

典型 DHT 拓扑结构的研究

万仲保, 王宝荣, 蔡俊

(华东交通大学 信息工程学院 江西 南昌 330013)

摘要: 从代数角度研究了主要的 DHT(分布式哈希表)拓扑结构, 为方便、深入地理解 DHT 拓扑结构, 运用群论和图论的方法重点对其拓扑结构的数学性质作了详细的分析. 这些数学性质在改进现有拓扑结构或设计新的拓扑结构时有很大的应用价值.

关键词: Cayley 图; 分布式哈希表; 拓扑结构

中图分类号: TP393

文献标识码: A

1 概述

随着 P2P 分布式网络的日益普及, 网络资源变得异常丰富, 如何准确的搜索和定位资源成为一个重要问题. 分布式哈希表(以下简称为 DHT)作为一个解决方法逐渐成为研究的重点, 目前比较常见 DHT 有 Chord^[1], Viceroy^[2], Kademlia^[3], CAN^[4], Koorde^[5] 等等. 这些 DHT 的拓扑结构在很大程度上决定着其实际的性能. 然而对 DHT 拓扑结构基础的数学性质的研究并不多, 本文正是从这一角度研究了几种重要的 DHT 拓扑结构. 以下对文中涉及的一些术语进行概述.

1.1 Cayley 图

Cayley 图在论文^[6]首次提出, 作为一种通用的群理论模型, 目的是分析对称互联网络. 其定义如下:

定义 1 G 是一个有限群, S 是群的一组生成元, 并且能完全生成 G , Cayley 图是由 G 和 S 生成的图 $\Gamma = \Gamma(G, S)$, 它的顶点和边分别定义为

$$V = G$$

$$E = \{ \{a, b\} \mid ba^{-1} \in S \} \quad a, b \in G$$

由 Cayley 图的定义可知, Cayley 图的顶点对应群中的元素, Cayley 图的边对应生成元. Cayley 图的边可以用生成元进行标记, 对于任给 $a, b \in G$, 如果存在 $g \in S$, 使得 $ag = b$, 则根据 Cayley 图的定义有

$ba^{-1} = g \in S$, 那么 a, b 之间存在一条边 $\{a, b\}$.

Cayley 图的阶与群 G 的阶相等且 Cayley 图的顶点与群 G 的元素一一对应, 凡是满足关系式 $ba^{-1} \in S$ 的顶点之间均有边相连且有对应的生成元标记.

定义 2 集合 $S = \{a, b, c, \dots\}$ 是群 G 的一组生成元, 且 S 能完全生成群 G . 对于集合 S 中的任意一个元素 s , 把 s 的逆元素 s^{-1} 加入到集 S 中. 排除掉相同的元素和单位元素 e , 即得到一个新的生成元集, 称为标准生成元集, 记为 S' .

在由标准生成元集生成的 Cayley 图中, 不难发现有这样的关系: 对于图中任意两相邻顶点 a, b , 由于存在一生成元 g 满足 $ag = b$, 而 g 的逆元素也是 S' 的元素, 故有 $a = bg^{-1}$ 式成立, 即 a, b 之间还有一条标记为 g^{-1} 的边, 它是与标记为 g 的边方向相反的边. 用一条无向的边来代替这两条并联边. 本文中的生成元集均指标准生成元集, Cayley 图均指由标准生成元集生成的图.

对于由标准生成元集生成的 Cayley 图有以下特性:

- 1) Cayley 图是无向图;
 - 2) Cayley 图是点对称图;
 - 3) Cayley 图是正则的简单图, 其顶点的度等于标准生成元集中的元素个数;
 - 4) Cayley 图的边连通度等于群图点的度数.
- 对于一个互联网络来说, 其网络连接是双向的,

因此其网络拓扑结构可以用无向图来表示. Cayley 图是无向的点对称图, 因此可以直接应用到互连网络中. 从这一角度看, Cayley 图与互连网络是等价的, 可以通过研究 Cayley 图来研究互连网络.

1.2 陪集图

定义 3 G 为群, H 是 G 的一个子群, $g \in G$, 则 $gH = \{gh: h \in H\}$ 为 H 在 G 中的一个左陪集, $Hg = \{hg: h \in H\}$ 为 H 在 G 中的一个右陪集.

定义 4 G 为群, H 为 G 的一个子群, S 为所有 H 在 G 中左陪集的集合, 即 $S = \{xH: x \in G\}$, 以 S 中元素为顶点, 当且仅当存在 $h_1, h_2 \in H$ 使得 $xh_1 = yh_2$, $x, y \in G$, 顶点 xH 与 yH 之间存在边, 由此可得到 G 的子群 H 的陪集图.

从前面 Cayley 图的特性知道每个 Cayley 图都是顶点对称的, 然而并非所有的顶点对称的图都可以用 Cayley 来表示, 但每个顶点对称的图都是一个陪集图.

1.3 图直径

在分析网络性能时, 有一个因素很重要, 即最大传输延时. 在图理论中, 它被近似的抽象为一个参数: 直径.

定义 5 $G(V, E)$ 为图, 其中 V 为点集, E 为边集, 对于 G 中任意两点 x, y , 用 $d_G(x, y)$ 表示从 x 到 y 的距离 (即最短路径长度), 则图的直径可以表示为

$$d(G) = \max_{x, y \in V} \{d_G(x, y)\}$$

图的直径是图的一个很重要的属性, 然而要计算一个任意 Cayley 图的直径却已被证明为 NP 复杂性问题, 对于一些特殊的 Cayley 图, 有的可以给出其准确的直径, 有的目前仅可以给出直径的上界或者下界.

1.4 节点的度

Cayley 图中节点的度表现为该节点邻居的数目. 在 DHT 中, 一个节点的路由缓存中要保存其邻居的路径, 那么度越小时节点要需要的缓存就越小, 一个新的节点加入时, 受到影响的节点也就越少, 而度越大时, 节点可选择的路径就越多, 数据传输的可靠性就越高, 一个新的节点加入时, 网络的波动也越大, 所以节点的度对 DHT 路由性能和稳定性来说是很重要的.

2 典型 DHT 拓扑结构的分析

目前常见 P2P 系统使用的 DHT 拓扑结构分别有: Pastry 和 Kademila 使用的 hypercube 拓扑, Chord 使用的 ring graph 拓扑, CAN 使用的 n -dimensional torus 拓扑, Viceroy 使用的 butterfly 拓扑, Koorde 和

D2B 使用的 De Bruijn 拓扑, 等等.

2.1 Hypercube

作为一种非常重要且典型的 Cayley 图, hypercube 是用来设计 DHT 结构化 P2P 网络的一种拓扑结构.

实例 1 对于一个自然数 m , 令 $(Z_m, +)$ 表示模 m 的加法群, 令群 $G = (Z_2^k, +)$, 其中 Z_2^k 表示由数字 0, 1 组成的长度为 k 的数字的集合, $+$ 表示模 2 加. 则群 G 对应的 Cayley 图为 k -dimensional hypercube, 用 $H(k)$ 来表示.

当 $k=3$ 时 $H(3)$ 表示如图 1.

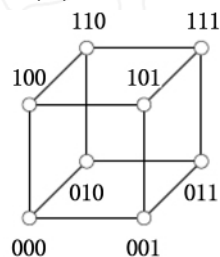


图 1 3-d hypercube

当 $k=4$ 时 $H(4)$ 表示为图 2.

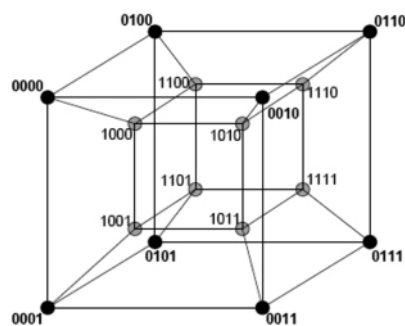


图 2 4-d hypercube

需要指出的是, 生成 Cayley 图的群的表示方法并不唯一, 下面的群也可以生成 hypercube.

实例 2 令 G 为群, 其包含 2^n 个由置换 $(2i-1, 2i)$ 生成的元素, 则群 G 对应的 Cayley 图与 k -dimensional hypercube 同构.

当 $k=3$ 时, 得到的 Cayley 图为图 3.

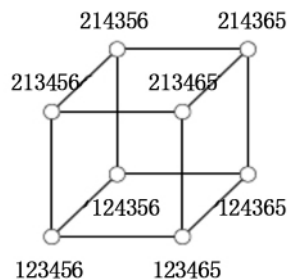


图 3 3-d hypercube

K -d hypercube 的图直径为和顶点的度都为 K .

2.2 Ring

Chord 使用一个一维的循环 key 空间, 所有 Chord 的节点都被安置在一个 Ring 图上, Ring 图的拓扑结构, 由如下定义可得.

实例3 令群 G 为 $((Z_2^d, +), \{2^i: i \in \{0, 1, \dots, d-1\}\})$, 则群 G 对应的 Cayley 图就是 ring graphs.

图4显示了 $d=3$ 时的 ring graphs.

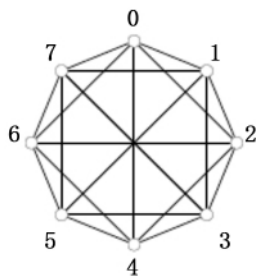


图4 3位key空间的
Chord ring

Chord ring 的图直径为 $\lceil d/2 \rceil$ ^[7], 节点的度为 $2d$.

2.3 n-dimensional torus

用 $MT_{n,k}$ 来表示 n -dimensional torus, 其实质是长度为 k 的 n 个循环的笛卡尔乘积.

实例4 令 G 为群 Z_k^n 由含 $2n$ 个元素的 $\{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0) | 0 \leq i \leq d-1\}$ 的子集生成, 则群 G 对应的 Cayley 图与 n -dimensional torus 同构, 其节点数为 k^n .

2.1 中 hypercube 其实可以看作 $MT_{n,k}$ 的一个特例, 即 $k=2$ 时的 $MT_{n,2}$, 也就是 $H(n)$.

图5表示 $n=2, k=4$ 时的 $MT_{n,k}$ 的 Cayley 图.

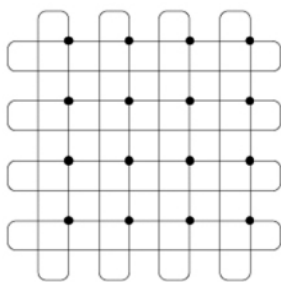


图5 $MT_{2,4}$ torus

$MT_{n,k}$ 的图直径为 $n \lceil k/2 \rceil$, 节点的度为 $2n$.

2.4 Butterfly

关于 n 维的 butterfly 图 (也有学者称之为 wrapped butterfly), 有两种不同的表示方法, 分别为:

实例5 令 G 为 S_{2n} 的子群 S_{2n} 有 $n2^n$ 个元素, 由 $(12 \dots 2n)^2$ 与 $(12 \dots 2n)^2(12)$ 生成, 则 G 对应的 Cayley 图与 Butterfly 同构.

实例6 令 $BF(n)$ 表示 n 维的 butterfly 图, 图的

顶点集为 $Z_n \times (Z_2)^n$, 图的边定义如下, 对于任意一个顶点 (l, x) , $l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $x = x_0x_1 \dots x_{n-1}x_n$, $x_i \in Z_2$, $0 \leq i \leq n-1$, 与其相邻的顶点为 $(l+1, x)$ 和 $(l+1, x(l))$, $x(l) = x_0x_1 \dots x_{l-1}\overline{x_l}x_{l+1} \dots x_{n-1}x_n$, $\overline{x_l}$ 表示二进制值 x_l 的补.

图6表示的是 $BF(4)$ 图.

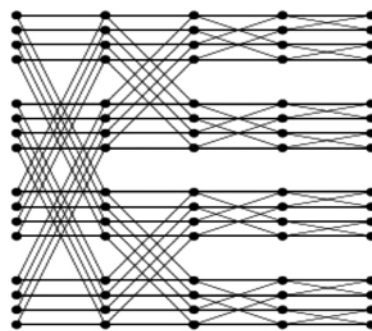


图6 $BF(4)$ 图

当 $n=1$ 时, $BF(1) = K_2$; 当 $n=2$ 时, $BF(1) = H(3)$; 当 $n \geq 3$ 时, $BF(n)$ 图中边界上的节点的度为 2, 其余的点的度为 4, $BF(n)$ 图的直径的下界为 $n + \lceil n/2 \rceil$.

2.5 De Bruijn

前面介绍的拓扑结构都是 Cayley 图, 而 De Bruijn 图并不是一个 Cayley 图, 而是一个节点度数固定的有向图, 其定义如下.

实例7 同实例5, 令 G 为 S_{2n} 的子群 S_{2n} 有 $n2^n$ 个元素, 由 $(12 \dots 2n)^2$ 与 $(12 \dots 2n)^2(12)$ 生成, 再令 H 为由 $(12 \dots 2n)^2$ 生成的子群, H 含 n 个元素, 则 G 的子群 H 的陪集图与 De Bruijn 图同构.

图7为一个直径为 3 的 De Bruijn 图, 图中每个点 m 有两条出边分别连到点 $2m \bmod 2^3$ 和 $2m+1 \bmod 2^3$.

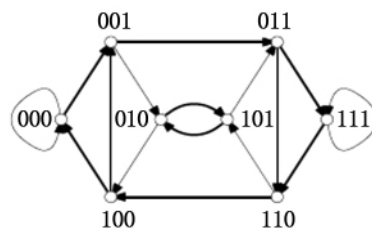


图7 直径为3的De Bruijn图

对于一个节点总数为 N 的 De Bruijn 图, 其直径为 $\log N$.

以上运用 Cayley 图及陪集图分析了 5 种不同的 DHT 拓扑结构, 其中, hypercube 和 ring 属于度数非常数的拓扑结构, n -dimensional torus, butterfly 和 De Bruijn 属于常度数的拓扑结构, 下表对以上 5 种 DHT 拓扑结构作了对比 (N 表示图的总节点数).

表 1 5 种 DHT 拓扑结构的比较

DHT 系统	DHT 静态拓扑	(平均) 度数	直径
HyperCup	hypercube	$O(\log N)$	$O(\log N)$
Chord	ring	$O(\log N)$	$O(\log N)$
CAN	$n - \dim$ torus	$O(n)$	$O(n \cdot N^{1/n})$
Viceroy	butterfly	$O(1)$	$O(\log N)$
Koorde/D2B	De Bruijn	$O(1)$	$O(\log N)$

3 Cayley 图和 DHT

3.1 连通度和容错度

连通度是 Cayley 图的一个重要属性,其分为点连通度和边连通度,点连通度是指在一个图中最少要移除多少个点才能使得图不再连通,这个数目就是该图的点连通度,边连通度与点连通度类似.连通度和 DHT 的容错度的关系是很紧密的.

容错度是网络的另一个重要因素,用连通度可以更好的定义容错度,对比连通度的定义,很显然,容错度比连通度小 1,表示在该图中最多可以移除多少个点而图仍能保持连通,那么,对任意一个图的一个顶点,将的邻居全部移除去,图就不再连通,因此这个图的连通度最大不超过图中度最小的顶点的度,而容错度不超过连通度减 1.

3.2 Cayley 图与 DHT 路由算法

在设计一个 DHT 的路由算法时,如果采用了基于 Cayley 图的拓扑结构,那么 Cayley 图可以帮助简化路由算法的设计,因为在 Cayley 图中,两个随意点之间的路径可以表示为一个随意点到一个确定点的路径.在 Cayley 图中,任意两点之间的路径可以用生成元的序列来表示,如 $x_0, x_1, \dots, x_n$. 现在假设点 a 到点 b 的路径为 $x_0, x_1, \dots, x_n$, 那么有 $ax_0x_1 \dots x_n = b$, 由此可以得到 $b^{-1}ax_0x_1 \dots x_n = I$, 表示么元,因此 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 也是点 $b^{-1}a$ 到么元点的路径,所以搜索两个随意点之间的路径可以代替为搜索一个随意点到一个定点的路径,能使路由算法的设计变的简单.

4 总结

本文运用 Cayley 图详细研究了几种重要的 DHT 拓扑结构的基础数学性质:图直径和节点的度,这两个性质在分析研究 DHT 网络性能时具有重要作用.具体分析了五种常见 DHT 拓扑结构,并对他们的网络性能做了对比,最后指出了 Cayley 图中的生成元序列对简化 DHT 路由算法所起的简化作用.

参考文献:

- [1] I. Stoica, R. Morris, D. Karger, et al. Chord: A scalable peer-to-peer lookup service for internet applications. Annual Conference of the ACM Special Interest Group on Data Communications [C]. San Diego, CA, USA: ACM Press, 2001. 149 - 160.
- [2] D. Malkhi, M. Naor, and D. Ratajczak, Viceroy: A scalable and dynamic emulation of the butterfly, in Proc. 21st ACM Symposium on Principles of Distributed Computing [C]. Monterey, AC: ACM Press, 2002. 183 - 192.
- [3] P. Maymounkov and D. Mazieres, Kademlia: A peer-to-peer information system based on the xor metric, in Proceedings of International Peer-to-Peer Symposium [C]. Cambridge: Springer, 2002. 53 - 65.
- [4] S. Ratnasamy, P. Francis, M. Handley, et al. A scalable content-addressable network. In Annual Conference of the ACM Special Interest Group on Data Communications [C]. San Diego, CA, USA: ACM Press, 2001. 161 - 172.
- [5] F. Kaashoek and D. Karger, Koorde: A simple degree-optimal distributed hash table, in International Peer-to-Peer Symposium [C]. Berkeley, CA: Springer, 2003. 98 - 107.
- [6] S. Akers and B. Krishnamurthy, A group-theoretic model for symmetric interconnection networks [J]. IEEE Transactions on Computers, 1989, 38(4): 555 - 566.
- [7] P. Ganesan and G. S. Manku, Optimal routing in Chord, in ACM SIAM Symposium on Distributed Algorithms [C]. New Orleans, Louisiana: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004. 176 - 185.

Analysis on Typical DHT Topologies

WAN Zhong - Bao, WANG Bao - Rong, CAI Jun

(School of Information Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: This paper studies some important DHT Topologies from an algebraic standpoint. To make a profound understanding of topologies, it analyzes their algebraic properties through group and graph theory, which are valuable in improving current topology and designing topology.

Key words: cayley graphs; DHT; topology

(责任编辑: 王建华)