

文章编号: 1005—0523(2005)01—0145—04

关于图的符号 k -控制数

徐保根

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌, 330013)

摘要:给出了 n 阶连通图的符号 k -控制数的一个下界, 指出了此下界是最好可能的. 并确定了所有完全二部图的符号 k -控制数.

关 键 词:符号控制函数; 符号控制数; k -符号控制函数; k -符号控制数

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

1 引 言

本文所指的图均为无向简单图, 文中未说明的符号和术语同于文献[2, 7].

设 $G=(V, E)$ 为一个图, 其顶点集 $V=V(G)$ 和边集 $E=E(G)$, 对于任意 $u \in V(G)$, 则 $N_G(u)$ 为 u 点在 G 中的邻域, $N_G[u]=N_G(u) \cup \{u\}$ 为 u 点在 G 中的闭邻域, 在不混淆情况下, $N_G(u)$ 和 $N_G[u]$ 可分别简记为 $N(u)$ 和 $N[u]$. 若 $A, B \subseteq V$, 则记 $E(A, B)=\{uv \in E \mid u \in A, v \in B\}$.

对于一个实值函数 $f: V \rightarrow R$ 和一个子集 $S \subseteq V$, 则记 $f(S)=\sum_{u \in S} f(u)$. 对于任意 $v \in V(G)$, 则 $f(N[v])$ 可简记为 $f[v]$. 此外, $f(v)$ 称为 v 点在 f 下的标号, $|G|$ 表示图 G 的阶.

定义 1[1~2] 设 $G=(V, E)$ 为一个图, k 一个整数 ($1 \leq k \leq |G|$), 一个双值函数 $f: V \rightarrow \{-1, 1\}$ 如果满足条件: V 中至少有 k 个顶点 v 使得 $f[v] \geq 1$ 成立, 则称 f 为图 G 的一个符号 k -控制函数, 图 G 的符号 k -控制数定义为

$$\gamma_{ks}^{-11}(G) = \min\{f(V) \mid f \text{ 为图 } G \text{ 的符号 } k\text{-控制函数}\}.$$

特殊地, 当 $k=|G|$ 时符号 k -控制函数被称为符号控制函数, 并且此时符号 k -控制数也被称为符号控制数 (Signed domination number) (参见文献[2~6], 并记为 $\gamma_s(G)$).

对于图的符号控制数, 已有不少的结果, 我们也给出了其最好可能的下界

引理 1^[3] 对于 n 阶连通图 G , 则其符号控制数

$$\gamma_s(G) \geq \lceil \frac{-1 + \sqrt{1+8n}}{2} \rceil - n$$

并且此下界是最好可能的.

而对于图 G 的 k -符号控制数, 目前已知的结果甚少, E. H. Cockayne 等人[1~2]研究一些特殊图的一个符号 k -控制数, 确定了路、圈和星的符号 k -控制数, 得到了一些特殊图符号 k -控制函数界限. 如

收稿日期: 2004—06—10

作者简介: 徐保根 (1963—), 男, 江西南昌人, 教授.

中国知网 <https://www.cnki.net>

引理 2^[1~2] 对于任意 $n(n \geq 2)$ 阶树 T 和整数 $k(1 \leq k \leq n)$, 则

$$2(2k+4)/3 - n \leq \gamma_{ks}^{-11}(T) \leq 2(k+1) - n$$

引理 3^[3] 对于任意 $n(n \geq 3)$ 阶 r -正则图 $G(r \geq 2)$ 和整数 $k(1 \leq k \leq n)$, 均有

$$\gamma_{ks}^{-11}(G) \geq \begin{cases} k \frac{r+3}{r+1} - n & \text{当 } r \text{ 为奇数时;} \\ k \frac{r+2}{r+1} - n & \text{当 } r \text{ 为偶数时;} \end{cases}$$

而对于一般连通图, 还没有一个好的界限被获得, 本文将给出连通图符号 k -控制数的一个下界, 并指出此下界是最好可能的. 此外还确定了完全二部图的符号 k -控制数.

2 符号 k -控制数的下界

引理 4 对任意 $n(n \geq 3)$ 阶连通图 G 和整数 $k(1 \leq k \leq n-2)$, 均有

$$\gamma_{ks}^{-11}(G) \geq 4 - n$$

并且此下界是最好可能的.

证明 记 $G=(V, E)$, f 为 G 的一个符号 k -控制函数, 使得 $f(V) = \gamma_{ks}^{-11}(G)$, 由于 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶连通图且 $k \geq 1$, 故 V 中至少有两个顶点在 f 下的标号为 $+1$, 从而 $\gamma_{ks}^{-11}(G) = f(V) \geq 2 - (n-2) = 4 - n$. 即引理 4 给出的下界成立.

对于完全二部图 $K_{2, n-2} = (V_1 \cup V_2, E)$, 其中 $|V_1| = 2, |V_2| = n-2$. 定义 f 如下: 当 $v \in V_1$ 时 $f(v) = 1$; 当 $v \in V_2$ 时 $f(v) = -1$. 可见 f 是 $K_{2, n-2}$ 的一个符号 k -控制函数 ($1 \leq k \leq n-2$), 因此 $\gamma_{ks}^{-11}(K_{2, n-2}) \leq f(V_1 \cup V_2) = 4 - n$. 即有 $\gamma_{ks}^{-11}(K_{2, n-2}) = 4 - n$, 引理 4 给出的下界是最好可能的. 证毕.

引理 5 对任意 $n(n \geq 3)$ 阶连通图 G , 当 $k = n-1$ 时, 则有

$$\gamma_{ks}^{-11}(G) \geq \left\lceil \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2} \right\rceil - n$$

并且此下界是最好可能的.

证明 记 $G=(V, E)$, 设 f 是图 G 的一个符号 k -控制函数, 并且使得 $f(V) = \gamma_{ks}^{-11}(G)$. 令: $A = \{u \in V | f(u) = 1\}$, $B = \{u \in V | f(u) = -1\}$, 可见 $A \cup B = V, A \cap B = \emptyset$.

记 $|A| = s, |B| = n-s$, 从而有 $\gamma_{ks}^{-11}(G) = |A| - |B| = 2s - n$.

由于 $k = n-1$, 从定义 1 得知: V 中至多除 1 个顶点外, 其余每个顶点 v 均满足 $f[v] \geq 1$. (注意 $f(N[v])$ 简记为 $f[v]$)

不难验证: 当 $n=3$ 时 $s \geq 2$; 当 $n=4$ 或 5 时 $s \geq 3$. 即引理 5 对于 $n=3, 4, 5$ 时成立. 下设 $n \geq 6$.

令 $A_0 = \{v \in A | f[v] \geq 1\} \subseteq A$, 因此有 $|A_0| = s$ 或者 $s-1$.

情况 1 当 $|A_0| = s$ 时; 即 $A = A_0$, 此时 B 中除 1 个顶点 (记为 v_0) 外, 其余每个顶点 v 均满足 $f[v] \geq 1$. 注意到当 $v \in B$ 时 $f(v) = -1$, 故 B 中除 v_0 外的每个顶点至少邻接 A 中两个顶点. 由于 G 是连通图, 故 v_0 点或者至少邻接 A 中一个顶点, 或者 v_0 点在 B 中的邻点邻接 A 中 3 个顶点. 即有 $|E(A, B)| \geq 2(n-s-1) + 1$, 从而 A 中至少有一个顶点 u 邻接 B 中 $\frac{2(n-s-1)+1}{s}$ 个顶点, 而 $N[u]$ 至多有 s 个 A 中顶点, 由 $f[u] \geq 1$ 得知: $s - \frac{2(n-s-1)+1}{s} \geq 1$, 即有 $s^2 + s - 2n + 1 \geq 0$, 注意到 $n \geq 6$ 且 s 为整数, 我们有

$$s \geq \frac{-1 + \sqrt{8n-3}}{2} \geq \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}$$

情况 2 当 $|A_0| = s-1$ 时, 注意到当 $v \in B$ 时 $f(v) = -1$ 且 $f[v] \geq 1$, 故 B 中每个顶点至少邻接 A 中两个顶点, 从而至少邻接 A_0 中 1 个顶点, 即 $|E(A_0, B)| \geq n-s$, 故 A_0 中存在一个顶点 v , 使得 v 点邻接 B 中至少 $\frac{n-s}{s-1}$ 个顶点. 注意到 $N[v]$ 至多有 s 个 A 中顶点且 $f[v] \geq 1$, 因此 $s - \frac{n-s}{s-1} \geq 1$, 即 $s^2 - s - n + 1 \geq 0$, 由

s 为整数得知

$$s \geq \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}?$$

综合情况 1~2, 均有

$$\gamma_{ks}^{-11}(G) = 2s - n \geq \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2} - n$$

为了看到此下界是最好可能的, 下面构造一个 $n(n \geq 3)$ 阶连通图 G , 使得等式成立.

令 $s = \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}$?, 由于 $n \geq 3$ 故知 $s \geq 2$.

设 s 阶完全图 K_s , 记 $A = V(K_s) = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$, 在 u_1 点处增加 $n-s$ 条悬边, 这同时也增加了 $n-s$ 个悬挂点, 记之为 $B = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-s}\}$. 由于 $s^2 - s - n + 1 \geq 0$, 即 $n-s \leq (s-1)^2$, 故能将 B 中每个顶点均邻接 $A_1 = A \setminus \{u_1\}$ 中恰好 1 个顶点, 使得 A_1 中每个顶点至多邻接 B 中 $s-1$ 个顶点, 这样所得的图记为 $G = (V, E)$. 定义 f 如下: 当 $v \in A$ 时 $f(v) = 1$; 当 $v \in B$ 时 $f(v) = -1$. 可见, V 中除 u_1 点外其余 $k = n-1$ 个顶点 v , 均满足 $f[v] \geq 1$. 即 f 是图 G 的一个符号 k -控制函数, 因此 $\gamma_{ks}^{-11}(G) \leq f(V) = 2s - n$, 从而 $\gamma_{ks}^{-11}(G) = 2s - n$. 即引理 5 给出的下界是最好可能的. 证毕.

综合引理 4~5 及引理 1, 我们获得了下面的

定理 1 对任意 $n(n \geq 3)$ 阶连通图 G 和整数 $k(1 \leq k \leq n)$, 均有

$$\gamma_{ks}^{-11}(G) \geq \begin{cases} 4-n & \text{当 } 1 \leq k \leq n-2 \text{ 时;} \\ \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2} - n & \text{当 } k = n-1 \text{ 时;} \\ \frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2} - n & \text{当 } k = n \text{ 时} \end{cases}$$

并且此下界是最好可能的.

3 完全二部图的符号 k -控制数

本节给出完全二部图 $K_{m,n}(m \geq n \geq 2)$ 的符号 k -控制数.

定理 2 对于完全二部图 $K_{m,n}(m \geq n \geq 2)$ 和整数 $k(1 \leq k \leq m+n)$, 则有

1) 当 m 和 n 均为偶数时;

$$\gamma_{ks}^{-11}(K_{m,n}) = \begin{cases} 2-m & \text{当 } 1 \leq k \leq m \text{ 时;} \\ 2 & \text{当 } 1+m \leq k \leq m + \frac{n}{2} + 1 \text{ 时;} \\ 4 & \text{其它;} \end{cases}$$

2) 当 m 为奇数且 n 为偶数时;

$$\gamma_{ks}^{-11}(K_{m,n}) = \begin{cases} 2-m & \text{当 } 1 \leq k \leq m \text{ 时;} \\ 3 & \text{当 } m+1 \leq k \leq m + \frac{n}{2} + 1 \text{ 或 } n=2 \text{ 时;} \\ 5 & \text{其它;} \end{cases}$$

3) 当 m 偶数且 n 为奇数时;

$$\gamma_{ks}^{-11}(K_{m,n}) = \begin{cases} 3-m & \text{当 } 1 \leq k \leq m \text{ 时;} \\ 3 & \text{当 } m+1 \leq k \leq m + \frac{n+3}{2} \text{ 或 } n=3 \text{ 时;} \\ 5 & \text{其它;} \end{cases}$$

4) 当 m 和 n 均为奇数时;

$$\text{当 } m \neq 3 \text{ 时, } \gamma_{ks}^{-11}(K_{m,n}) = \begin{cases} 3-m & \text{当 } 1 \leq k \leq m \text{ 时;} \\ 4 & \text{当 } m+1 \leq k \leq m + \frac{n+3}{2} \text{ 或 } n=3 \text{ 时;} \\ 6 & \text{其它;} \end{cases}$$
$$\text{并且 } \gamma_{ks}^{-11}(K_{3,3}) = \begin{cases} 0 & \text{当 } 1 \leq k \leq 3 \text{ 时;} \\ 2 & \text{当 } k=4 \text{ 时;} \\ 4 & \text{当 } 5 \leq k \leq 6 \text{ 时;} \end{cases}$$

证明:略.

参考文献:

[1]E. J. Cockayne and C. M. Mynhardt. On a generalization of signed dominating function of graphs[J]. Ars. Combin., 1996, (43); 235~245.

[2]T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, Domination in graphs[M]. New York, 1998, 95~105.

[3]Zhongfu Zhang, Baogen Xu etc. A note on the lower bounds of signed domination numbers of a graph[J]. Discrete Math. 1999, (195); 295~298.

[4]Baogen Xu, On minus domination and signed domination in graphs[J]. 数学研究与评论, 2003, (4); 586~590.

[5]Baogen Xu, On signed edge domination numbers of graphs[J]. Discrete Math., 2001, (239); 179~189.

[6]J. H. Hattingh and E. Ungerer. The signed and minus k-subdomination numbers of comets[J]. Discrete Math., 1998, (183); 141~152.

[7]F. 哈拉里, 图论[M]. 上海: 上海科技出版社, 1980.

On Signed k-subdomination Numbers of Graphs

XU Bao-gen

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper we give a lower bound of the signed k-subdomination numbers for all connected graphs of order n, which is the best possible, and determine the signed k-subdomination numbers of the complete bipartite graphs.

Key words: signed dominating function; signed domination number; signed k-subdominating function; signed k-subdomination number