

文章编号: 1005—0523(2005)01—0149—03

与任意图 (m, r) —正交的 (g, f) —因子分解

桂国祥, 刘展鸿

(江西师范大学 数信学院, 江西 南昌 330027)

摘要: 设 G 是一个图, 用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示它的顶点集和边集, 并设 $g(x)$ 和 $f(x)$ 是定义在 $V(G)$ 上的两个整数值函数, 且对每个 $x \in V(G)$, 有 $\frac{5}{2}r - 1 \leq g(x) \leq f(x)$, 则图 G 的一个支撑子图 F 称为 G 的一个 (g, f) —因子, 如果对每个 $x \in V(G)$, 有 $g(x) \leq d_F(x) \leq f(x)$. 图 G 的 (g, f) —因子分解是指 $E(G)$ 能划分成边不交的 (g, f) —因子, 设 $F = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ 和 H 分别是图 G 的因子分解和子图, 若对所有 $1 \leq i \leq m$ 有 $|E(H) \cap E(F_i)| = r$, 则称 F 和 $H(m, r)$ —正交. 本文证明: 若 G 是一个 $(mg + m - 1, mf - m + 1)$ —图, H 是 G 中任一有 mr 条边的子图, 则 G 有一个 (g, f) —因子分解与 $H(m, r)$ —正交.

关键词: 图, 因子, 因子分解, (m, r) —正交

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

0 引言

本文所考虑的图皆指有限无向简单图. 设 G 是一个图, 分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示图 G 的顶点集和边集. 对于 $x \in V(G)$, 用 $d_G(x)$ 表示顶点 x 在 G 中的次数. 设 $g(x)$ 和 $f(x)$ 分别是定义在 $V(G)$ 上的非负整数值函数且对每个 $x \in V(G)$ 有 $g(x) \leq f(x)$, 则图 G 的一个 (g, f) —因子是图 G 的一个支撑子图 F , 使对任意的 $x \in V(G)$ 有 $g(x) \leq d_F(x) \leq f(x)$. 特别地, 若 G 本身是一个 (g, f) —因子, 则称 G 为 (g, f) —图. 若对任意的 $x \in V(G)$ 有 $mg(x) + m - 1 \leq d_F(x) \leq mf(x) - m + 1$, 则 G 为 $(mg + m - 1, mf - m + 1)$ —图. 若图 G 的边集能划分成 m 个边不相交的 (g, f) —因子 $F_1, F_2, \dots, F_m$, 则 $F = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ 称为图 G 的一个 (g, f) —因子分解. 设 H 是 G 的一个有 mr 条边的子图, 其中, m, r 为正整数, $F = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ 是 G 的一个 (g, f) —因子分解, 若对所有 $1 \leq i \leq m$ 有 $|E(H) \cap E(F_i)| = r$,

则称 F 和 $H(m, r)$ —正交. 其它未加说明的概念和记号见参考文献^[1].

文[3]证明了一个 $(mg + m - 1, mf - m + 1)$ —图 G , 其中 $g(x) \geq 2$, 存在与 G 中任意给定的子图 $2K_{1,m}$ 或 $2m$ —星或 $2m$ —对集 2 —正交的 (g, f) —因子分解. 文[5]证明了一个 $(mg + m - 1, mf - m + 1)$ —图 G , 其中, $g(x) \geq 4$, 存在与 G 的任一 $2m$ —路 2 —正交的 (g, f) —因子分解. 文[2]证明了一个 $(mg + m - 1, mf - m + 1)$ —图 G , 其中 $g(x) \geq 4$, 存在与 G 中任意给定的有 $2m$ 条边的子图 H 2 —正交的 (g, f) —因子分解. 本文证明了一个 $(mg + m - 1, mf - m + 1)$ —图 G , 其中 $g(x) \geq \frac{5}{2}r - 1$, 存在与 G 中任意给定的有 mr 条边的子图 $H(m, r)$ —正交的 (g, f) —因子分解. 文[2]是本文当 $r=2$ 时的情况

1 预备引理

设 $g(x)$ 和 $f(x)$ 分别是定义在 $V(G)$ 上的非负整数值函数且对每个 $x \in V(G)$ 有 $g(x) \leq f(x)$,

收稿日期: 2003—11—25

作者简介: 桂国祥(1981—), 男, 江西临川人.

中国知网 <https://www.cnki.net>

又设 S 和 T 是 G 的两个不相交子集. 记

$$\delta_G(g, f; S, T) = d_{G-S}(T)g(T) + f(S),$$

其中 $G-S$ 表示从 G 中去掉 S 及与 S 关联的所有边所得的 G 的子图,

$$f(S) = \sum_{x \in S} f(x), g(T) = \sum_{x \in T} g(x), d_{G-S}(T) = \sum_{x \in T} d_{G-S}(x).$$

现设 E_1, E_2 是 $E(G)$ 的不相交子集, 令

$$E_G(S, T) = \{xy \mid xy \in E(G), x \in S, y \in T\}, \text{ 且}$$

$$\text{记 } E_G(S, T) = |E_G(S, T)|.$$

$$D = V(G) - (S \cup T), E(S) = \{xy \in E(G) : x, y \in S\}, E(T) = \{xy \in E(G) : x, y \in T\}.$$

并记

$$E'_1 = E_1 \cap E(S), E''_1 = E_1 \cap E_G(S, D),$$

$$E'_2 = E_2 \cap E(T), E''_2 = E_2 \cap E_G(T, D).$$

且令

$$\alpha_G(S, T; E_1, E_2) = 2|E'_1| + |E''_1|,$$

$$\beta_G(S, T; E_1, E_2) = 2|E'_2| + |E''_2|,$$

$$\triangle_G(S, T; E_1, E_2) = \alpha_G(S, T; E_1, E_2) + \beta_G(S, T; E_1, E_2)$$

引理 1[2, 4] 设 G 是一个图, g 和 f 是定义在 $V(G)$ 上的两个整数值函数, 且对每个 $x \in V(G)$ 有 $0 \leq g(x) < f(x) \leq d_G(x)$, E_1, E_2 是 $E(G)$ 的两个不相交子集, 则图 G 有一个 (g, f) -因子 F , 使得 $E_1 \subseteq E(F)$, $E_2 \cap E(F) = \emptyset$ 当且仅当对 $V(G)$ 的任意不交子集 S 和 T , 有 $\delta_G(g, f; S, T) = f(S) + d_{G-S}(T) - g(T) \geq \triangle_G(S, T; E_1, E_2)$.

下面总假设 G 是一个 $(mg + m - 1, mf - m + 1)$ -图, $m \geq 1$ 是整数.

记: $p(x) = \max\{g(x), d_G(x) - (m-1)f(x) + m - 2\}$, $q(x) = \min\{f(x), d_G(x) - (m-1)g(x) - m + 2\}$

$$\triangle_1(x) = \frac{1}{m}d_G(x) - p(x), \quad \triangle_2(x) = q(x) - \frac{1}{m}d_G(x).$$

由 $p(x), q(x), \triangle_1(x)$ 和 $\triangle_2(x)$ 的定义, 有

引理 2[2] 设 $m \geq 2$ 是整数, 则对所有的 $x \in V(G)$, 有 $g(x) \leq p(x) \leq \frac{d_G(x)-1}{m} < \frac{d_G(x)+1}{m} \leq q(x) \leq f(x)$, 因此, $\triangle_1(x) \geq \frac{1}{m}, \triangle_2(x) \geq \frac{1}{m}$

由引理 2 易得下面引理:

引理 3[6] 对 $V(G)$ 的任意不交子集 S 和 T , 有 $\delta_G(p, q; S, T) = \triangle_1(T) + \triangle_2(S) + \frac{m-1}{m}d_{G-S}(T)$

$$+ \frac{1}{m}d_{G-T}(S).$$

引理 4 对 G 的任一 (p, q) -因子 F , $G-E(F)$ 为一个 $((m-1)g + m - 2, (m-1)f - m + 2)$ -图.

该引理的正确性由 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的记法可得

2 主要定理及其证明

定理 1 设 G 是一个 $(mg + m - 1, mf - m + 1)$ -图, g 和 f 是定义在 $V(G)$ 上的两个整数值函数, 且对每个 $x \in V(G)$ 有 $g(x) \geq \frac{5}{2}r - 1$, 则对于 G 中任意给定的一个有 mr 条边的子图 H , G 有一个 (g, f) -因子分解与 $H(m, r)$ -正交.

证明 当 $m=1$ 时, 结论显然成立. 下设 $m \geq 2$, $p(x), q(x)$ 定义同引理 2, 由引理 2 有:

$$g(x) \leq p(x) \leq \frac{d_G(x)-1}{m} < \frac{d_G(x)+1}{m} \leq q(x) \leq f(x),$$

且对 G 的任意不相交顶点子集 S, T , 均有

$$\delta_G(p, q; S, T) \geq \frac{1}{m}|T| + \frac{1}{m}|S| + \frac{m-1}{m}d_{G-S}(T) + \frac{1}{m}d_{G-T}(S).$$

设 H 是 G 的有 mr 条边的子图. 任取 $E_1 \subseteq E(H)$, 使 $|E_1| = r$, 又 $E_2 = E(H) - E_1$, 则 $|E_2| = (m-1)r$.

以下只需证明 G 有一个 (p, q) -因子 F , 使得 $E_1 \subseteq E(F)$ 而 $E_2 \cap E(F) = \emptyset$ (这样, 有引理 3 及归纳法可证明本定理的正确性). 据引理 2, 知 $0 \leq p(x) < q(x) \leq d_G(x)$. 由引理 1 的结论, 只要证对 G 的任意不相交子集 S, T 均有:

$$\delta_G(p, q; S, T) = f(S) + d_{G-S}(T) - g(T) \geq \alpha_G(S, T; E_1, E_2) + \beta_G(S, T; E_1, E_2).$$

为便利起见, 简记

$$\delta_G(S, T) = \delta_G(p, q; S, T)$$

$$\alpha = \alpha_G(S, T; E_1, E_2)$$

$$\beta = \beta_G(S, T; E_1, E_2)$$

注意以下事实:

$$(1) \text{ 对 } x \in V(G), d_G(x) \geq mg + m - 1 \geq \frac{5}{2}mr - 1;$$

$$(2) \alpha \leq \min\{2r, r|S|\};$$

$$(3) \beta \leq \min\{2(m-1)r, (m-1)r|T|\};$$

$$(4) d_{G-S}(T) \geq \beta.$$

下面对 S, T 进行讨论:

$$(1) S = \emptyset \text{ 且 } T = \emptyset, \text{ 则 } \alpha = 0, \beta = 0.$$

$$\delta_G(S, T) = d_{G-S}(T) - p(T) + q(S) \geq \alpha + \beta.$$

(2) $S = \emptyset$ 且 $T \neq \emptyset$, 此时 $\alpha = 0$. 则:

$$\delta_G(S, T) \geq \frac{1}{m} |T| + \frac{m-1}{m} d_G(T) \geq \frac{m-1}{m} \left(\frac{5}{2} mr - 1 \right) |T| \geq r(m-1) |T| \geq \alpha + \beta.$$

(3) $S \neq \emptyset$ 且 $T = \emptyset$, 此时 $\beta = 0$. 则:

$$\delta_G(S, T) \geq \frac{1}{m} |S| + \frac{1}{m} d_G(S) \geq \frac{1}{m} \left(\frac{5}{2} mr - 1 \right) |S| \geq r |S| \geq \alpha + \beta.$$

(4) $S \neq \emptyset$ 且 $T \neq \emptyset$, 分两种情形讨论:

情形 1 $1 \leq |S| \leq \frac{3}{2} mr - 1$.

$$\text{此时 } d_{G-S}(T) \geq \left(\frac{5}{2} mr - 1 - |S| \right) |T|.$$

$$d_{G-T}(S) + |T| \geq \left(\frac{5}{2} mr - 1 - |T| \right) |S| + |T| \geq \frac{5}{2} mr - 1 |T| + |T| = \frac{5}{2} mr - 1.$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } \delta_G(S, T) &\geq \frac{1}{m} (|T| + d_{G-T}(S)) + \frac{1}{m} |S| \\ &+ \frac{m-1}{m} d_{G-S}(T) \\ &\geq \frac{1}{m} \left(\frac{5}{2} mr - 1 \right) + \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m} \left(\frac{5}{2} mr - 1 - |S| \right) |T| \\ &\geq \frac{5}{2} r + r(m-1) |T| \geq \alpha + \beta. \end{aligned}$$

情形 2 $|S| \geq \frac{3}{2} mr$.

此时 (a) 当 $|T| < \frac{5}{2} mr - 1$ 时,

$$\begin{aligned} \text{由 } d_{G-T}(S) + |S| + |T| &\geq \left(\frac{5}{2} mr - 1 - |T| \right) |S| \\ |S| + |S| + |T| &\geq 4mr - 1. \end{aligned}$$

(b) 当 $|T| \geq \frac{5}{2} mr - 1$ 时, 有 $d_{G-T}(S) + |S| + |T| \geq |S| + |T| \geq 4mr - 1$.

由引理 3 及以上两式, 有

$$\begin{aligned} \delta_G(S, T) &\geq \frac{1}{m} (|T| + |S| + d_{G-T}(S)) + \frac{m-1}{m} \\ d_{G-S}(T) &\geq \frac{1}{m} (4mr - 1) + \frac{m-1}{m} \beta \\ &\geq 2r + \frac{2r(m-1)}{m} + \frac{m-1}{m} \beta \geq 2r + \frac{\beta}{m} + \frac{m-1}{m} \beta \\ &\geq \alpha + \beta. \end{aligned}$$

综上所述, 对 G 的任意不相交顶点子集 S, T 均有 $\delta_G(S, T) \geq \alpha + \beta$. 定理得证.

我们可以看到, 当 $r=2$ 时 $g(x) \geq \frac{5}{2} r - 1 = 4$,

即是文[2]所证明的定理.

参考文献:

- [1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications [M]. London: The Macmillan Press, 1976.
- [2] 周思中, 薛秀谦. 与任意图 2-正交的 (g,f)-因子分解 [J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2003, 37(1): 17~20
- [3] 汪长平, 纪昌明. 与几类子图 2-正交的 (g,f)-因子分解 [J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2000, 34(3): 260~263.
- [4] Yuan J, Yu J. Random (m, r)-orthogonal (g, f)-factorizable graphs [J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities, 1998, 13A(3): 311~318.
- [5] 汪长平. 与路 2-正交的 (g,f)-因子分解 [J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 1999, 33(1): 6~10.
- [6] 李国君, 刘桂真. 与任意图正交的 (g,f)-因子分解 [J]. 中国科学(A 辑), 1997, 27(12): 1083~1088.
- [7] 马润年, 高行山. 关于图的 (g,f)-因子分解 [J]. 应用数学和力学, 1997, 18(4): 381~384.
- [8] Liu Guizhen, Dong Henian. Orthogonal (g, f)-factorizations of bipartite graphs [J]. Math Acta Scientia, 2001, 21B(3): 316~322. 91

(g, f)-Factorizations (m, r)-Orthogonal to an Arbitrary Graph

GUI Guo-xiang, LIU Zhan-hong

(Dept. of Math, Jiangxi normal university, 330027, Nanchang)

Abstract: Let G be a graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$, and Let $g(x)$ and $f(x)$ be two integer-valued functions defined on $V(G)$ such as $\frac{5}{2} r - 1 \leq g(x) \leq f(x)$ for every $x \in V(G)$. Then a (g, f) -factor of G is a spanning subgraph F of G such as $g(x) \leq d_F(x) \leq f(x)$ for every $x \in V(G)$. The (g, f) -factorization of G is a partition of $E(G)$ into edge-disjoint (g, f) -factors. Let $F = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ and H be the factorization and a subgraph of G , respectively. If $F_i, 1 \leq i \leq m$, has exactly r edges in common with H , then it is said that F is (m, r) -orthogonal to H . This paper proves that for any mr -subgraph H of an $(mg + m - 1, mf - m + 1)$ -graph G , there exists a (g, f) -factorization (m, r) -orthogonal to H .

Key words: graph; factor; factorization; (m, r) -orthogonal