力边界条件。

1.2 有限元特征分析原理

为了求得楔形体端部奇性应力指数, 我们需要利用方程(4)来确定特征值。这里打算用有限元方法求解方程(4), 为此将楔形体端部邻域划分为若干个扇形区域。扇形周边($r=R$)每个一维单元角度范围为 $\theta_s \leq \theta \leq \theta_e$, 含 $n+2$ 节点(见图 1b)。极坐标角度 θ 按下列形式进行插值:

$$\theta = N_s \theta_s + N_e \theta_e \quad (5)$$

其中

$$N_s = \frac{1}{2}(1 - \xi), N_e = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (6)$$

式中 ξ 为自然坐标。在外载荷作用下, 周边单元内的位移场可用如下近似形式表示(位移假定与文^[8]不同):

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_{\theta} \end{Bmatrix} = r^{\lambda+1} \sum_{i=1}^{n+2} [N_i] \{q_i\} = r^{\lambda+1} [N] \{q\} \quad (7)$$

其中

$$[N_i] = \begin{bmatrix} N_s & 0 & N_{\lambda_j} & 0 & N_e & 0 \\ 0 & N_s & 0 & N_{\lambda_j} & 0 & N_e \end{bmatrix}, N_{\lambda_j} = \xi^{-1}(1 - \xi^2), j = 1, \dots, n$$

这里位移插值采用了一维非协调元形式, N_{λ_j} 为非协调插值点形函数。单元内节点位移向量为

$$\{q_i\}^T = \{U_{ir}, U_{i\theta}\}, i = s, j, e \quad (8)$$

通过位移场和应变的关系以及 Hooke 定律, 根据方程(5)~(7), 有:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{r\theta} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{r\theta} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n+2} [B_i] \{q_i\}, \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = [D][B] \{q\} \quad (9)$$

其中

$$[B] = r^{\lambda} (\lambda [B_a] + [B_b]),$$

$$[B_a] = \begin{bmatrix} N_s & 0 & N_{\lambda_j} & 0 & N_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_s & 0 & N_{\lambda_j} & 0 & N_e \end{bmatrix},$$

$$[B_b] =$$

$$\begin{bmatrix} N_s & 0 & N_{\lambda_j} & 0 & N_e & 0 \\ N_s & \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial N_s}{\partial \xi} & N_{\lambda_j} & \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial N_{\lambda_j}}{\partial \xi} & N_e & \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial N_e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial N_s}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial N_{\lambda_j}}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial N_e}{\partial \xi} & 0 \end{bmatrix},$$

[D] 是各向异性材料的弹性矩阵, 其表达式为

$$[D] = [T]^T [T] [S_p]^{-1} [T] [T],$$

$$\text{其中, } [S_p] = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\mu_{12}/E_2 & 0 \\ -\mu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix},$$

$$[T] =$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \theta_0 & \sin^2 \theta_0 & -\cos \theta_0 \sin \theta_0 \\ \sin^2 \theta_0 & \cos^2 \theta_0 & \cos \theta_0 \sin \theta_0 \\ 2\cos \theta_0 \sin \theta_0 & -2\cos \theta_0 \sin \theta_0 & \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0 \end{bmatrix},$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ -2\cos \theta \sin \theta & 2\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \text{ 表达式}$$

式 [D] 中, $[S_p]$ 为材料属性矩阵, E_1 、 E_2 、 μ_{12} 和 G_{12} 为材料常数; θ_0 为材料主轴 1(或)与整体坐标 x 轴的夹角(见图 1a)。

这样, 方程(4)用有限元格式表示为

$$\sum_{e=1}^m \int_{\theta_s^e}^{\theta_e^e} \int_0^R \delta \epsilon^T \{\sigma\} r dr d\theta - R \sum_{e=1}^m \int_{\theta_s^e}^{\theta_e^e} [(\delta u)^T \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix}]_{r=R} d\theta = 0 \quad (11)$$

其中 m 是离散单元总数。将方程(7)和(9)代入(11)可得到如下的图 1 所示全域的特征方程:

$$(\lambda^2 [P] + \lambda [Q] + [R]) \{q\} = 0 \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned}
 [P] &= \int_{\theta_0}^{\theta_c} ([B_a]^T [D] [B_a] - 2[N]^T [d] [B_a]) d\theta; \\
 [Q] &= \int_{\theta_0}^{\theta_c} ([B_a]^T [D] [B_b] + [B_b]^T [D] [B_a] \\
 &- 2[N]^T [d] ([B_a] + [B_b])) d\theta; \\
 [R] &= \int_{\theta_0}^{\theta_c} ([B_b]^T [D] [B_b] - 2[N]^T [d] [B_b]) d\theta,
 \end{aligned}$$

这里矩阵[d]是矩阵[D]的第一行和第三行。

引入 $\{p\} = \lambda \{q\}$, 将特征方程(12)转化为标准特征方程,即

$$\begin{bmatrix} -P^{-1}Q & -P^{-1}R \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix} \quad (13)$$

一般情况下,方程(13)的解将得到有限个特征值.根据方程(9)可知,应力、应变均正比于 r^λ .要保证应变能有界, λ (复根时为 $Re(\lambda)$,下同)必须大于-1,断裂力学感兴趣的范围是 $-1 < \lambda < 0$.在这种情况下, λ 决定了奇性应力强度,一般称其为奇性应力指数.

2 界面端奇性应力指数算例

图2是一个两相各向异性材料自由边问题,材料1和材料2的材料常数已由图中给出.显然,界面

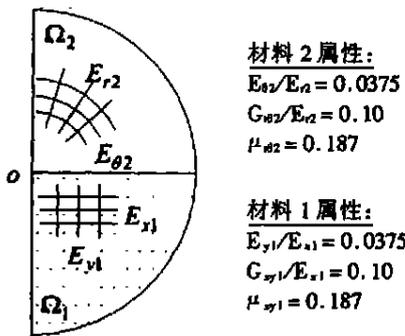


图2 两相材料自由边问题

端O点将产生奇异性.当 E_{x1}/E_{x2} 取不同的值时, o 点奇性应力指数的特征如图3所示.总的趋势是,奇异性随着 E_{x1}/E_{x2} 的增大而增大. $E_{x1}/E_{x2} < 1$ 的情况

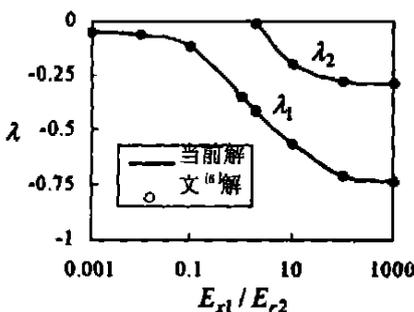


图3 两相材料自由边问题的奇性应力指数(平面应力)

下,只有一个奇性应力指数,当 $E_{x1}/E_{x2} = 0.001$ 时,相当于材料1受到夹持-自由边界条件,奇异性很小,奇性应力指 $\lambda_1 = -0.0573$; $E_{x1}/E_{x2} > 1$ 数;后,第二个奇性应力指数出现了.当 $E_{x1}/E_{x2} = 10\ 000$ 时,相当于材料2受到夹持-自由边界条件,奇异性也达到了最大值,极限值为 $\lambda_1 = -0.734442$ 、 $\lambda_2 = -0.286144$.可见,材料组合的时候, E_{x1}/E_{x2} 要尽量取小值,以免奇异性过大,造成联结面的破坏.从图3可以看出,当前解与文[8]的结果几乎重合.值得一提的是,本文只采用四个单元计算该问题,少于文[8]所用的单元数.

3 结论

本文推导出求解各向异性两相材料界面端部奇性应力指数的非协调元特征分析法,通过算例验证,有如下几点结论:(1)用本文提出的非协调元特征法求得的奇性应力指数与已有解几乎完全重合,可见本文数值解的精确性;(2)非协调元特征法可以显著降低有限元单元数,从而提高计算效率;(3)本文方法可以求得楔形体界面端所有的奇性应力指数,这是一些解析和数值方法做不到的.

参考文献:

- [1]Bogy D B, On the Plane Elastostatic Problem of a Loaded Crack Terminating at a Material Interface[J], Journal of Applied Mechanics, 1971, 38, 911~918.
- [2]Pageau S S, Joseph P F & Biggers S B Jr, The order of stress singularities for bonded and disbanded three material junctions [J]. Int. J. Solids Structures, 1994a, 31, 2979~2987.
- [3]高闯,汤任基. 两相材料倾斜裂纹的界面应力场[J]. 上海交通大学学报, 2001, 35(10): 1491~1496.
- [4]刘一华,许金泉,丁皓江. 纤维端部的界面裂纹分析[J]. 力学学报, 1999, 31(3): 285~291.
- [5]Raju I S & Crews J H Jr. Interlaminar stress singularities at a straight free edge in composite laminates[J]. Computers Structures, 1981, 14, 21~28.
- [6]Barsoum R S, Application of the finite element iterative method to the eigenvalue problem of a crack between dissimilar media [J]. Int. J. Num. Meth. Engng. 1988, 26, 541~554.
- [7]Gu L & Belytschko T, A numerical study of stress singularities in a two-material wedge [J]. Int. J. Solids structures, 1994, 31, 865~889.
- [8]Pageau SS, Joseph PF & Biggers SB, Jr. Finite element analysis of anisotropic materials with singular inplane stress fields[J]. Int. J. Solids Structures 1995, 32 571~591.

- [9]陈少华,周,高玉臣. 集中力拉伸楔体大变形理论分析及数值计算[J]. 力学学报, 2000, 32(1): 117~125.
- [10]邱信明,郭田福,黄克智. 应变梯度塑性 I, II 型平面应力裂纹的有限元解[J]. 中国科学(A 辑), 2000, 30(8):

760~768.

- [11]Chen M C & Sze KY. A novel hybrid finite element analysis of bimaterial wedge problems[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2001, 68: 1463~1476.

Stress Singularities near the Interface Edge of Anisotropic bi-Materials

PING Xue-cheng^{1,2}, CHEN Meng-cheng¹, XIE Ji-long², LI Qiang²

(1. East China Jiaotong University, Nanchang 330013; 2. School of Mechanical and Electrical Control Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstracts: In this paper a new non-confirming finite element eigenanalysis method based on displacement is developed to study the stress singularities near the interface edge. Compared with the existing finite element eigenanalysis method^[8] for asymptotic fields near the crack tip, current method has the following several characteristics: The jump-off that reduces the virtue work formula is different; when solving the characteristic formula with FEM, the form of the element is non-confirming element; the singular transformation technique is not used in the assumption of displacement fields surrounding the wedge tip. This paper uses the non-confirming finite element eigenanalysis method to compute the stress singularities near the interface edge of anisotropic multi-materials, the calculations show that present method needs fewer elements, and yields more accurate results than available methods do.

Key words: bi-material; interface edge; stress singularities; non-confirming finite element method

(上接第 3 页)

Mode I Penny-shaped Cracks in Transversely Isotropic Materials Revisited: Closed-type Solutions

CHEN Meng-cheng, XU Jian

(School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Starting rigorously from the three-dimensional theory of transversely isotropic elasticity, this paper presents exactly solutions of displacement jumps, singular stress fields and stress intensities factor near the front edge of mode I penny-shaped crack in transversely isotropic materials with the use of hypersingular integral equation method.

Key words: penny-shaped crack; stress intensity factor; hypersingular integral equation method