

文章编号: 1005 - 0523(2008) 01 - 0097 - 05

局部对称 Lorentz 流形中具常平均曲率的完备超曲面

吴泽九

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 设 L_1^{n+1} 是截面曲率 K_L 满足 $b/2 < a \leq K_L \leq b$ 的局部对称 Lorentz 流形, M 是 L_1^{n+1} 中具常平均曲率 H 的完备类空超曲面, S 是 M 的第二基本形式模长平方, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 M 在点 x 处的 n 个主曲率. 本文得到: 如果 L_1^{n+1} 的截面曲率 $K(e_i \wedge e_{n+1})$ 满足 $\sum_i \lambda_i K(e_i \wedge e_{n+1}) = nbH$, 则 (i) $S < 2\sqrt{n-1}(2a-b)$ 时, M 全脐; (ii) $S = 2\sqrt{n-1}(2a-b)$ 时, 若 $n=2$, M 全脐; 若 $n \geq 3$, M 是双曲柱面. 该结论是文 [1] 中相应结果的推广与改进.

关键词: 局部对称; Lorentz 流形; 类空超曲面; 全脐

中图分类号: O186

文献标识码: A

用 L_p^{n+p} 表示指标为 p 的 $n+p$ 维连通伪黎曼流形, 它被称为指数是 p 的半定空间, 特别地, L_1^{n+1} 被称作 Lorentz 流形. 当 Lorentz 流形 L_1^{n+1} 的截面曲率为常数 c 时, 称 L_1^{n+1} 为 Lorentz 空间型, 记为 $L_1^{n+1}(c)$, 特别地, 当 $c > 0$, 称之为 de Sitter 空间, 记为 $S_1^{n+1}(c)$. L_1^{n+1} 的超曲面 M 被称作类空超曲面, 若 M 从 L_1^{n+1} 中诱导的度量是正定的.

当外围流形是具良好对称性的 Lorentz 空间型时, 具常平均曲率超曲面的研究已有许多结果 (见 [1-4]). 而对外围空间不具较好对称性的局部对称 Lorentz 流形时, 具常平均曲率超曲面的研究结果还较少 (见 [5]). 设 L_1^{n+1} 表示截面曲率 K_L 满足条件 $b/2 < a \leq K_L \leq b$ (a, b 都是正实数) 的局部对称 Lorentz 流形, 本文对其完备的类空超曲面进行研究, 得到

定理 1 设 M 是 L_1^{n+1} 中具常平均曲率 H 的完备类空超曲面 S 为其第二基本形式模长平方, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 M 在点 x 处的 n 个主曲率. 如果 L_1^{n+1} 关于由 e_i 与 e_{n+1} 在 TL_1^{n+1} 中张成的非退化 2-平面的截面曲率 $K(e_i \wedge e_{n+1})$ 满足 $\sum_i \lambda_i K(e_i \wedge e_{n+1}) = nbH$, 则

(i) $S < 2\sqrt{n-1}(2a-b)$ 时, M 是全脐超曲面, 且等距于球面 $S^n(\tilde{c})$, 其中 $\tilde{c} = K_L - S/n$.

(ii) $S = 2\sqrt{n-1}(2a-b)$ 时, 若 $n=2$, M 是全脐的且等距于 $L^2(\tilde{c})$, 其中 $\tilde{c} = K_L - 2a + b$; 若 $n \geq 3$, 局部地, 有 $M = H^1(r) \times S^{n-1}(t)$, 其中 $r = a \llbracket -(n-1)^{1/2} \rrbracket$, $t = a \llbracket -(n-1)^{-1/2} \rrbracket$.

当 $a=b=c$ 时, L_1^{n+1} 变为 $S_1^{n+1}(c)$, 显然 $\sum_i \lambda_i K(e_i \wedge e_{n+1}) = nbH$ 恒成立, 故由定理 1 可得

推论 1 设 M 是 $S_1^{n+1}(c)$ 的具常平均曲率 H 的完备类空超曲面, 则

(i) $S < 2\sqrt{n-1}c$ 时, M 是全脐超曲面且等距于球面 $S^n(c - S/n)$.

(ii) $S = 2\sqrt{n-1}c$ 时, 若 $n=2$, M 是平坦的全脐超曲面; 若 $n \geq 3$, 局部地, $M = H^1(r) \times S^{n-1}(t)$, 其中 $r = c \llbracket -(n-1)^{1/2} \rrbracket$, $t = c \llbracket -(n-1)^{-1/2} \rrbracket$.

收稿日期: 2007-12-24

基金项目: 华东交通大学科研基金资助(06ZKJC04)

作者简介: 吴泽九(1976-), 男, 江西会昌人, 硕士, 讲师, 研究方向为微分几何.

注: 推论 1 被文 [5] 所研究, 但该文(3.18) 计算有误, 遗漏(ii) 中 $n \geq 3$ 的结论, 定理 1 和推论 1 是 [5] 中结果的推广与改进.

1 公式与引理

设 L_1^{n+1} 是 $n+1$ 维局部对称 Lorentz 流形, 其截面曲率 K_L 满足 $\frac{b}{2} < a \leq K_L \leq b$, 其中 a, b 为正实数, M 是 L_1^{n+1} 的完备类空超曲面. 各种指标范围规定如下:

$$1 \leq A, B, C, \dots \leq n+1; 1 \leq i, j, k \leq \dots \leq n;$$

不特别说明时, Σ 表示对重复指标求和. 在 L_1^{n+1} 上选取局部标准正交标架场 $\{e_A\}$, 使得限制在 M 上, e_{n+1} 与 M 正交, $\{e_i\}$ 与 M 相切. 设 $\{\omega_A\}$ 是关于 $\{e_A\}$ 的对偶标架场, $\{\omega_{AB}\}$ 是 L_1^{n+1} 的联络形式. L_1^{n+1} 的伪黎曼度量为 $ds^2 = \Sigma \varepsilon_A (\omega_A)^2$, 其中 $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n = 1, \varepsilon_{n+1} = -1$. L_1^{n+1} 的结构方程为(见 [6])

$$d\omega_A = \Sigma \varepsilon_B \omega_{AB} \wedge \omega_B, \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, \quad (2.1)$$

$$d\omega_{AB} = \Sigma \varepsilon_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} - \frac{1}{2} \Sigma K_{ABCD} \varepsilon_C \varepsilon_D \omega_C \omega_D \wedge, \quad (2.2)$$

其中 K_{ABCD} 是 L_1^{n+1} 的曲率张量 K 的分量. 限制在 M 上, 有

$$\omega_{n+1} = 0, \omega_{in+1} = \Sigma h_{ij} \omega_j, \quad (2.3)$$

$$d\omega_i = \Sigma \omega_{ij} \wedge \omega_j, \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \quad (2.4)$$

$$d\omega_{ij} = \Sigma \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \frac{1}{2} \Sigma R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l, \quad (2.5)$$

$$R_{ijkl} = K_{ijkl} - (h_{ik} h_{jl} - h_{il} h_{jk}), \quad (2.6)$$

其中 R_{ijkl} 是 M 的曲率张量分量. 分别定义 h_{ijk} 及 h_{ijkl} 如下:

$$\Sigma h_{ijk} \omega_k = dh_{ij} + \Sigma h_{ki} \omega_{kj} + \Sigma h_{jk} \omega_{ki}, \quad (2.7)$$

$$\Sigma h_{ijkl} \omega_l = dh_{ijk} + \Sigma h_{ljk} \omega_{li} + \Sigma h_{ilk} \omega_{lj} + \Sigma h_{ijl} \omega_{lk}, \quad (2.8)$$

则

$$h_{ijk} - h_{ikj} = -K_{n+1ijk}, \quad (2.9)$$

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \Sigma h_{mi} R_{mjkl} + \Sigma h_{mj} R_{milk}. \quad (2.10)$$

K_{ABCD} 的共变导数分量 $K_{ABCD,E}$ 定义为

$$\Sigma \varepsilon_E K_{ABCD,E} \omega_E = dK_{ABCD} + \Sigma \varepsilon_E (K_{EBCD} \omega_{EA} + K_{AECD} \omega_{EB} + K_{ABED} \omega_{EC} + K_{ABCE} \omega_{ED}). \quad (2.11)$$

限制在 M 上有

$$K_{n+1ijk,l} = K_{n+1ijkl} + K_{n+1in+1k} h_{jl} + K_{n+1ijn+1} h_{kl} + \Sigma K_{mijk} h_{ml}. \quad (2.12)$$

L_1^{n+1} 为局部对称的, 即

$$K_{ABCD,E} = 0. \quad (2.13)$$

引理 1(见 [6]) 设 $\{a_i | 1 \leq i \leq n\}$ 是满足条件 $\Sigma_i a_i = 0$ 的 n 个实数, 则

$$|\Sigma_i a_i^3| \leq (n-2) \sqrt{n(n-1)} (\Sigma_i a_i^2)^{3/2}$$

等式成立当且仅当 $a_1, \dots, a_n$ 中至少有 $n-1$ 个彼此相等.

引理 2 [8,9] 设 M 是 Ricci 曲率有下界的 n 维完备黎曼流形, F 为 M 上有上界的 C^2 函数, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in M$, 使得

$$\sup F - \varepsilon < F(x), \|\nabla F\|(x) < \varepsilon, \Delta F(x) < \varepsilon.$$

引理 3 [4] 设 M 是 de Sitter 空间 $S_1^{n+1}(c)$ 中具非常平均曲率的完备类空超曲面. 记 $S_+(c) = -nc + n/(2(n-1))$ [10] $H^2 + (n-2)|H| \sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)c}$, 若 $S = S_+(c)$, 则 M 一定是双曲柱面 $H^1(c_1) \times S^{n-1}(c_2)$.

2 定理的证明

选取适当的标架场 $\{e_i\}$,使得 M 上任意点 x 有 $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$.不失一般性,假定 M 的平均曲率 $H = \frac{1}{n}(\sum_i \lambda_i) \geq 0$. 仿照 [6, (4.4)] 的计算,可得

$$\sum h_{ij} \Delta h_{ij} = nH \sum_i \lambda_i K(e_i \wedge e_{n+1}) - S \sum_i K(e_i \wedge e_{n+1}) + \sum (\lambda_i - \lambda_j)^2 K(e_i \wedge e_j) - nH \sum_i \lambda_i^3 + S^2 \quad (3.1)$$

令 $\tilde{S} = S - nH^2$,由 $b/2 < a \leq K_N \leq b$,则

$$-S \sum_i K(e_i \wedge e_{n+1}) \geq -nbS \quad (3.2)$$

$$\sum (\lambda_i - \lambda_j)^2 K(e_i \wedge e_j) \geq a \sum_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = 2na \tilde{S} \quad (3.3)$$

因为 $\sum_i (\lambda_i - H) = 0$, $\sum_i (\lambda_i - H)^2 = \tilde{S}$, $\sum_i (\lambda_i - H)^3 = \sum_i \lambda_i^3 - 3H \tilde{S} - nH^3$,由引理 1 有

$$(n-2) / \sqrt{n(n-1)} \tilde{S}^{3/2} \geq \sum_i \lambda_i^3 - 3H \tilde{S} - nH^3 \quad (3.4)$$

所以

$$-nH \sum_i \lambda_i^3 \geq -nH(n-2) / \sqrt{n(n-1)} \tilde{S}^{3/2} - 3nH^2 \tilde{S} - n^2 H^4 \quad (3.5)$$

由(3.1) ~ (3.5) 及题设 $\sum_i \lambda_i K(e_i \wedge e_{n+1}) = nbH$ 有

$$\begin{aligned} \sum h_{ij} \Delta h_{ij} &\geq \tilde{S} [2a-b]n + S - 2nH^2 - (n-2)H \sqrt{\frac{n}{n-1}} \tilde{S} \\ &= \tilde{S} [(2a-b)n - \frac{n}{2\sqrt{n-1}}S + \frac{1}{2\sqrt{n-1}} [\sqrt{n-1}+1]\sqrt{\tilde{S}} - (\sqrt{n-1}-1)\sqrt{nH}]^2] \\ &\geq \tilde{S} [2a-b]n - n/(2\sqrt{n-1})S \end{aligned} \quad (3.6)$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta \tilde{S} &= \frac{1}{2} \Delta S = \sum (h_{ijk})^2 + \sum h_{ij} \Delta h_{ij} \\ &\geq n/(2\sqrt{n-1}) \tilde{S} - \sqrt{n-1}(2a-b) - nH^2 - \tilde{S} \end{aligned} \quad (3.7)$$

由(2.6)式,

$$R_{ii} = \sum_j K_{ijij} + \sum_j (h_{ij})^2 - nHh_{ii} \geq (n-1)a - n^2 H^2/4$$

故 M 的 Ricci 曲率有下界.

给定正数 ε ,令 $F = (\tilde{S} + \varepsilon)^{1/2}$,由定理条件 $S \leq 2\sqrt{n-1}(2a-b)$,故 F 是有上界的 C^2 函数,应用引理 2, $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in M$,使得

$$\sup F - \varepsilon < F(x), \|\nabla F\|(x) < \varepsilon, \Delta F(x) < \varepsilon. \quad (3.8)$$

对 F 求微分及 Laplace 算子有

$$F \Delta F + \|\nabla F\|^2 = \frac{1}{2} \Delta \tilde{S} \quad (3.9)$$

由(3.8), (3.9)有

$$\frac{1}{2} \Delta \tilde{S}(x) = F \Delta F(x) + \|\nabla F\|^2(x) < \varepsilon(\varepsilon + F) \quad (3.10)$$

选取数列 $\{\varepsilon_m\}$,使 $\{\varepsilon_m\} \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$,对每一个 m ,存在点 $x_m \in M$,使得(3.8)成立,而且 $\varepsilon_m [\varepsilon_m + F(x_m)] \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$.再由(3.8), $F(x_m) > \sup F - \varepsilon_m$, $\{F(x_m)\}$ 是有界数列,因此 $\{F(x_m)\}$ 有极限,不妨设极限为 F_0 ,即 $F(x_m) \rightarrow F_0$,因此 $F_0 \geq \sup F$.故 $F_0 \geq \sup F$,再由 F 的定义,有

$$\tilde{S}(x_m) \rightarrow \tilde{S}_0 = \sup \tilde{S} \quad (3.11)$$

由(3.7), (3.10)有

$$\varepsilon_m [\varepsilon_m + F(x_m)] > \frac{1}{2} \Delta \tilde{S} \geq \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \tilde{S}(x_m) [\sqrt{n-1}(2a-b) - nH^2 - \tilde{S}(x_m)]$$

当 $m \rightarrow \infty$ 时, 因此

$$0 \geq \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \tilde{S}_0 [\sqrt{n-1}(2a-b) - nH^2 - \tilde{S}_0] \quad (3.12)$$

(i) 当 $S < 2\sqrt{n-1}(2a-b)$ 时, $\tilde{S}_0 < 2\sqrt{n-1}(2a-b) - nH^2$, 由 (3.12) 得 $\tilde{S}_0 = 0$, 从而 $S = nH^2$, M 全脐. 由 (2.6) 式, M 等距于球面 $S^n(\tilde{c})$, 其中 $\tilde{c} = K_L - S/n$.

(ii) 当 $S = 2\sqrt{n-1}(2a-b)$ 时, $\tilde{S} = 2\sqrt{n-1}(2a-b) - nH^2$ 是常数, 由 (3.6) (3.7) 有

$$h_{ijk} = 0, \sum h_{ij} \Delta h_{ij} = 0 \quad (3.13)$$

所以 (3.2) ~ (3.6) 中不等号均成为等号. 当 (3.6) 等号成立时

$$(\sqrt{n-1} + 1)\sqrt{\tilde{S}} - (\sqrt{n-1} - 1)\sqrt{n}H = 0 \quad (3.14)$$

当 (3.3) 变为等式时

$$\sum (\lambda_i - \lambda_j)^2 (K_{ijj} - a) = 0$$

由于 $K_{ijj} \geq a$, 故当 $\lambda_i \neq \lambda_j$ 时有

$$K_{ijj} = a (\lambda_i \neq \lambda_j) \quad (3.15)$$

当 $n=2$ 时从 (3.14) 得 $\tilde{S}=0$, 即 M 全脐, 此时 $\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{S/2} = \sqrt{2a-b}$, M 等距于 $L^2(c)$, 其中 $\tilde{c} = K_L - 2a + b \geq 0$.

当 $n \geq 3$ 时, M 不可能全脐. 若不然, 则有 $S = nH^2$, 结合 (3.14) 得 $S=0$, 与题设 $S = 2\sqrt{n-1}(2a-b) \neq 0$ 矛盾. 故 M 不全脐.

适当选取标准正交标架场 $\{e_i\}$ 使 $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, 由 (2.7) 及 (3.13) 有 λ_i 为常数且

$$\omega_{ij} = 0 (\lambda_i \neq \lambda_j)$$

对上式外微分并利用 (2.5), 有

$$R_{ijkl} = 0 (\lambda_i \neq \lambda_j). \quad (3.16)$$

由 (3.16), (3.15) 及 (2.6) 得

$$\lambda_i \lambda_j = a (\lambda_i \neq \lambda_j). \quad (3.17)$$

因 (3.4) 等号成立及 M 不全脐, 由引理 1, 可假定 $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \mu$, 故由 (3.17) 有

$$\lambda \mu = a, \quad (3.18)$$

$$\lambda^2 + (n-1)\mu^2 = 2\sqrt{n-1}(2a-b). \quad (3.19)$$

由 (3.18) 得 $\mu = \frac{a}{\lambda}$ 代入 (3.19) 有

$$(\lambda^2 - a\sqrt{n-1})^2 + 2\sqrt{n-1}(b-a)\lambda^2 = 0$$

故 $\lambda^2 - a\sqrt{n-1} = 0, 2\sqrt{n-1}(b-a)\lambda^2 = 0$ 即 $\lambda^2 = a\sqrt{n-1}$ 且 $b = a$.

此时 L_1^{n+1} 变为 $S_1^{n+1}(a)$, 且 $\lambda^2 = a\sqrt{n-1}, \mu^2 = \frac{a}{\sqrt{n-1}}$, 即 M 是 de Sitter 空间 S_1^{n+1} 中具有两个不同主曲

率的超曲面, 其重数分别是 1 重与 $n-1$ 重, 此时容易计算 $S = S_+(a)$ 成立, 由引理 3, M 是双曲柱面 $H^1(r) \times S^{n-1}(t)$, 其中 $r = a [-(n-1)^{1/2}]$, $t = a [-(n-1)^{-1/2}]$. 定理 1 得证.

参考文献:

- [1] Akutagawa, K., On space-like hypersurfaces with constant curvature in the deSitter space [J]. Math. Z., 1987, (196): 13-19.
- [2] Ramanathan, J., Complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in a de Sitter space [J]. Indiana Univ. Math. J., 1987, (36): 349-359.
- [3] C. Ouyang and Z. Li., Complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space [J]. Chinese Quart. J.

Math. ,2000,(15) :45 – 49.

- [4] Ki,U. H. ,Kim,H. J. & Nakagawa,H. ,On space – like hypersurfaces with constant mean curvature of a Lorentz space form [5] . Tokyo J. Math. ,1991,(14) :205 – 215.
- [5] Alencar H,Do Carmo M. ,Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres [6] . Proc Amer Math Soc. ,1994,(120) :1223 – 1229.
- [6] Shen,Y. B. & Dong,Y. X. ,On complete space – like submanifolds with parallel mean curvature vector [7] . Chin. Ann. of Math. , 1988,19B(3) :369 – 380.
- [7] Montiel. S. ,A Characterzation of Hyperbolic Cylinders in the de Sitter Space [8] . Tohoku Math J. ,1996,48(1) :23 – 31.
- [8] Omori,H. ,Isometric immersion of Riemmanian manifolds [9] . J. Math. Soc. Japan. ,1967,(19) :205 – 214.
- [9] Yau,S. T. ,Harmonic functions on complete Riemmanian manifolds [10] . Comm. Pure and Appl. Math. ,1975,(28) :201 – 228.
- [10] Ishihara T. ,Maximal spacelike submanifolds of a pseudo – Riemannian Space of constant curvature [11] . Michigan Math J. ,1988, 35(3) :345 – 352.

Complete Space – like Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in a Locally Symmetric Lorentzian Manifold

WU Ze – jiu

(School of Basic Science Departments,East China Jiaotong University,Nanchang 330013 ,China)

Abstract: Let L_1^{n+1} be a locally symmetric Lorentzian manifold with sectional curvature K_L satisfying the condition $\frac{b}{2} < a \leq K_L \leq b$ and M be an complete space – like hypersurface with constant mean curvature H in L_1^{n+1} , the square of the norm of the second fundamental form of M is denoted by $S, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ are the principal curvatures at point x of M . Assume that the sectional curvature $K(e_i \wedge e_{n+1})$ of L_1^{n+1} satisfies $\sum_i \lambda_i K(e_i \wedge e_{n+1}) = nbH$, (i) If $S < 2\sqrt{n-1}(2a-b)$, then M is totally umbilic; (ii) If $S = 2\sqrt{n-1}(2a-b)$, then M is totally umbilic when $n=2$ and M is a hyperbolic cylinder when $n \geq 3$, which generalizes and improves the corresponding results in reference [6]

Key words: locally symmetric; Lorentzian manifold; space – like hypersurface; totally umbilical.

(责任编辑: 周尚超)