第25卷第1期 华东交通大学学报 Vol. 25 No. 1
2008年2月 Journal of East China Jiaotong University Feb. ,2008

文章编号:1005-0523(2008)01-0109-04

一类热传导逆时问题的数值解法

任常青,刘唐伟,王泽文

(东华理工大学 数信学院,江西 抚州 344000)

摘要: 考虑了确定初始时刻温度颁的一类热传导方程递时反问题. 运用拟逆法思想对一类热传导逆时问题进行了分析,最后给出方程的差分格式,通过传播因子法证明了差分格式的稳定性,并通过数值算例验证算法的有效性.

关 键 词: 拟逆法; 逆时问题; 正则化; 差分法; 热传导方程

中图分类号: O175 **文献标识码:** A

一般说来,逆时热传导问题是不适定的,即当我们用 $t=T$ 时刻的真实温度场 $g(x)$ 的测量数据 $g^{\delta}(x)$ 求初始时刻 $t=0$ 的温度 $f(x)$ 时,由于测量误差 δ 的存在,所以几乎是不可能的. 拟逆法的基本思想是构造原来不适定反问题的扰动问题,使其变成适定的问题,进而用扰动问题的解近似原不适定的反问题的解. 由于拟逆法简单易用,近年来,有许多文章对该法做了深入的探讨. 例如,作者 Lattes 和 Lions [1] ,Miller [2] 等已经运用拟逆法近似求解了热传导逆时问题,刘继军 [3] 也对拟逆法做了比较详尽的阐述,但其在构造一维逆时热传导问题的扰动问题时用到了四阶偏导数,而且还加了相应的边值条件,这就给数值求解扰动问题带来了难度. 本文则运用拟逆法对一维逆时热传导问题进行了比较详细的介绍,并重新构造逆时热传导问题的扰动问题,最后运用差分法对扰动问题进行求解,数值算例表明算法是有效的. 更值得注意的是,本文的方法也可推广到非齐次方程或二维情形.

1 问题的提出

考虑如下正问题:

$$\begin{cases} u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t) & (x,t)\in(c,d)\times(0,T) \\ u(c,t)=0,u(d,t)=0 & t\in(0,T) \\ u(x,T)=f(x) & x\in(c,d) \end{cases} \qquad FVP$$

由边值条件和初始条件 $u(x,0)=f(x)$ 求 $u(x,t)$ 称为正问题. 记为 FVP. 易知该问题有形式解:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\exp\left(-\frac{a^2n^2\pi^2t}{(d-c)^2}\right)\sin\frac{n\pi(x-c)}{(d-c)^2},$$

其中 C_n 为待定系数.

下面考虑相应的反问题:

$$\begin{cases} u_1(x,t)=a^2u_{xx}(x,t) & (x,t)\in(c,d)\times(0,T) \\ u(c,t)=0,u(d,t)=0 & t\in(0,T) \\ u(x,T)=g(x) & x\in(c,d) \end{cases} \qquad BVP$$

记为 BVP. BVP 是由边值条件和终点时刻 $t=T$ 的值 $g(x)$ 求 $0\le t<T$ 时刻的值. 文献 [3] 证明了 BVP 有解的

收稿日期:2007-10-20

基金项目:国家自然科学基金项目(10561001);江西省自然科学基金资助项目(0511005).

作者简介:任常青(1982-),男,山西大同人,硕士研究生,从事数学物理方程反问题的研究.

充要条件;文献[4]则证明,如果 BVP 有解,则必唯一. 用 $t=T$ 时刻的温度分布确定 FVP 形式解的待定系数 C_n,得:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{d-c}\int_c^d g(\xi)\sin\frac{n\pi(x-c)}{d-c}d\xi\exp\left[\frac{a^2n^2\pi^2}{(d-c)^2}(T-t)\right]\sin\frac{n\pi(x-c)}{d-c};$$

则当 $t=0$ 时,有:

$$f(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{d-c}\int_c^d g(\xi)\sin\frac{n\pi(\xi-c)}{d-c}d\xi\exp\left[\frac{a^2n^2\pi^2}{(d-c)^2}(T-t)\right]\sin\frac{n\pi(x-c)}{d-c};\tag{1}$$

2 构造与 BVP 相应的适定的扰动问题

在问题 BVP 中,令 $\tau=T-t$,并记 $w(x,\tau)=u(x,T-t)$,记 $Z=a^2n^2\pi^2T/(n^2\pi^2\alpha+(d-e)^2)$ 则问题 BVP 等价于下述问题

$$\begin{cases}w_\tau(x,\tau)=-a^2w_{xx}(x,\tau) & (x,\tau)\in(c,d)\times(0,T)\\ w(c,\tau)=0,w(d,\tau)=0 & \tau\in(0,T)\\ w(x,0)=g(x) & x\in(c,d)\end{cases}\qquad BVP1$$

即形式上是通过边值条件和初值条件求 $\tau=T$ 时的温度分布.

对于给定的 $a>0$,考虑 $BVP1$ 的扰动问题:

$$\begin{cases}v_\tau(x,\tau)=-a^2v_{xx}(x,\tau)+av_{xx\tau}(x,\tau) & (x,\tau)\in(c,d)\times(0,T)\\ v(c,\tau)=0,v(d,\tau)=0 & \tau\in(0,T)\\ v(x,0)=g(x) & x\in(c,d)\end{cases}\qquad BQVP$$

显然 $BQVP$ 的解为:

$$v(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{d-c}\int_c^d g(\xi)\sin\frac{n\pi(\xi-c)}{d-c}d\xi\ \exp\left[\frac{a^2n^2\pi^2\tau}{n^2\pi^2\alpha+(d-c)^2}\right]\sin\frac{n\pi(x-c)}{d-c};$$

记 $\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{d-c}}\sin\frac{n\pi(x-c)}{d-c}$,$(g,\varphi_n)$ 为 $L^2(c,d)$ 上的内积,则:

$$v(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}(g,\varphi_n)\exp\left(\frac{a^2n^2\pi^2\tau}{n^2\pi^2\alpha+(d-c)^2}\right)\varphi_n(x)\tag{2}$$

显然,当 $\alpha=0$ 时,$v(x,T)$ 即为 BVP 的解;对小扰动项 $\alpha>0$,级数(2)对任意 $g\in L^2(c,d)$ 都是收敛的,因而,对精确 g 的扰动数据 g^δ,可用式(2)定义逆时问题温度的近似值.

定义
$$R_\alpha g:=\sum_{n=1}^{\infty}(g,\varphi_n)\exp(Z)\varphi_n(x)\tag{3}$$

下面我们证明 $R_\alpha g^\delta$ 对初始温度场 $f(x)$ 的收敛性.

定理 如果正则化参数 $\alpha=\alpha(\delta)>0$ 当 $\delta\to0$ 时满足:

$$\alpha(\delta)\to0,\qquad \exp\left(\frac{a^2T}{\alpha(\delta)}\right)\delta\to0,$$

则对扰动数据 g^δ 成立:当 $\delta\to0$ 时,$\|R_{\alpha(\delta)}g^\delta-f\|_{L^2(c,d)}\to0$.

证明:无妨令,则:$\|R^\delta-g\|_{L^2(c,d)}\le\delta$,则:

$$\begin{aligned}\|R_\alpha g^\delta-f\|_{L^2(c,d)}&\le\|R_\alpha g^\delta-R_\alpha g\|_{L^2(c,d)}+\|R_\alpha g-f\|_{L^2(c,d)}\\&\le\|R_\alpha\|_{L^2(c,d)}\delta+\|R_\alpha g^\delta-f\|_{L^2(c,d)}\end{aligned}\tag{4}$$

由式(2)和$\{\varphi_n\}$在 $L^2(c,d)$ 上的正交完备性知,

$$\|R_\alpha g\|^2_{L^2(c,d)}=\sum_{n=1}^{\infty}|(g,\varphi_n)|^2_{L^2(c,d)}\exp(2Z);$$

显然,对任意 n,有 $2Z\le\frac{2\alpha^2T}{\alpha}$,故

$$\|R_\alpha g\|^2_{L^2(c,d)}\le\exp\left(\frac{2\alpha^2T}{\alpha}\right)\|g\|^2_{L^2(c,d)}.$$

即:
$$\|R_\alpha\|_{L^2(c,d)}=\exp\left(\frac{\alpha^2T}{\alpha}\right).\tag{5}$$

另外,由式(1)和式(3)知(其中记 $H = a^2n^2\pi^2T/(d-e)^2$

$$\| R_\alpha g - f \|^2_{L^2(c,d)} = \sum_{n=1}^{\infty}[\exp(Z) - \exp(H)]^2 |(g,\varphi_n)|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{N}[\exp(Z) - \exp(\frac{a^2n^2\pi^2T}{(d-c)^2})]|(g,\varphi_n)|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty}[\exp(Z) - \exp(H)]^2.$$

由 $|(g,\varphi_n)|^2 = (\sqrt{2/d-c}\int_c^d g(\xi)\sin\frac{n\pi(\xi-c)}{d-c}d\xi)^2$ 的收敛性知,对 $\forall\varepsilon>0$,存在 $N>0$,有 $\sum_{n=N+1}^{\infty}[\exp(Z) - \exp(H)]^2|(g,\varphi_n)|^2 \le \varepsilon/2$;对此有限 N,当 $\alpha>0$ 很小时,$\sum_{n=1}^{N}[\exp(Z)-\exp(H)]^2|(g,\varphi_n)|^2\le\varepsilon/2$ 即当 $\alpha\to0$ 时,$\| R_\alpha g - f\|_{L^2(c,d)}\to0$. (6)

综(4),(5),(6)式,定理得证.

3 BQVP 的离散

将定义域 $R=\{(x,\tau):c\le x\le d,0\le t\le T\}$ 分成 $(n-1)\times(m-1)$ 个小矩形,长和宽分别为 $\Delta x=h$ 和 $\Delta\tau=k$. 记

$$v(x^i,\tau_j) = v_j^i; \qquad g(x_i) = g_i;$$

$$v_\tau(x_i,\tau_j) = (v_i^{j+1} - v_i^j)/\tau; \qquad v_{xx}(x_i,\tau_j) = (v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j)/h^2;$$

$$v_{xx\tau}(x_i,\tau_j) = [v_{xx}(x_i,\tau_{j+1}) - v_{xx}(x_i,\tau_j)]/\tau;$$

若令 $r=\frac{\alpha}{h^2\tau}$,则 $BQVP$ 的微分方程可离散为:

$$-rv_{i+1}^{j+1} + (2r+\frac{1}{\tau})v_i^{j+1} - rv_{i-1}^{j+1} = -(\frac{a^2}{h^2}+r)v_{i+1}^j + (\frac{2a^2}{h^2}+2r+\frac{1}{\tau})v_i^j - (\frac{a^2}{h^2}+r)v_{i-1}^j;$$

上式中用了六个点,且由文献[5]中的传播因子法知存在 $c=\frac{a^2}{\alpha}$,使得 $|G(\sigma,\tau)|\le1+c\tau$ 成立,故算法稳定.

4 数值算例

考虑如下问题:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) & (x,t)\in(-\pi,\pi)\times(0,0.5) \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t) = 0 & 0<t<0.5 \\ u(x,0.5) = e^{-0.5}\sin x & -\pi<x<\pi \end{cases}$$

由 $T=0.5$ 反演 $t=0$ 时的值. 其解析解为 $u(x,t) = e^{-t}\sin x$. 取 $n=31$,$m=21$,$\alpha=0.1$,由上述方法可得其近似解与精确解的图形如下:

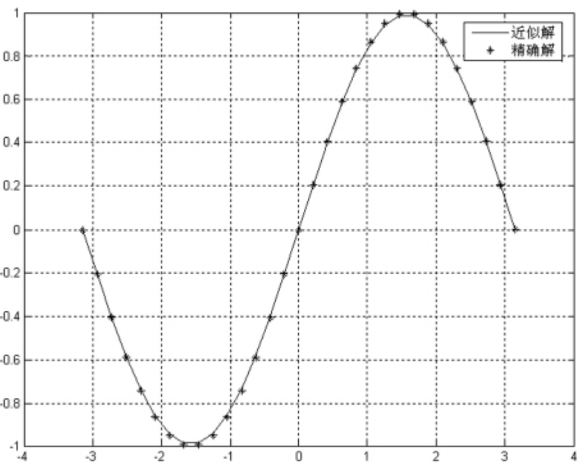

图 1　$T=0.5$ 反演 $t=0$;

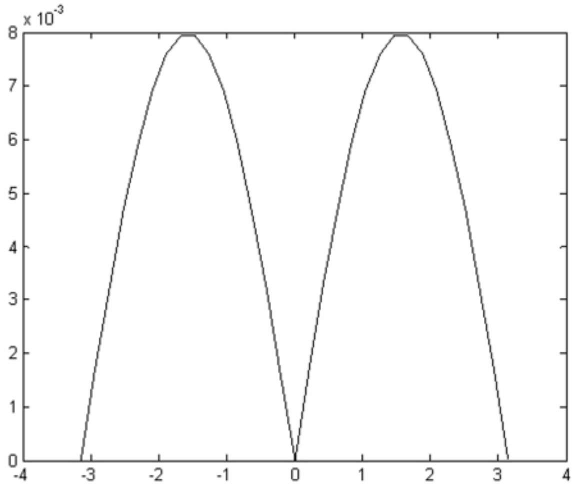

图 2 精确解与近似解的绝对误差

参考文献:

[1] R. Lattes J. L. Lions, the Method of Quasi – Reversibility [A]. Applications to partial Differential Equations [C]. New York: American Elseiver, 1969.

[2] K. Miller, Stabilized quasi – reversibility and other nearly best possible methods for non – well – posed problems [A]. Symposium on Non – Well – Posed Problems and Logarithmic Convexity, Lecture Notes in Mathematics [M]. Berlin: Springer – Verlag. 1973.

[3] 刘继军,不适定问题的正则化方法及应用 [M]. 北京: 科学出版社. 2005.

[4] L. C. Evans, Partial Differential Equations [Z]. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1998.

[5] Xiang – Tuan Xiong, Chu – Li Fu, Zhi Qian. Two numerical methods for solving a backward heat conduction problem [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 179: 370 – 377.

A numerical method for solving a backward heat conduction

REN Chang – qing, LIU Tang – wei, WANG Ze – wen

(Faculty of Mathematics and Information Science, East China Institute of Technology, Fuzhou, 344000, China)

Abstract: We consider teh prollem of a backward heat conduction to determine the moment of the initial temperature distribution. by the idea of quasi – reversibility. Finally we give a difference scheme of the equation and prove the stability of the difference scheme by the Lax – Richtmyer method. Numerical result shows that our algorithm is effective.

Key words: Quasi – reversibility; inverse problem; Regularization; difference scheme; heat conduction equation

(责任编辑: 周尚超)