文章编号：1005－0523(2007)01－0120－03

关于图的局部着色

徐保根

(华东交通大学 基础科学学院，江西 南昌 330013)

摘要：G.Chartand[1]引入了一个图G的局部色数$x_1(G)$的概念，在本文中的我们主要出了图的局部色数的界限，证明了对任意n阶图G($n\geqslant 2$)，均有$x_1(G)+x_1(\overline{G})\leqslant 2n-1$，并确下了一些特殊图的局部色数.

关　键　词：色数；着色函数；局部色数；局部着色函数

中图分类号：O157.5　　　　**文献标识码**：A

1　引言及定义

本文所指的图均为无向单图，文中未说明的符与、术语同于文献[2].

图的着色(标号)理论是图论中的重要内容.近些年来，随着离散型事物的数学模型应用性的日益广泛，图的着色问题已不再是仅限于对图的点着色、边着色及全着色问题，各式各样的特征着色概念相继产生，如均衡有色、List着色等，从而使用的着色理论研究内容越来越丰富.

人所周知，对于一个给定的图$G=(V,E)$，图G的一个k－正常着色函数是指一个函数$c:V\rightarrow\{1,2,\cdots\cdots,k\}$使得$\forall$ uv$\in E(G)$均有$c(u)\neq c(v)$成立.图G的色数定义为$x(G)=\min\{k\mid$存在G的k-正常着色函数$c\}$.

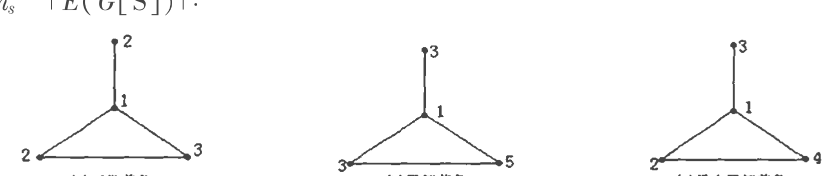
通常地，设$G=(V,E)$为一个图.若$S\subseteq V(G)$则$G[S]$表示S在G中的导出子图，m_s表示该导出子图的边数，即$m_s=|E(G[S])|$.

不难看出：上述着色函数的定义可等价地叙述为：一个图$G=(V,E)$的一个正常着色函是指一个函数$C:V\rightarrow N^+$使得对于V中任何一个2－元子集$S=\{u,v\}$，均有$|c(u)-c(v)|\geqslant m_s$成立.

由此G.Chartand引入下面局部着色的概念：

定义1.1[1]　设G为一个n阶图($n\geqslant 2$)，一个函数$C:V(G)\rightarrow N^+$被称为G的一个局部着色函数，如果对每个$S\subseteq V(G)$($1\leqslant|S|\leqslant 3$)，均存在$u,v\in s$使得$|c(u)-c(v)|\geqslant m_s$.图G的一个局部着色函数c的值定义为$x_1(c)=\max\{c(v)\mid v\in V(G)$，并且$G$的局部色数定义为$x_1(G)=\min\{x_1(c)\mid C$为$G$的局部着色数$\}$.而对于平凡图$K_1$，则定义$x_1(K_1)=1$.

如果图G的一局部着色函数c适合$x_1(c)=x_1(G)$，则称c为图G的一个最小局部着色函数.例如，在图(1)中(a)、(b)和(c)分别是对同一个图的正常着色、局部着色和最小局部着色.



(a)正常着色　　(b)局部着色　　(c)最小局部着色

图(1)

收稿日期：2006－12－25

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10661007)；江西省教育厅科研项目(05122)

作者简介：徐保根(1963－)，男，江西南昌人，教授.

中国知网 https://www.cnki.net

根据定义1.1,不难看出:

引理1.2,对于图 G 的任何一子图 H,均有 $x_l(G)\geqslant x_l(H)$.

由于 G 的任何一个局部着色数也是 G 的一个正常着色函数,因此有

引理1.3,对任意图 G,均有 $x_l(G)\geqslant x(G)$.

文献[1]中给出了连通二部图的局部着色数,即有

引理1.4[1],若 G 为 n 阶连通二部图($n\geqslant 3$),则 $x_l(G)=3$

在本文中,我们给出一个图局色数的界限,主要证明 $x_l(G)+x_l(\overline{G})\leqslant 2n-1$ 对任意 n 阶图成立,并确定完全图、圈、完全多部图等特殊图的局部色数.

2 主要结果

定理2.1 设 G 为一个 n 阶图($n\geqslant 2$),M 为图 G 的一个独立集,则有

(1) $x_l(G)\leqslant x_1(G-M)+2$

(2) $x_l(G)\leqslant x_1(G)\leqslant 2x(G)-1$

证明 (1)记 $H=G-M$,$t=x_1(H)$.令 $c_1:V(H)\to N^+$ 为图 H 的一个最小局部着色函数,即 $x_l(c_1)=x_l(H)$.定义一个函数 $c_1:V(H)\to N^+$ 如下:

$$c(v)=\begin{cases}C_1(v) & 当\ v\in V(H)时;\\ t+2 & 当\ v\in M\ 时;\end{cases}$$

下面验证 c 为图 G 的一个局部着色函数:

对于每一个 $S\subseteq V(G)$ 且 $1\leqslant|S|\leqslant 3$,当 $|S|=1$ 时 $m_s=0$,从而有 $u,v\in S$(即 $u=v$),显然使得

$$|c(u)-c(v)|\geqslant m_s\cdots\cdots\cdots(*)$$

成立.当 $|S|=2$ 时,记 $S=\{u,v\}$,由于 c 为图 G 的一个正常着色,故当 u 与 v 相邻时($m_s=1$),而 $c(u)\neq c(v)$.当 u 与 v 不相邻时,$m_s=0$.由此可见(*)式成立.

当 $|S|=3$ 时,分下面四种情况:

若 $|S\cap M|=0$,即 $S\subseteq V(H)$,则由于 c_1 为图 H 的局部着色函数,从而存在 u、$v\in S$ 使得 $|c_1(u)-c_1(v)|\geqslant m_s$,由 c 的定义知:

$$|c(u)-c(v)|=|c_1(u)-c_1(v)|\geqslant m_s$$

若 $|S\cap M|=1$,则 $\forall$ $u\in S\setminus M$,$v\in S\cap M$,均有

$$|c(u)-c(v)|\geqslant 2\geqslant m_s.$$

若 $|S\cap M|=2$,记 $S\cap M=\{v,w\}$,$S\setminus M=\{u\}$,即 $S=\{u,v,w\}$.由于 $uv\in E(G)$,且 $c(u)=c_1(u)\leqslant c_1(u)\leqslant x_1(c_1)=t$,$c(v)=t+2$,即有

$$|c(u)-c(v)|\geqslant 2\geqslant m_s$$

若 $|S\cap M|=3$,则 $S\subseteq M$ 则有 $m_s=0$,显然(*)式成立.

综上所述,对每个 $S\subseteq V(G)(1\leqslant|S|\leqslant 3)$,均存在 $u,v\in S$ 使得 $|c(u)-c(v)|\geqslant m_s$.因此 c 为 G 的一个局部着色函数,即

$$x_1(G)\leqslant x_1(c)=t+2=x_1(H)+2$$

(2)由引理1.3知 $x_1(G)\geqslant x(G)$.设 $x(G)=t$,将 $V(G)$ 分成 t 个色组 $V(G)=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_1$,由(1)知 $x_1(G)\leqslant x_1(G-V_1)+2\leqslant x_1(G-V_1-V_2)+4\leqslant\cdots\leqslant x_1(K_s)+2(-1)2-1$,其中 $s=|V_t|$,即 $x_1(G)\leqslant 2x(G)-1$.定理2.1完毕.

定理2.2 (1) $x_1(K_n)=n+\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$

(2) $x_1(C_n)=\begin{cases}4 & 当\ n=3\ 时;\\ 3 & n\geqslant 4\ 时\end{cases}$

证明 (1) $V(K_n)=\{v_1,v_2\cdots,,v_n\}$ 定义一个函数 C 如下:$c(v_i)=i+\left[\dfrac{i-1}{2}\right]$ ($i=1,2,\cdots,n$).

不难验证:c 为 K_n 的一个局部着色函数,因此

$$x_l(K_n)\leqslant x_l(c)=n+\left[\frac{i-1}{2}\right].$$

另一方面,假若(反证) $x_l(K_n)\leqslant n+\left[\dfrac{n-1}{2}\right]-1$,由定义知:存在 K_n 的一个最小局部着色函数 c_0 使得 $x_l(K_n)=x_l(K_0)\leqslant n+\left[\dfrac{n-1}{2}\right]-1$.注意到当 $i\neq j$ 时 $c_0(v_i)\neq c_0(v_j)$,从而 $\{c_0(v_1),c_0(v_2),\cdots c_0(v_n)\}$ 中必有三个连续的正整数,记为 $c_0(v_i)$、$c_0(v_j)$ 和 $c_0(v_k)$,令 $S=\{v_i,v_j,v_k\}$,显然 $m_s=|E(K_3)|=3$,而且 $\forall$ u、v$\in S$ 时 $|c_0(u)-c_0(v)|\leqslant 2$,这与 c_0 为 K_n 的局部着色函数矛盾.

(2)当 $n=3$ 时,由(1)知 $x_1(c_3)=4$.下设 $n\geqslant 4$.若 n 为偶数,则由引理1.4知 $x_1(c_n)=3$.若 n 为奇数($n\geqslant 5$),由于 $K_{1,2}$ 为 C_n 的子图,由引理1.2知 $x_1(C_n)\geqslant x_1(K_{1,2})=3$.

另一方面,记 $V(c_n)=\{u_1,v_1,u_2,v_2,\cdots,u_{\frac{n-1}{2}},v_{\frac{n-1}{2}},w\}$,$E(C_n)=\left\{u_iv_i|1\leqslant i\leqslant\dfrac{n-1}{2}\right\}\cup\left\{v_{j-1}|2\leqslant j\leqslant\dfrac{n-1}{2}\right\}\cup\left\{wv_{\frac{n-1}{2}},u_1w\right\}$,定义一个函数 C 如下:

$$c(v)=\begin{cases}2 & 当\ v=w\ 时;\\ 1 & 当\ v=u_i\ 时;(1\leqslant i\leqslant\dfrac{n-1}{2})\\ 3 & 当\ v=v_i\ 时;\end{cases}$$

中国知网 https://www.cnki.net

不难验证：c 为 C_n 的一个局部着色函数，从而 $\chi_1(c_n)\leqslant\chi_1(c)=3$，定理2.2证毕.

下面考虑一个图 G 与其补图 $\overline{G}$ 的局部色数的关系.

定理2.3 对任意 n 阶图 $G(n\geqslant 2)$，均有

$$\chi_1(G)+\chi_1(\overline{G})\leqslant 2n-1.$$

证明：对 n 用归纳法：当 $n=2$ 或 3 时，定理显然成立.假若定理对于任意 $k(k\leqslant n-1)$ 阶图成立，现考虑一个 n 阶图 $G(n\geqslant 4)$.

情况1 若 $\overline{G}$ 不含三角形；令 $\delta(\overline{G})$ 为 $\overline{G}$ 的是最小度，且取 v_1 为 $\overline{G}$ 中的一个最小度点.注意到 $n\geqslant 4$，可见 $\delta(\overline{G})\leqslant n-2$

如果 $\delta(\overline{G})=n-2$；则 G 的最大度 $\triangle(G)=1$，即有

$$\chi_1(G)+\chi_1(\overline{G})\leqslant 2+n+\left[\frac{n-1}{2}\right]\leqslant 2n-1$$

如果 $\delta\overline{G}=n-3$；则在 $\overline{G}$ 中 v_1 到少与两个顶点 v_2 和 v_3 均不相邻，记 $V(G)=V(\overline{G})=\{v_1,v_2,\cdots.v_n\}$，定义 $\overline{G}$ 的局部着色函数 $\overline{c}$ 和图 G 的局部着色函数 c 如下：$\overline{c}(v_1)=\overline{c}(v_2)=1$，$\overline{c}(v_i)=i-1(3\leqslant i\leqslant n)$.并且 $c(v_j)=j\ (1\leqslant j\leqslant n)$

由此可见：$\chi_1(G)+\chi_1(\overline{G})\leqslant\chi_1(c)+\chi_1(\overline{c})$
$=n+n-1=2n-1$

情况2 若 $\overline{G}$ 包含三角形；此时设 $\overline{G}$ 的最大完全子图为 $K_t(t\geqslant 3)$，记 $M=V(K_t)$，即在 G 中 M 为最大独立集，$|M|=t\geqslant 3$.令 $H=G-M$，由归纳假设得知

$$\chi_1(H)+\chi_1(\overline{H})\leqslant 2(n-t)-1 \qquad (1)$$

令 $\overline{C_1}$ 为图 $\overline{H}$ 的一个最小局部着色函数，即 $\chi_1(H)=\chi_1(c_1)$，定义图 G 的局部着色函数 c 如下：

$$c(v)=\begin{cases} c_1(v) & \text{当 } v\in V(H)\text{时；}\\ \chi_1(H)+2 & \text{当 } v\in M\text{ 时；}\end{cases}$$

可见，$\chi_1(G)\leqslant\chi_1(c)=\chi_1(H)+2 \qquad (2)$

令 $\overline{c_1}$ 为图 $\overline{H}$ 的一个小局部着色函数，即 $\chi_1(\overline{H})=\chi_1(\overline{c_1})$，注意到 M 在 $\overline{G}$ 中的导出子图 $\overline{G}[M]=K_t$ 是 $\overline{G}$ 的最大完全子图，取 $v_0\in V(\overline{H})$ 使得 $\overline{c_1}(v_0)=\max\{\overline{c_1}(v)|v\in V(\overline{H})\}$.在 $\overline{G}$ 中 v_0 不与 M 中的 v_1 点邻接.记 $M=\{v_1,v_2,\cdots,v_t\}$，定义 $\overline{G}$ 的局部着色函数 $\overline{c}$ 如下：

$$\overline{c}(v)=\begin{cases} \overline{c}(v) & \text{当 } v\in V(\overline{H})\text{时；}\\ \chi_1(\overline{H})+i+\left[\frac{i-1}{2}\right] & \text{当 } v=v_i\text{ 时；}(1\leqslant i\leqslant t)\text{；}\end{cases}$$

由此可见

$$\chi_1(\overline{G})\leq\chi_1(\overline{C})=\chi_1(\overline{H})+t\left[\frac{t-1}{2}\right] \qquad (3)$$

将(2)与(3)式相加，并由(1)式代入得(注意到 $t\geqslant 3$)

$$\chi_1(G)+\chi_1(\overline{G})\leq\chi_1(H)+2+\chi_1(\overline{G})+t\left[\frac{t-1}{2}\right]$$

$\leqslant 2(n-t)-1+2+\dfrac{3t-1}{2}\leqslant 2n-1$，即定理对于 n 阶图成立，由归纳原理，定理2.3证毕.

由上述定理可得：

推论2.4 对任意 n 阶图 $G(n\geqslant 2)$，均有

$$\chi_1(G)+\chi_1(\overline{G})\leqslant\frac{(2n-1)^2}{4}$$

注1 定理2.3给出的上界并非是最好呆能的，我们猜测：对任意 n 阶图 G，均有 $\chi_1(G)+\chi_1(\overline{G})\leqslant\left[\frac{3}{2}n\right]+1$.如果正确的话，此上界是最好可能的.考虑 n 阶完全图 G(n 为奇数)，由定理2.2知等式成立.

注2 设 G 和 H 为两个点不交的图，则在 $G\cup H$ 中将 G 的每个顶点与 H 的各个顶点均邻而成的图称为直和图，记为 $G+H$.不难证明 $\chi_1(G+H)\leqslant\chi_1(G)+\chi_1(H)+1$

参考文献：

[1]G.Chartrand and Ping Zhang，图论导引[M].北京：人民邮电出版社，2006.

[2]J.A Bondy，V.S.R.Murty.Graph Theory winth Application[M].Elsevier，Amsterdam，1976.

On Local Coloring of Graphs

XU Bao-gen

(School of Natural Science，East China Jiaotong University，Nanchang 330013，China)

Abstract：G.Chartrand [1] introduced the concept of local coloring in graphs. In this paper we give some bounds for local chromatic number of a graph G，prove that $\chi_1(G)+\chi_1(\overline{G})\leqslant 2n-1$ holds for any graph G of order n，and determine the local chromatic numbers of complete graphs and cycles.

Key words：chromatic number；local chromatic number；coloring function；local coloring function

中国知网 https://www.cnki.net