

文章编号: 1005—0523(2005)01—0152—04

浮点遗传算法在非线性方程组求解中的应用

曾 毅

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌, 330013)

摘要: 将非线性方程组的求解问题转化为函数优化问题, 利用浮点遗传算法适应值的分布和实数编码的特点, 通过缩小、移动搜索空间的方法, 将整体和局部寻优能力有机地结合起来, 求得非线性方程组的高精度的解. 数值模拟结果表明浮点遗传算法的有效性.

关 键 词: 浮点遗传算法; 非线性方程组; 搜索空间; 函数优化

中图分类号: O242.2

文献标识码: A

1 引 言

遗传算法是基于自然选择和基因遗传学原理的一种群体寻优的搜索算法. 特别适用于处理传统搜索方法难以解决的复杂的非线性问题. 在许多领域内得到广泛应用^{[1][2][3]}. 文献^[7]用改进的遗传算法求非线性方程组的解. 该算法基于二进制编码, 利用演化过程中适应值的分布和二进制编码的特点, 通过缩小、移动搜索空间的方法, 将整体和局部寻优能力有机地结合起来, 提高了遗传算法的收敛速度和解的精度. 本文将上述方法借鉴到实数编码的浮点遗传算法. 数值模拟表明浮点遗传算法提高了遗传算法的收敛速度和解的精度.

2 浮点遗传算法

2.1 算法简介

浮点遗传算法采用实数编码, 每个个体对应于搜索空间的一个点. 其实现过程可简述为:

步 1(初始化) 置随机产生初始种群, 确定算法的参数. 初始种群可记为

$X(0) = (X_1(0), X_2(0), \dots, X_N(0))$, 其中 N 为种群规模, $X_i(0)$ 为个体 ($i=1, 2, \dots, N$).

步 2(种群进化)

1) 评价个体适应值, 独立地从种群中按比例选择 $(N-1)$ 个个体作为父代.

2) 独立地从当前父代中选择 $(N-1)$ 对个体按交叉概率执行交叉操作, 得到 $(N-1)$ 个中间个体, 对得到的 $(N-1)$ 个中间个体按变异概率执行变异操作得到 $t+1$ 代种群的前 $(N-1)$ 个个体:

$$X_1(t+1), X_2(t+1), \dots, X_{N-1}(t+1).$$

3) 在 $X(t)$ 中选择出最优个体 $X^*(t)$, 并令 $t+1$ 代种群的第 N 个个体

$$X_N(t+1) = X^*(t).$$

步 3(搜索空间的调整)

根据 $t+1$ 第代的个体适应值分布和编码的特点, 对搜索空间进行动态调整, 并对落在新的搜索空间外的个体进行修复.

步 4(终止检验) 如果终止准则满足, 则输出 $X^*(t+1)$ 作为问题的近似解, 否则, 置 $t: t+1$ 转步 2.

2.1.1 选择算子

选择算子用来选择父代和淘汰个体, 目的是把好的个体复制到下一代, 或者通过配对交叉产生新

收稿日期: 2004—09—25

作者简介: 曾毅(1965—), 男, 江西吉安人, 副教授.

的个体再遗传到下一代.复制的原则是适应值较大的个体,赋予更大的选中概率.因此适应值愈大的个体有更多的机会繁殖后代,使其优良特性得以遗传和保留.

2.1.2 交叉算子

交叉算子用来提供不同个体的基因交换.两个父代个体 $X_i(t)$, $X_j(t)$ ($i, j=1, 2, \dots, N$), 如果它们都不是局部最优值,则在适应值较好点的领域一定存在适应值更好的个体.基于浮点遗传算法,我们选择均匀算术交叉算子,其具体执行过程为:对群体中的个体进行两两随机配对,依设定的交叉概率 p_c ,对每一对相互配对的个体 $X_i(t)$, $X_j(t)$,按下式进行算术交叉产生两个新个体

$$X_c(t) = \alpha X_i(t) + (1 - \alpha) X_j(t) \quad (1)$$

$$X_d(t) = \alpha X_j(t) + (1 - \alpha) X_i(t)$$

其中 α 为参数,由于适应值越大的个体越接近最优解,所以可以认为最优个体在适应值大的个体附近,对于均匀算子(1)式,当 α 取固定值时,显然不能反映上述特点,为此,令

$$\alpha = \frac{F(X_i(t))}{F(X_i(t)) + F(X_j(t))}, \text{ 其中 } F(X_i(t)),$$

$F(X_j(t))$ 为个体 $X_i(t)$ 的适应值.

若 $F(X_i(t)) \geq F(X_j(t))$,则取交叉后的个体为 $X_c = \alpha X_i(t) + (1 - \alpha) X_j(t)$.从加权和产生的新个体 X_c 来看, α 越大, X_c 就越接近 X_i .特别当 $F(X_i(t))$ 远大于 $F(X_j(t))$ 时, X_c 就离 X_i 很近,从而起到在适应值大的个体附近进行搜索的目的.

2.1.3 变异算子

遗传算法强调的是交叉算子的功能.解的进化主要靠选择机制和交叉策略来完成.变异操作的作用是使群体摆脱进化陷入搜索空间的某个局部区域.本文采用的变异操作为,当当前代的个体按变异概率需作变异操作时,在搜索空间中取随机点替换变异的个体.由于保留了每一代的最优个体,及变异算子遍历性,从而保证算法是全局收敛的.

2.1.4 搜索空间的调整

设第 t 代的种群为 $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t))$,

(2)

个体 $X_i(t)$ 的编码为 $X_i(t) = x_{i1}(t), x_{i2}, \dots, x_{in}(t)$ 且 $x_{ij} \in [x_j^L, x_j^U]$ ($j=1, 2, \dots, n$), 其中 n 为优化问题所含变量的个数.于是,所求问题的搜索空间为 $[x_1^L, x_1^U] \times [x_2^L, x_2^U] \times \dots \times [x_n^L, x_n^U]$.为了确定最优解所在的区间,我们将群体的个体按适应值从大到小进行排列,为方便起见,假定从大到小的排列

的次序为(2)式.若位于前 N_0 (其中 N_0 为搜索空间是否要调整而设定的一个参量,本文 $N_0 \approx \frac{2}{3} N$) 个个体的第 i 个基因 $x_{ji}(t)$ ($j=1, 2, \dots, N_0, i=1, 2, \dots, N$) 满足条件:

$$x_{ji}(t) \leq x_i^U - \frac{1}{3} (x_i^U - x_i^L). \text{ (注①)}$$

此时,我们认定问题的 $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ 的第 i 个变量 x_i^* 应满足以下关系式

$$x_i^* \leq x_i^U - \frac{1}{4} (x_i^U - x_i^L). \text{ (注②)}$$

并对第 i 个变量搜索区间 $[x_i^L, x_i^U]$ 作以下调整: $x_i^U := x_i^U - \frac{1}{4} (x_i^U - x_i^L)$, 否则 $x_i^U := x_i^U$. 类似地,若位于前 N_0 个个体的第 i 个基因 $x_{ji}(t)$ ($j=1, 2, \dots, N_0, i=1, 2, \dots, n$) 满足条件:

$$x_{ji}(t) \geq \frac{1}{3} (x_i^U - x_i^L)$$

此时,我们认定问题的最优解 $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ 的第 i 个变量 x_i^* 应满足以下关系式

$$x_i^* \geq x_i^L + \frac{1}{4} (x_i^U - x_i^L)$$

并对第 i 个变量搜索区间 $[x_i^L, x_i^U]$ 作以下调整: $x_i^L := x_i^L + \frac{1}{4} (x_i^U - x_i^L)$; 否则 $x_i^L := x_i^L$. 显然,令 i 取遍 $1, 2, \dots, n$ 每一个值,就可以得到新的搜索空间.同时,对于种群中的每一个体 $X_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, N$),若它的每一个基因对应的值落在对应区间之内,则其编码不变,否则让该个体对应新的搜索空间中的一个点.这样能维持群体的多样性,从而避免算法出现早熟现象.

注①:式中的 $\frac{1}{3}$ 可取其它的值 k_1 , 只要 $k_1 \leq \frac{1}{2}$ 就可.

注②:式中的 $\frac{1}{4}$ 可取其它的值 k_2 , 只要 $k_2 < k_1$ 就可.

3 浮点遗传算法求非线性方程组的解

3.1 非线性方程组的转化

我们考虑以下形式的非线性方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

为便于用遗传算法求解,先将上述问题转化为一个函数优化问题,即构造与之等价的优化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & F(X)=\sum_{j=1}^m\left|f_j\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)\right| \\ s . t \quad & x_i \in\left[x_i^L, x_i^U\right] \quad(i=1,2, \cdots, n) . \end{aligned}$$

为讨论方便,假设非线性方程组在区域 $\left[x_1^L, x_1^U\right] \times \cdots \times\left[x_n^L, x_n^U\right]$ 内有唯一解.显然, $F\left(X^*\right)=0 \Leftrightarrow X^*$ 为方程组(3)的解.

3.2 数值模拟

为考察本文所提出的遗传算法的性能,我们采用文献^[7]给出的例子进行数值模拟.算法采用实数编码,取适应值函数为

$$\text { fitness }(X)=\frac{1}{1+\sum_{j=1}^m\left|f_j\right|},$$

控制参数的取值为:群体规模 $N=100$,交叉概

率 $p_c=0.8$,变异概率 $p_m=0.1, N_0=60$,且进行模拟的非线性方程组为:

例 1

$$\begin{cases} x_1+x_2-2 x_3=0 \\ x_1 x_2=1 \\ D_1=\left\{\left(x_1, x_2, x_3\right) \mid 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2, 0 \leq x_3 \leq 2\right\} \\ x_1^2+x_2^2=2 \end{cases}$$

例 2

$$\begin{cases} x_1^{x_2}+x_2^{x_1}-5 x_1 x_2 x_3-85=0 \\ x_1^3-x_2^{x_3}-x_3^{x_2}-60=0 \\ D_2=\left\{\left(x_1, x_2, x_3\right) \mid 3 \leq x_1 \leq 5, 2 \leq x_2 \leq 4, 0.5 \leq x_3 \leq 2\right\} \\ x_1^{x_3}+x_3^{x_1}-x_2-2=0 \end{cases}$$

模拟的数值结果见表 1:

表 1 例 1 数值结果的比较

	x_1	x_2	x_3	$\sum\left f_i\right $	备注
文献 ^[5] 结果	1.005 33	0.979 7	0.968 468	0.092 7	GA
文献 ^[7] 结果	1.017 5	0.982 2	0.999 9	7.0186×10^{-4}	改进 GA
本文结果	1.002 8	0.997 2	1.000 0	2.3520×10^{-5}	浮点 GA
精确解	1	1	1	0	

表 2 数值结果的比较

	x_1	x_2	x_3	$\sum\left f_i\right $	备注
文献 ^[6] 结果	3.997 4	3.010 7	0.998 7	1.812 3	GA
文献 ^[7] 结果	3.994 0	3.007 9	1.007 9	0.596 1	改进 GA
本文结果	4.000 2	2.999 7	0.999 7	0.024 8	浮点 GA
精确解	4	3	1	0	

同时,以例 1 为例,我们给出遗传算法、改进遗传算法和浮点遗传算法的演化代数与目标函数值 $\sum\left|f_i\right|$ 之间的关系图(图 1).从模拟的数值结果及图 1,不难得出,浮点遗传算法较改进的遗传算法求出

的解要好,且在演化的后期局部寻优能力得到一定地改善.这也反映浮点遗传算法求解精度高的特点.

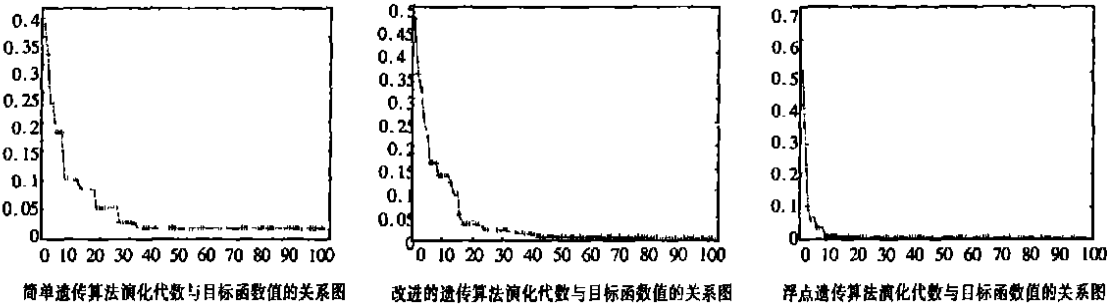


图 1

4 结束语

本文利用浮点遗传算法在演化过程中适应值的分布和实数编码的特点,动态地调整搜索空间.

通过缩小、移动搜索空间,求出非线性方程组的高精度的解,且遗传算法在演化后期的局部寻优能力得到改善.由于采用了实数编码,无需进行复杂的编码解码过程,同文献^[7]相比计算速度也有所改善.此外,算法完全可以作为判断非线性方程组在

某区域有没有解的一种方法,即通过求解正问题达到求解反问题的目的.

参考文献:

- [1] Man K F, Tang K S, Kwong S. Genetic algorithms : concepts and applications[J]. IEEE Trans. industrial Electronics 1996.
- [2] Kuo T, Hwang S Y. Genetic algorithm with disruptive Selection [J]. IEEE Trans. systems, man and Cybernetics, 1996.
- [3] Kuo T, Hwang S Y. why DGAG work well on GA—hard func-

tions [J]. New Generation Computing 1996.

- [4] Liu yong, kanglishan, Chen yuping. Nor—Numerical Parallel algorithms—Genetic algorithm [M]. Beijing: Science Press, 1998.
- [5] 张宏生, 吴拓. 遗传算法在非线性方程组求解中的应用[J]. 肇庆学院学报, 2002(2): 16~19.
- [6] 胡能发. 求解多元方程组的遗传算法[J]. 荆洲师范学院学报, 2002(2): 11~13.
- [7] 曾毅. 改进的遗传算法在求解非线性方程组的应用[J]. 华东交通大学学报, 2004(4): 39~41.

The Application of floating Genetic Algorithms to Solving Non-linear equation groups

ZENG Yi

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, We change the problem of solving non-linear equation group into the problem of function optimization. Based on the distribution of fitness and characteristics of real-coding, We improved GA by reducing and moving the search space. Numerical experiments show that floating Genetic Algorithm has better ability to search the global result and improve the precision of searching result.

Key words: floating Genetic Algorithm; Non-linear Equation Group; Search Space; Function Optimization

(上接第 131 页)

参考文献:

- [1] Ernest Jordan and Bob Tricker, Information Strategy: Alignment with Organization Structure, Journal of Strategic Information systems, 1995, 4, 357—382.
- [2] 苗东升. 系统科学精要[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1998.
- [3] 张于心, 张国伍. 铁路运输系统结合部的基本概念[Z].

北方交通大学应用系统分析研究所, 1990.

- [4] 薛华成. 管理信息系统(第三版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999.
- [5] 刘志军. 落实‘三个代表’要求, 抓住新的历史机遇努力实现中国铁路跨越式发展[N]. 人民铁道, 2003—6—29(2—3).
- [6] 王众托. 计算机在经营管理中的应用——新的系统构成[M]. 辽宁: 大连理工大学出版社, 1994.

Study on Railway Information Resources Allocation Architecture Model

WANG Xiao-xia, ZHENG Ji-chun

(Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: In view of outstanding problems lying in Chinese railway information resources allocation, based on relevant contents of enterprise information architecture, set up railway information resources allocation architecture in broad sense, which will establish theoretical foundation for great-leap-forward development of railway informatization strategical planning.

Key words: information resources; architecture; railway