第24卷第1期 华东交通大学学报 Vol.24 No.1
2007年2月 Journal of East China Jiaotong University Feb.,2007

文章编号:1005-0523(2007)01-0133-04

一类序非扩张算子的不动点定理

左黎明[1,2],刘二根[1],郑雄军[2]

(1.华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330003;2.江西师范大学 数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要:引入了序非扩张算子的概念,并研究了这种算子不动点的存在问题,得到了几个不动点定理.

关 键 词:半序;序非扩张算子;锥;不动点;

中图分类号:O177.91 **文献标识**:A

1 引 言

Milman和Brodski,Browder,Petryshin,Kirk等人深入地研究了非扩张算子,得到了许多著名的不动点定理和深刻结果[5],例如William O.Ray得到的一个非常著名的结果:设D是实Hilbert空间中的一个闭凸集,则D对于非扩张算子有不动点的充要条件是D有界.目前仍有许多学者在研究非扩张算子的更深一步结果和非扩张算子的不动点应用问题.

本文我们引入了一类新的序算子—序非扩张算子,然后在半序Banach空间研究了这种算子在不同条件下的不动点定理.

2 定义与预备知识

本文中我们用E表示实Banach空间,P是E中的锥,半序$\leqslant$为P诱导,$x\leqslant y \Leftrightarrow y-x\in P$.

定义1 D为E中的子集,$A:D\to E$称为D上的序Lipschitz算子,如果存在一个常数$K>0$,$\forall$ x,y $\in D$,$x\leqslant y \Rightarrow Ay-Ax\leqslant K(y-x)$,如果$0<K<1$,称$A$为序压缩算子;如果$K=1$,称$A$为序非扩张算子.

显然序非扩张算子与非扩张算子有本质的区别,如P是E中正规锥,若其正规常数为N,由$x\leqslant y\Rightarrow Ay-Ax\leqslant y-x$,有$\|Ay-Ax\|\leqslant N\|y-x\|$.当$0<N\leqslant 1$时,$A$就是一般的非扩张算子或者Lipschitz压缩算子,故与此相关的所有结论都是成立的;当$1<N$时,A就不是非扩张算子或者Lipschitz压缩算子.本文假定当P是E中正规锥时,$1<N$.

定义2[8] 设E为实Banach空间,D为E中子集,若$x\in D$,$\forall 0\leqslant t\leqslant 1$,必有$tx\in D$,则称$D$为星形的.

定义3[5] 设E为实Banach空间,D为E中闭凸子集.设$A:D\to E$,则称A为半紧的,如果它有性质:$\forall$ D中的有界序列,并且$(I-A)(x_n)$是强收敛的,则$\{x_n\}$存在一个强收敛子序列.

引理1[7] 设P是$(E,\|\cdot\|)$中的锥,则以下结论等价:

(1) P是正规的;

(2)存在E上等价范数$\|\cdot\|_1$,满足:$\theta\leqslant x\leqslant y\Rightarrow\|x\|_1\leqslant\|y\|_1$;

(3)存在常数$N>0$满足:$\theta\leqslant x\leqslant y\Rightarrow\|x\|\leqslant N\|y\|$.

引理2[6] P是E中的锥,$\leqslant$是由P导出的半序,则:

(1) $x\leqslant u$,$y\leqslant v\Rightarrow x+y\leqslant u+v$;

(2) $x\leqslant y$,$\lambda>0\Rightarrow\lambda x\leqslant\lambda y$;

收稿日期:2006-05-20

基金项目:江西省自然基金资助项目(0611009);江西省教育厅资助项目(项目编号:赣教技字[2006]123号)

作者简介:左黎明(1981—),男,江西鹰潭人,理学硕士,助教,软件工程师,主要研究方向:非线性泛函分析,信息安全工程与数字水印;

(3) $x_n \leqslant y_n, x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow x \leqslant y$

3 主要结果和证明

文献[1][2]均在正规锥条件下,对序压缩算子进行了讨论,这里我们用不同的方法得到了一个序压缩算子不动点定理.

定理1 设 E 为实 Banach 空间,D 为 E 中闭集,$A: D \to D$ 是增的序压缩算子,P 是 E 中的正规锥,且存在 $u_0 \in D$,$u_0 \leqslant Au_0$,则 A 在 D 中有不动点.

证明:因为 P 是 E 中的正规锥,由引理1,存在 E 上等价范数 $\|\cdot\|_1$,满足:

$$\theta \leqslant x \leqslant y \Rightarrow \|x\|_1 \leqslant \|y\|_1 \quad (1)$$

因为 A 为 D 上增的序压缩算子,故 $\forall x \leqslant y \Rightarrow \theta \leqslant Ay - Ax \leqslant K(y-x)$,其中 $0<K<1$. 所以由(1)式,有:

$$\|Ay-Ax\|_1 \leqslant \|K(y-x)\|_1 = K\|y-x\|_1 \quad (2)$$

显然 A 在范数 $\|\cdot\|_1$ 意义下为 Lipschitz 压缩算子. 令 $u_n = Au_{n-1}$,显然有 $u_{n-1} \leqslant u_n$,即:

$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots$

任给 $n, p \in N$,有:

$$\|u_{n+p} - u_n\| \leqslant \sum_{j=1}^{p} \|u_{n+j} - u_{n+j-1}\|_1$$

$$\leqslant (K^{p-1} + \cdots + K + 1)\|u_{n+!} - u_n\|_1$$

$$\leqslant \frac{K^n}{1-K}\|u_1 - u_0\|_1$$

当 $n \to \infty$ 时,$\|u_{n+p} - u_n\|_1 \to 0$,故 $\{u_n\}$ 为闭集 D 中 Cauchy 列,故存在 $\bar{x} \in D$,使得 $\|u_n - \bar{x}\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$,$A\bar{x} = \bar{x}$,由于 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|$ 等价,所以同时也有 $\lim\limits_{x\to\infty}\|u_n - \bar{x}\| = 0$,$u_n \leqslant \bar{x}$.

注记1:实际上条件"$u_0 \leqslant Au_0$"可换成 u_0 和 Au_0 可比较条件,定理仍然成立. 关于可比较的一些相关性质见文献[1]. 显然该证明比文献[1][2]中类似定理的证明要简洁的多. 下面我们讨论的是序非扩张算子的不动点.

定理2 设 D 为 E 中星形的闭集,$A: D \to D$ 是增的序非扩张算子,P 是 E 中的正规锥,存在 $u_0 \in D$,$\theta \leqslant u_0 \leqslant A(\frac{1}{2}u_0)$,并且 $(I-A)(D)$ 为 E 中闭子集,则 A 在 D 中有不动点.

证明: $r_n = \frac{n}{n+1}$ 其中 $n = 1,2,3\cdots$. 显然 $\frac{1}{2} \leqslant r_n \leqslant 1$,$r_n \to (n \to \infty)$,考虑映射族

$$A_n x = r_n A x,$$

显然 A_n 是 $D \to D$ 增的序压缩算子.

$$\frac{1}{2} \leqslant r_n < 1 \Rightarrow \frac{1}{2}u_0 \leqslant r_n u_0 \leqslant u_0$$

$$\Rightarrow A(\frac{1}{2}u_0) \leqslant A(r_n u_0)$$

又因为 $\theta \leqslant u_0 \leqslant A(\frac{1}{2}u_0)$,所以

$\theta \leqslant u_0 \leqslant A(r_n u_0)$.

$\theta \leqslant u_0 \leqslant A(r_n u_0) \Rightarrow \theta \leqslant r_n u_0 \leqslant r_n A(r_n u_0)$,

令 $u'_0 = r_n u_0$,故有:$\theta \leqslant u'_0 \leqslant A_n u'_0$.

根据定理1,对所有固定的 n,存在唯一的 $x_n \in D$,$A_n x_n = x_n$.

$(I-A)(x_n) = x_n - Ax_n = x_n - r_n Ax_n + r_n Ax_n - Ax_n = x_n - A_n x_n + (r_n - 1)Ax_n = (r_n - 1)Ax_n$

当 $n \to \infty$ 时,$r_n \to 1$,$(I-A)(x_n) \to \theta$,注意到 $(I-A)(D)$ 为 E 中闭子集,所以 $0 \in (I-A)(D)$,故存在 $x_0 \in D$,$(I-A)(x_0) = 0$,所以有 $Ax_0 = x_0$,因此 A 在 D 中有不动点.

定理3 设 E 为实 Banach 空间,D 为 E 中一个星形的闭集且按序有上界,$A: D \to D$ 是增的序非扩张算子,P 是 E 中正则锥,存在 $u_0 \in D$,$\theta \leqslant u_0 \leqslant A(\frac{1}{2}u_0)$,则 A 在 D 中有不动点.

证明 取 $r_n = \frac{n}{n+1}$ 其中 $n = 1,2,3\cdots$.

显然 $\frac{1}{2} \leqslant r_n < 1$,$r_n \to 1$,$(n \to \infty)$.

对于每个 n,定义 $A_n: D \to D$ 如下:

$$A_n x = r_n A x \quad (3)$$

显然 A_n 为增的序压缩算子.

$$\frac{1}{2} \leqslant r_n < 1 \Rightarrow \frac{1}{2}u_0 \leqslant r_n u_0 \leqslant u_0$$

$$\Rightarrow A(\frac{1}{2}u_0) \leqslant A(r_n u_0)$$

又因为 $\theta \leqslant u_0 \leqslant A(\frac{1}{2}u_0)$,所以

$\theta \leqslant u_0 \leqslant A(r_n u_0)$.

固定 n,$\theta \leqslant u_0 \leqslant A(r_n u_0)$

$\Rightarrow \theta \leqslant r_n u_0 \leqslant r_n A(r_n u_0)$,取 $u_0^n = r_n u_0$,有 $\theta \leqslant u_0^n \leqslant A_n u_0^n$.

定义迭代序列:$u_m^n = A_n u_{m-1}^n = r_n A u_{m-1}^n$. 由定理1,对所有固定的 n,存在唯一的 $x_n \in D$,$A_n x_n = x_n$. 另外,易知:

$$\theta \leqslant u_0^1 \leqslant u_0^2 \leqslant \cdots \leqslant u_0^n \leqslant \cdots \quad (4)$$

$$u_1^n = A_n u_0^n = \frac{n}{n+1} A u_0^n \leqslant \frac{n}{n+1} A u_0^{n+1}$$

$$\leqslant \frac{n+1}{n+2} A u_0^{n+1} = A_{n+1} u_0^{n+1} = u_1^{n+1}$$

设当 $m = k$ 时,$u_k^n \leqslant u_k^{n+1}$,则当 $m = k+!$ 时

$$u_{k+1}^{n}=A_{n}u_{k}^{n}=\frac{n}{n+1}Au_{k}^{n}\leqslant\frac{n}{n+1}Au_{k}^{n+1}$$
$$\leqslant\frac{n+1}{n+2}Au_{k}^{n+1}=A_{n+1}u_{k}^{n+1}=u_{k+1}^{n+1}$$

故由数学归纳法可证:$u_{m}^{1}\leqslant u_{m}^{2}\leqslant\cdots\leqslant u_{m}^{n}\leqslant\cdots$,根据定理1,知道 $u_{m}^{n}\to x_{n}$,再由引理2,知:

$x_{1}\leqslant x_{2}\leqslant\cdots\leqslant x_{n}\leqslant\cdots$,即序列$\{x_{n}\}$按序单调增.

D 为实Banach空间 E 中一个星形的闭集且按序有上界,P 是 E 中正则锥,所以$\{x_{n}\}$在 D 有极限,设该极限为 x_{0},则 $x_{n}\leqslant x_{0}$,$\|x_{n}-x_{0}\|\to 0$,$x_{0}\in D(n\to\infty)$.$(I-A)(x_{n})=x_{n}-Ax_{n}=x_{n}-r_{n}Ax_{n}+r_{n}Ax_{n}-Ax_{n}=x_{n}-A_{n}x_{n}+(r_{n}-1)Ax_{n}=(r_{n}-1)Ax_{n}$　　(5)

因此当 $n\to\infty$,$Ax_{n}-x_{n}\to\theta$.

由算子 A 的非扩张性和增性,所以 $x_{n}\leqslant x_{0}\Rightarrow Ax_{0}-Ax_{n}\leqslant x_{0}-x_{n}$.同时是 E 中正则锥,因此也为 E 中正规锥,设 N 为其正规常数,因此:

$$\|Ax_{0}-Ax_{n}\|\leqslant\|x_{0}-x_{n}\| \tag{6}$$

$$\|x_{0}-Ax_{0}\|$$
$$\leqslant\|x_{0}-x_{n}\|+\|Ax_{n}-x_{n}\|+\|Ax_{n}-Ax_{0}\|$$
$$\leqslant\|x_{0}-x_{n}\|+\|Ax_{n}-x_{n}\|+N\|x_{0}-x_{n}\|$$

当 $n\to\infty$时,$\|x_{0}-x_{n}\|\to 0$,$\|Ax_{n}-x_{n}\|\to 0$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_{0}-Ax_{0}\|=0$,$Ax_{0}=x_{0}$,故 x_{0} 为 A 的不动点.

注记2　由(3)式定义的算子 A_{n} 的不动点称为 A 的渐进不动点.事实上,我们无法给出 A 的迭代式,因此只能通过 A_{n} 的迭代式逼近A 的不动点.如果 P 是E 中正规锥,则有下面结论成立:

定理4　设 E 为实Banach空间,D 为 E 中一个星形的紧集,$A:D\to D$ 是增的序非扩张算子,P 是 E 中正规锥,存在 $u_{0}\in D$,$\theta\leqslant u_{0}\leqslant A(\frac{1}{2}u_{0})$,则 A 在 D 中有不动点.

定理5　设 E 为实Banach空间,D 为 E 中一个星形的有界闭凸集,$A:D\to D$ 是增的序非扩张半紧算子,P 是 E 中正规锥,存在 $u_{0}\in D$,$\theta\leqslant u_{0}\leqslant A(u/2)$,则 A 在 D 中有不动点.

证明　仿定理3,取 $r_{n}=\frac{n}{n+1}$其中 $n=1,2,3\cdots$.对于每个 n,定义算子 $A_{n}:D\to D$ 如下:

$$A_{n}x=r_{n}Ax \tag{7}$$

易知算子 A_{n} 为增压缩算子,仿定理3前半部分类似可证,存在 D 中唯一点 x_{n},使得:$A_{n}x_{n}=x_{n}$,增序列$\{x_{n}\}$按序单调.

$$(I-A)(x_{n})=x_{n}-Ax_{n}=x_{n}-r_{n}Ax_{n}+r_{n}Ax_{n}-Ax_{n}=x_{n}-A_{n}x_{n}+(r_{n}-1)Ax_{n}=(r_{n}-1)Ax_{n} \tag{8}$$

因此当 $n\to\infty$,$r_{n}\to 1$,$Ax_{n}-x_{n}\to\theta$,即$(I-A)(x_{n})$是强收敛的.由于 A 是半紧算子,故$\{x_{n}\}$存在一个强收敛子序列,不妨仍记为$\{x_{n}\}$,且 $x_{n}\to x_{0}$,故 $x_{0}\in D$.

仿定理3后半部分即可证明 x_{0} 为 A 的不动点.

参考文献:

[1]张宪.序压缩映射的不动点定理[J].数学学报,2005,(5):973-978.

[2]董祥南.序Lipschitz算子的不动点定理及迭代收敛程序的构造[J].江西师范大学学报(自然科学版),2003,(4):347-352.

[3]张庆政.序对称压缩算子方程的迭代求解及其应用[J].工程数学学报,2000,(2):131-134.

[4]盛梅波,董祥南.关于非扩张映象的不动点定理[J].华东交通大学学报,1993,(4);37-40.

[5](美)Istratescz.不动点理论及其应用[M].上海:上海科技文献出版社,1991.

[6]钟承奎,等.非线性泛函分析引论[M].兰州:兰州大学出版社,2004.

[7]郭大钧.非线性分析半序方法[M].山东:山东科技出版社,2000.

[8]郭大钧.非线性泛函分析[M].山东:山东科技出版社,2001.

Fixed Point Theorems of Order Non-expansive Operator

ZUO Li-ming, LIU Er-gen, ZHENG Xiong-jun

(1.School of Natural Science, East China Jiaotong Uni., Jiangxi Nanchang 330013; 2.Institute of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal Uni., Nanchang 330022)

Abstract:In this paper we define the concept of order non-expansive operator, and investigate the fixed point existence problem, obtained some fixed point theorems.

Key words: partial order; order non-expansive operator; cone; fixed point