

文章编号: 1005-0523(2008)01-0105-04

一个三角形中线不等式猜想的证明

刘健

(华东交通大学 初等数学研究所, 江西 南昌 330013)

摘要: 采用三角形不等式中 $R-r-s$ 方法, 证明了作者多年前提出的一个有关三角形的猜想不等式, 即有关中线 m_a, m_b, m_c 与外接圆半径 R 以及内切圆半径 r 的不等式: $1/m_a + 1/m_b + 1/m_c \leq 2(1/R + 1/r)/3$.

关键词: 三角形; 中线; 不等式

中图分类号: O178

文献标识码: A

涉及三角形中线与常见元素的几何不等式是一类有趣的不等式, 但优美而深刻的结果并不多见. 本文将证明作者在十余年前提出的一个一直未解决的猜想不等式(见文献[1]中的问题 shc16), 即下述漂亮的关于三角形中线与外接圆半径以及内切圆半径的倒数型不等式:

定理 设 $\triangle ABC$ 的三条中线为 m_a, m_b, m_c , 其外接圆半径与内切圆半径分别为 R, r , 则

$$\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \leq \frac{2}{3} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right). \quad (1)$$

等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

根据 Euler 不等式 $R \geq 2r$, 为研究不等式(1)可考虑以下问题: 求使不等式

$$\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \leq \frac{1}{r} - k \left(\frac{1}{r} - \frac{2}{R} \right). \quad (2)$$

对任意三角形成立的最大常数 k 值 $k_{\max}$, 这是一个很困难的问题(尚无人解决). 应用计算机研究这个问题, 我们发现 $k_{\max} \approx 0.34406 \dots$. 由于在(2)式中取 $k = \frac{1}{3} = 0.3333 \dots$ 就得到不等式(1). 可见不等式(1)不仅很优美而且是很接近最优的.

2 几个引理

除上面的符号外, 以下用 a, b, c 表示 $\triangle ABC$ 的三个边长, s, Δ 分别表示其半周长和面积, h_a, h_b, h_c 表示三条高线. 另外, 以 Σ 分别表示循环和, 例如 $\Sigma a = a + b + c$, $\Sigma m_b m_c = m_b m_c + m_c m_a + m_a m_b$.

引理1 若对任意 $\triangle ABC$ 成立有关边长, 中线与面积的不等式:

$$f(a, b, c, m_a, m_b, m_c, \Delta) \geq 0, \quad (3)$$

则此不等式等价于

$$f\left(m_a, m_b, m_c, \frac{3}{4}a, \frac{3}{4}b, \frac{3}{4}c, \frac{3}{4}\Delta\right) \geq 0. \quad (4)$$

上述结论即为重要的“中线对偶定理”(其中不等号也可反向), 参[2].

引理2 在 $\triangle ABC$ 中成立不等式:

收稿日期: 2008-01-05

作者简介: 刘健(1963-), 男, 江西兴国人, 助理研究员(中级), 研究方向为几何不等式.

$$(i) \quad \Sigma m_a \geq \frac{1}{2R} \Sigma a^2; \quad (5)$$

$$(ii) \quad \Sigma m_b m_c \geq \frac{1}{2} (\Sigma m_a^2 + \Sigma h_a^2) \quad (6)$$

等号均当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

不等式(5) 易由已知的半对称不等式 $4Rm_a \geq b^2 + c^2$ (见 [2]) 得出, 不等式(6) 的证明参见文献 [1].

引理 3 在 $\triangle ABC$ 中成立不等式:

$$m_a m_b m_c \geq \frac{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2}{8R}. \quad (7)$$

等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时成立.

证 注意到 M. Klamkin 与 A. Meire 曾证得不等式(参见 [3]):

$$(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \left(\frac{1}{m_a^2} + \frac{1}{m_b^2} + \frac{1}{m_c^2} \right) \leq 9. \quad (8)$$

上式等价于

$$9(m_a m_b m_c)^2 \geq 4\Delta^2 (m_b^2 m_c^2 + m_c^2 m_a^2 + m_a^2 m_b^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right),$$

两边开平方并利用 $abc = 4\Delta R$ 与恒等式:

$$m_b^2 m_c^2 + m_c^2 m_a^2 + m_a^2 m_b^2 = \frac{9}{16} (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) \quad (9)$$

即得不等式(7).

引理 4 在 $\triangle ABC$ 中有

$$16(m_a m_b m_c)^2 = s^6 - 3r(4R - 11r)^4 - 3r^2(20R^2 + 40rR + 11r^2)s^2 - r^3(4R + r)^3. \quad (10)$$

恒等式(10) 的证明很容易, 从略.

引理 5 在 $\triangle ABC$ 中有

$$\frac{R(4R + r)^2}{4R - 2r} \geq s^2 \geq 16Rr - 5r^2, \quad (11)$$

等号均当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

不等式链(11) 的右半不等式即为重要的 Gerretsen 不等式, 见 [4], [5]. 左半不等式即为 Kooi 不等式(见 [6]), 最近作者给出了它的等价形式的一个推广, 见 [7].

引理 6 在 $\triangle ABC$ 中有

$$s^4 - (4R^2 + 20Rr - 2r^2)s^2 + r(4R + r)^3 \leq 0, \quad (12)$$

等号均当且仅当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时成立.

不等式(12) 即为三角形的 Sondat 基本不等式, 参 [8], [9].

2 定理的证明

由 $abc = 4\Delta R$ 与 $\Delta = rs$ 可知不等式(1) 等价于

$$\Sigma \frac{1}{m_a} \leq \frac{2}{3} \left(\frac{4\Delta}{abc} + \frac{a+b+c}{2\Delta} \right), \quad (13)$$

按引理 1 知, 要证上式只要证明在上式中作“中线对偶变换”:

$$(a, b, c, m_a, m_b, m_c, \Delta) \rightarrow (m_a, m_b, m_c, \frac{3}{4}a, \frac{3}{4}b, \frac{3}{4}c, \frac{3}{4}\Delta)$$

后的不等式成立, 即需证:

$$\Sigma \frac{4}{3a} \leq \frac{2}{3} \left(\frac{3\Delta}{m_a m_b m_c} + \frac{2\Sigma m_a}{3\Delta} \right).$$

利用 $abc = 4\Delta R$ 又知上式等价于

$$2R(2m_a m_b m_c \Sigma m_a + 9\Delta^2) \geq 3m_a m_b m_c \Sigma bc, \quad (14)$$

这等价于两边平方后的不等式,即等价于

$$4R^2 [(m_a m_b m_c)^2 (\sum m_a^2 + 2 \sum m_b m_c) + 36 m_a m_b m_c \Delta^2 \sum m_a + 81 \Delta^4] \geq 9 (m_a m_b m_c)^2 (\sum bc)^2.$$

也即

$$(m_a m_b m_c)^2 [6R^2 \sum m_a^2 - 9 (\sum bc)^2 + 32R^2 \sum m_b m_c] + 144R^2 \Delta^2 m_a m_b m_c \sum m_a + 324R^2 \Delta^4 \geq 0. \quad (15)$$

按引理2与引理3,要证上式只要证:

$$(m_a m_b m_c)^2 [6R^2 \sum m_a^2 - 9 (\sum bc)^2 + 16R^2 (\sum m_a^2 + \sum h_a^2)] + 9 \Delta^2 \sum a^2 \sum b^2 c^2 + 324R^2 \Delta^4 \geq 0. \quad (16)$$

两边乘以16并利用等式 $4 \sum m_a^2 = 3 \sum a^2$, $4R^2 \sum h_a^2 = \sum b^2 c^2$, 又知上式等价于

$$16 (m_a m_b m_c)^2 (24R^2 \sum a^2 - 5 \sum b^2 c^2 - 18abc \sum a) + 144 \Delta^2 (\sum a^2 \sum b^2 c^2 + 36R^2 \Delta^2) \geq 0. \quad (17)$$

以 $\sum a = 2s$, $\Delta = rs$ 与已知恒等式:

$$abc = 4Rrs, \quad (18)$$

$$\sum a^2 = 2 (s^2 - 4Rr - r^2), \quad (19)$$

$$\sum b^2 c^2 = s^4 - 2 (4Rr - r^2) s^4 + (4R + r)^2 r^2, \quad (20)$$

以及引理4的恒等式(10)代入(17)式,化简整理后为以下有关 R, r, s 的不等式:

$$\begin{aligned} Q \equiv & -5s^{10} + (48R^2 - 44Rr + 113r^2) s^8 - 2r (384R^3 - 1502rR^2 + 3104r^2R - 59r^3) s^6 \\ & - 2r^2 (288R^4 + 2000rR^3 - 13500r^2R^2 - 2868r^3R + 59r^4) s^4 + r^3 (4R + r) (2112R^4 + 8240rR^3 \\ & + 620r^2R^2 - 860r^3R - 113r^4) s^2 + r^4 (48R^2 + 20rR + 5r^2) (4R + r)^4 \geq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

设

$$t_1 = s^2 - 16Rr + 5r^2,$$

$$T_0 = -s^4 + (4R^2 + 20Rr - 2r^2) s^2 - r (4R + r)^3.$$

经过反复研究,我们得到恒等式(可用Maple软件验证):

$$Q \equiv p_1 t_1^4 + p_2 t_1^3 + p_3 t_1^2 + p_4 T_0 + p_5, \quad (22)$$

其中

$$p_1 = 28R (R - 2r),$$

$$p_2 = 8r (R - 2r) [24 (R - 2r)^2 + 473r (R - 2r) + 105r^2],$$

$$p_3 = 4 (R - 2r)^2 r^2 [416 (R - 2r)^2 + 15904r (R - 2r) + 2271r^2],$$

$$p_4 = 5s^6 + (88Rr - 123r^2) s^4 + 5643r^4 s^2 + 217080r^5 (R - 2r) + 187947r^6,$$

$$p_5 = 32r^3 [456R^5 + 9180rR^4 - 98267r^2R^3 + 193131r^3R^2 - 189726r^4R + 71212r^5] s^2 \\ - 3r (2432R^6 + 17248rR^5 - 432702r^2R^4 + 1073067r^3R^3 - 1232207r^4R^2 + 594786r^5R - 73052r^6),$$

由Euler不等式 $R \geq 2r$ 可知 $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_3 \geq 0, p_4 \geq 0$. 又注意到 $t_1 \geq 0, T_0 \geq 0$ (按引理5与引理6知). 因此可见,要证不等式(21)即 $Q \geq 0$, 只要证 $p_5 \geq 0$, 即需证:

$$\begin{aligned} & s^2 (456R^5 + 9180rR^4 - 98267r^2R^3 + 193131r^3R^2 - 189726r^4R + 71212r^5) \\ & - 3r (2432R^6 + 17248rR^5 - dr^2R^4 + er^3R^3 - fr^4R^2 + 594786r^5R - 73052r^6) \geq 0. \end{aligned} \quad (23)$$

这里 $d = 432702, e = 1073067, f = 1232207$. 下面,我们分两种情形完成上式的证明.

(I) 当 $456R^5 + 9180rR^4 - 98267r^2R^3 + 193131r^3R^2 - 189726r^4R + 71212r^5 \geq 0$ 时.

在这种情形下,按引理5所述右半不等式,这时要证(23)式只要证:

$$\begin{aligned} & (16Rr - 5r^2) (456R^5 + 9180rR^4 - 98267r^2R^3 + 193131r^3R^2 - 189726r^4R + 71212r^5) \\ & - 3r (2432R^6 + 17248rR^5 - dr^2R^4 + er^3R^3 - fr^4R^2 + 594786r^5R - 73052r^6) \geq 0, \end{aligned}$$

上式即

$2r^2 (R - 2r) [6428 (R - 2r)^4 + 304247r (R - 2r)^3 + 757971r^2 (R - 2r)^2 + 807813r^3 (R - 2r) + 309096r^4] \geq 0$, 由 $R \geq 2r$ 知上式成立,从而不等式(23)成立.

(II) 当 $456R^5 + 9180rR^4 - 98267r^2R^3 + 193131r^3R^2 - 189726r^4R + 71212r^5 < 0$ 时.

根据引理5的左半不等式,这时要证(23)式只要证:

$$\begin{aligned} & R (4R + r)^2 (456R^5 + 9180rR^4 - 98267r^2R^3 + 193131r^3R^2 - 189726r^4R + 71212r^5) \\ & - 3 (4R - 2r) r (2432R^6 + 17248rR^5 - dr^2R^4 + er^3R^3 - fr^4R^2 + 594786r^5R - 73052r^6) \geq 0, \end{aligned} \quad (24)$$

即

$$(R-2r)(7296R^7+135936rR^6-1418888r^2R^5+4771276r^3R^4-7519299r^4R^3+6001003r^5R^2-2148698r^6R+219156r^7)\geq 0 \quad (25)$$

要证上式只要证:

$$7296R^7+135936rR^6-1418888r^2R^5+4771276r^3R^4-7519299r^4R^3+6001003r^5R^2-2148698r^6R+219156r^7>0. \quad (26)$$

设 $\frac{R}{r}=x+2$, 则知上式等价于

$$7296(x+2)^7+135936(x+2)^6-1418888(x+2)^5+4771276(x+2)^4-7519299(x+2)^3+6001003(x+2)^2-2148698(x+2)+219156>0,$$

展开上式即

$$7296x^7+238080x^6+825208x^5+781436x^4-269091x^3-587655x^2+161833x+341172>0. \quad (27)$$

由 Euler 不等式 $R\geq 2r$ 知 $x\geq 0$, 因此要证上式只要证:

$$781436x^4-269091x^3-587655x^2+161833x+341172>0, \quad (28)$$

两边除以 341172, 即

$$(2.290\cdots)x^4-(0.788\cdots)x^3-(1.722\cdots)x^2+(0.474\cdots)x+1>0,$$

可见要证上式只要证更强的不等式:

$$2x^4-0.8x^3-2x^2+0.4x+1>0,$$

这等价于

$$10x^4-4x^3-10x^2+2x+5>0.$$

应用函数的单调性极易证上式成立, 从而不等式 (23) 在情形 (II) 下得到证明.

综合以上两种情形, 不等式 (23) 获证, 从而定理的不等式 (1) 获证, 显然不等式 (1) 式中等号只在 $\triangle ABC$ 为正三角形时取得, 定理证毕.

参考文献:

- [1] 刘健, 100 个待解决的三角形不等式问题 [A], 单尊. 几何不等式在中国 [C], 南京: 江苏教育出版社, 1996.
- [2] D. Mitrinovic, J. E. Pecaric and V. Volenec, Recent Advances in Geometric Inequalities [M]. London: Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [3] 程秋驰, 吴跃生, 两个新的三角形不等式 [A]. 杨学枝. 不等式研究 [C], 拉萨: 西藏人民出版社, 2000, 358-362.
- [4] O. Bottema 等(单尊译). 几何不等式 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1991.
- [5] 刘健, Kooi 不等式的一个等价式的推广 [J], 贵州师范大学学院, 2005, 23(2): 60-62.

Testifying a Conjecture of an Median Inequality of Triangle

LIU Jian

(East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: The $R-r-s$ method of triangle inequality is employed to prove the conjecture of a triangle inequality proposed by the author many years ago, which is the reciprocal inequality for median m_a, m_b, m_c , the circumradius R and the radius of the inscribed circle r : $1/m_a + 1/m_b + 1/m_c \leq 2(1/R + 1/r)/3$.

Key words: triangle; median; inequality

(责任编辑: 周尚超)