

文章编号: 1005-0523(2005)01-0156-04

格子 Boltzmann 方法的一种隐格式

王广超¹, 罗来鹏¹, 杜睿²

(1. 华东交通大学 基础科学学院 江西 南昌 330013; 2. 华中科技大学 煤燃烧国家重点实验室, 湖北 武汉, 430074)

摘要:提出了一种新的隐格式格子 Boltzmann 模型, 在模型中, 隐格式可以显格式求解格子 Boltzmann 方程, 计算简单, 并且引入了参数 θ 与无量纲时间 τ 独立, 增加了模型的灵活性. 对二维伯肃流进行了模拟试验, 计算结果与解析解结果吻合较好, 表明该格式是可行有效的.

关键词:格子 Boltzmann 方法; 隐格式; 伯肃流

中图分类号: O35

文献标识码: A

1 简介

格子 Boltzmann 方法(LBM)^[1]是上世纪 80 年代中期提出研究流体流动的一种新方法, 其基本理论来源格子气动机. 与以宏观连续方程的离散化为基础的传统数值方法不同, LBM 的基础是微观模型与细观运动论方法. 它保留了分子运动学的许多优点, 如物理条件清晰, 边界条件易于实现, 具有完全并行性等. LBM 最近几年发展迅速, 除了在一般的流体力学问题中得到成功的验证外, 还在湍流, 多相流, 化学反应扩散等相关领域得到较好的应用.

对格子 Boltzmann 模型的研究和应用上人们主要显格式, He^[2]等在热格子模拟中, 首先提出了格子 Boltzmann 模型的隐格式, 最近 Guo^[3]与 Lee^[4]等对该方法的应用做了研究和推广. 在 Guo 等的模型中, 受粘性系数的限制, 引入参数 θ 与无量纲时间 τ 相关, 本文提出了一种新的隐格式格子 Boltzmann 模型, 在模型中, 隐格式的计算转换为显格式的计算, 计算简单, 并且引入参数 θ 与无量纲时间 τ 独立, 增加了模型的灵活性.

2 格子 Boltzmann (LB) 方法的隐格式

使用二维九速(D2Q9)不可压 LB 模型^[5], 其演化方程为:

$$g_i(x + ce_i \Delta t, t + \Delta t) - g_i(x, t) = -\frac{1}{\tau} (g_i(x, t) - g_i^0(x, t)), \quad (1)$$

其中, g_i 表示沿 i 方向的粒子速度分布函数, $c = \Delta x / \Delta t$ 为粒子流动速度, Δx 和 Δt 分别为空间和时间步长, τ 为无量纲松弛时间, e_i 表示粒子的运动方向, 可表示为:

$$\begin{aligned} e_0 &= (0, 0), \\ e_i &= (\cos[(i-1)\pi/2], \sin[(i-1)\pi/2]), \quad i=1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (2)$$

收稿日期: 2004-11-10

作者简介: 王广超(1978-), 男, 山东微山人, 硕士, 助教.

$$e_i = \sqrt{2}(\cos[(i-5)\pi/2 + \pi/4], \sin[(i-5)\pi/2 + \pi/4]), i=5, 6, 7, 8$$

$g_i^0(x, t)$ 为平衡态分布函数, 有下式定义:

$$g_i^0 = \begin{cases} -4\sigma \frac{p}{c^2} + s_0(u), & i=0, \\ \lambda \frac{p}{c} + s_i(u), & i=1, 2, 3, 4 \\ \gamma \frac{p}{c} + s_i(u), & i=5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (3)$$

这里 $s_i(u) = \omega_i [3 \frac{(e_i \cdot u)}{c} + 4.5 \frac{(e_i \cdot u)^2}{c^2} - 1.5 \frac{|u|^2}{c^2}]$, ω_i 为权系数其数值分别为: $\omega_0=4/9$, $\omega_i=1/9$ ($i=1:4$) 和 $\omega_i=1/36$ ($i=5:8$). σ, λ, γ 为模型参数, 满足:

$$\lambda + \gamma = \sigma, \lambda + 2\gamma = 1/2.$$

流体的速度和压力可由分布函数计算得到:

$$u = \sum_{i=1}^8 c e_i g_i, \quad (4)$$

$$p = \frac{c^2}{4\sigma} [\sum_{i=1}^8 g_i + s_0(u)]. \quad (5)$$

对(1)式平衡态分布函数使用隐格式可以得到:

$$g_i(x + c e_i \Delta t, t + \Delta t) - g_i(x, t) = -\frac{1}{\tau} (g_i(x, t) - \theta g_i^0(x + c e_i \Delta t, t + \Delta t) - (1 - \theta) g_i^0(x, t)), \quad (6)$$

其中 θ 为参数, 取 $h_i(x, t) = g_i(x, t) - \frac{\theta}{\tau} g_i^0(x, t)$, 可以得到:

$$h_i(x + c e_i \Delta t, t + \Delta t) - h_i(x, t) = -\frac{1}{\tau} (g_i(x, t) - g_i^0(x, t)), \quad (7)$$

通过多尺度技术:

$$h_i = g_i^0 + \epsilon g_i^1 - \frac{\theta}{\tau} g_i^0, \quad (8)$$

其中 g_i^1 为分布函数的非平衡态部分, 并且 g_i^0, g_i^1 满足:

$$\sum_{i=0}^8 g_i = \sum_{i=0}^8 g_i^0 = 0, \quad (9)$$

$$\sum_{i=0}^8 g_i = \rho \quad \sum_{i=0}^8 c e_i g_i^0 = u, \quad (10)$$

由(7), (8), (9), (10)可得流体的速度和压力:

$$u = (\sum_{i=0}^8 c e_i h_i) / (1 - \theta / \tau), \quad (11)$$

$$p = \frac{c^2}{4\sigma} \left[\sum_{i=1}^8 h_i + (1 - \theta / \tau) s_0(u) \right] / (1 - \theta / \tau), \quad (12)$$

当 $\theta=0$ 时即为标准的不可压模型. 可以从(5)得到不可压条件下的 Navier-Stokes 方程:

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \nu \nabla^2 u, \quad (14)$$

其中, 粘性系数 $\nu = \frac{(2\tau-1)\Delta x^2}{6\Delta t}$ (15)

在实际计算过程中分布函数 g_i 可以有下式确定:

$$g_i(x, t) = h_i(x, t) + \theta / \tau g_i^0(x, t), \quad (16)$$

3 数值实验

本文利用上述模型对二维压力拖动泊肃流进行数值模拟. 选取区域为 $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$, 对于稳定泊肃流的解析解为

$$u(x, y, t) = \frac{\Delta p}{4\nu} y(1-y), \tag{17}$$

$$v(x, y, t) = 0, \tag{18}$$

$$p(x, y, t) = p_{in} - \frac{\Delta p}{2} x, \tag{19}$$

其中 $\Delta p = p_{in} - p_{out}$, p_{in} 与 p_{out} 分别表示入口与出口处的压力.

在计算中选取 61×31 的网格. 对于边界初始条件, 在壁面上取 $u = v = 0$; 入口条件为 $p_{in} = 1.1$, $\partial u / \partial x = 0$, $\partial v / \partial x = 0$; 出口处 $p_{out} = 1.0$, $\partial u / \partial x = 0$, $\partial v / \partial x = 0$; 计算区域内部的初始条件 $u = v = p = 0$. 在计算过程中边界条件使用非平衡态外推方法^[6]:

$$g_i(x_b, t) = \bar{g}_i^0(x_b, t) + (g_i(x_f, t) - g_i^0(x_f, t)), \tag{20}$$

$$\text{其中, 当 } b \text{ 在上下边界时: } \bar{g}_i^0(x_b, t) = \lambda p(x_f, t) + s_i(u(x_b, f)), \tag{21}$$

$$\text{当 } b \text{ 在左右边界时: } \bar{g}_i^0(x_b, t) = \lambda p(x_b, t) + s_i(u(x_f, f)), \tag{22}$$

f 表示距离 b 最近的点.

在计算过程中, 计算参数选择 $\Delta x = 1/30$, $c = 10$, $\nu = 0.025$, 图 1 分别给出了 $\theta = 0.2$ 时在管道中心线 $x = 1.0$ 处速度水平分量 u 与解析解对比图形和沿管道中心线处 $y = 0.5$ 压力 p 与解析解对比图形. 可以看出, 当前算法与解析解吻合较好. 表 I 分别给出了水平速度 u 在 $x = 1.0$ 处, $\theta = 0.0, 0.2, 0.5$ 数值模拟结果与解析解的绝对误差对比, 从表中可以看出通过 θ 的调整, 可以提高格子 Boltzmann 方法的精度, 对于入口条件与出口条件作适当调整, 格式的精度亦有类似变化, 表 II 给出了 $p_{in} = 2.0$ 与 $p_{out} = 1.0$ 时水平速度 u 在 $x = 1.0$ 处, $\theta = 0.0, 0.2, 0.5$ 数值模拟结果与解析解的绝对误差对比, $\theta = 0.2$ 时格式的精度较高.

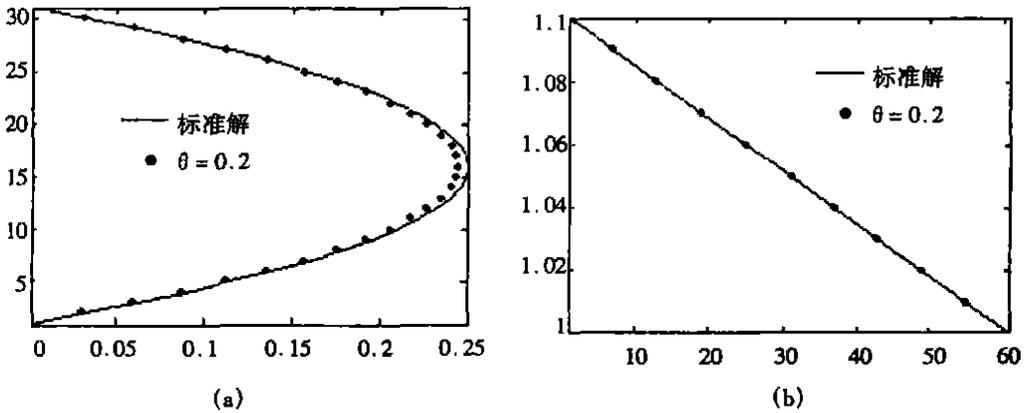


图 1 泊肃流的数值模拟结果与解析解对比(时间步为 5000);
(a)在管道中心线 $x = 1.0$ 处速度水平分量 u 与解析解对比,
(b)沿管道中心线处 $y = 0.5$ 压力 p 与解析解对比.

表 I 水平速度 u 在 $x = 1.0$ 数值模拟结果与解析解的绝对误差对比(数据结果 $\times 10^{-3}$, 计算时间步为 10^4)

| $y=1.0$ | $y=0.0$ | $y=0.1$ | $y=0.2$ | $y=0.3$ | $y=0.4$ | $y=0.5$ | $y=0.6$ | $y=0.7$ | $y=0.8$ | $y=0.9$ |
|-----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\theta \in [0, 0]$ | 0.0 | 0.6315 | 0.6498 | 0.6643 | 0.6736 | 0.6767 | 0.6736 | 0.6643 | 0.6498 | 0.6315 |
| $\theta \in [0, 0.2]$ | 0.0 | 0.6306 | 0.6483 | 0.6624 | 0.6714 | 0.6744 | 0.6713 | 0.6623 | 0.6483 | 0.6306 |
| $\theta \in [0, 0.5]$ | 0.0 | 0.6313 | 0.6495 | 0.6640 | 0.6732 | 0.6765 | 0.6733 | 0.6641 | 0.6495 | 0.6313 |

表 I 水平速度 u 在 $x = 1.0$ 数值模拟结果与解析解的绝对误差对比(数据结果 $\times 10^{-3}$, 计算时间步为 10^4)

| $y=1.0$ | $y=0.0$ | $y=0.1$ | $y=0.2$ | $y=0.3$ | $y=0.4$ | $y=0.5$ | $y=0.6$ | $y=0.7$ | $y=0.8$ | $y=0.9$ |
|-----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\theta \in [0, 0]$ | 0.0 | 6.1977 | 6.2750 | 6.3360 | 6.3730 | 6.3860 | 6.3730 | 6.3350 | 6.2750 | 6.1976 |
| $\theta \in [0, 0.2]$ | 0.0 | 6.1933 | 6.2670 | 6.3250 | 6.3620 | 6.3740 | 6.3620 | 6.3250 | 6.2670 | 6.1937 |
| $\theta \in [0, 0.5]$ | 0.0 | 6.1977 | 6.2760 | 6.3360 | 6.3750 | 6.3890 | 6.3760 | 6.3370 | 6.2760 | 6.1984 |

4 结束语

本文在格子 Boltzmann 模型加入参数 θ , 提出了一种新的隐格式格子 Boltzmann 模型, 在实际计算过程中, 隐格式的计算可以转换为显格式的计算, 计算简单, 并且引入参数 θ 与无量纲时间 τ 独立, 增加了模型的灵活性. 数值模拟结果表明, 该方法是可行有效的, 并且适当选取参数 θ 可以提高格式精度.

致谢

感谢华中科技大学数学系施保昌教授的指导与帮助, 同时感谢国家自然科学基金(60073044)提供的资料帮助.

参考文献:

- [1] Chen S, Doolen G. Lattice Boltzmann Methods for Fluid Flows[J]. *Annu Rev Fluid Mech*, 1998 30:329-364.
- [2] He X, Chen S, Doolen DG. A Novel Thermal Model for the Lattice Boltzmann method in incompressible limit[J]. *J Comp Phys*, 1998, (146):282.
- [3] Guo ZL, Zhao TS. Explicit Finite-Difference Lattice Boltzmann Method for Curvilinear Coordinates [J]. *Phys Rev E*, 2003, (67):066709.
- [4] Lee T, Lin CL. An Eulerian Description of the Streaming Process in the Lattice Boltzmann Equation[J]. *J Comp Phys*, 2003, (185):445-471.
- [5] Guo ZL, Shi BC, Wang NC. Lattice BGK Model for Incompressible Navier-Stokes Equation[J]. *J Comp Phys*, 2000, (165):288-306.
- [6] Guo ZL, Zheng CG, Shi BC. Non-equilibrium Extrapolation Method for Velocity and Pressure Boundary Conditions in the Lattice Boltzmann Method[J]. *Chin Phys* 2002, (11):366-374.

An Implicit Scheme for the Lattice Boltzmann Method

WANG Guang-chao¹, LUO Lai-peng¹, DU Rui²

(1.School of Natural Science, East China Jiaotong Univ., Nanchang 330013;2.State Key Laboratory of Coal Combustion, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: An implicit scheme for the lattice Boltzmann method is presented in the paper. The computation of the scheme which is simple for the implicit scheme which can be transformed into the explicit one and the scheme is flexible because the parameter is independent with the relaxation time. The two-dimension Poiseuille flow is selected for the numerical simulation. The close agreement with the analysis solution shows that the present method is feasible and effective.

Key words: lattice Boltzmann methods; implicit scheme; poiseuille flow.