

带随机延滞的衍生的 ARCH 模型的几何遍历性

王允艳, 唐明田

(江西理工大学 理学院 江西 赣州 341000)

摘要: 引入了带随机延滞的门限自回归滑动平均-自回归条件异方差模型, 讨论了这个模型的极限行为, 并给出了该模型以几何速率收敛的充分条件. 该模型将固定延滞的衍生的门限自回归滑动平均-自回归条件异方差模型推广为延滞受到一个有限状态马氏链控制的衍生的门限自回归滑动平均-自回归条件异方差模型, 能更好的拟合现实世界中的诸多实际问题. 同时, 推广了自回归条件异方差模型, 增强了模型的适应性, 能够更好的拟合金融市场中价格行为波动的现象.

关键词: 马氏链; 随机延滞; 极限行为; 几何遍历

中图分类号: O211.61

文献标识码: A

1 模型引入

设 $(\Omega, \mathcal{H}, P_r)$ 是一个概率空间, m 为一正整数, R^m 记 m 维实数空间, $\mathcal{B}_m$ 为 R^m 上的 Borel σ -代数. 令 $E = \{1, 2, \dots, m\}$ 是一个有限集合, $\mathcal{F}$ 记 E 的所有子集生成的 σ -代数. $\{Z_t, t \geq 0\}$ 表示一个定义在 $(\Omega, \mathcal{H}, P_r)$ 上的不可约非周期的马氏链, 它的状态空间为 $(E, \mathcal{F})$.

定义 1 设

$$\begin{cases} X_{t+1} = f(X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-Z_{t+1}}) + \varepsilon_{t+1} \\ \varepsilon_{t+1} = h_{t+1}^{1/\beta} e_{t+1} \\ h_{t+1}^r = \alpha + \alpha_{10}(\varepsilon_t^+)^{\eta\beta} + \alpha_{20}(\varepsilon_t^-)^{\eta\beta} + \dots + \alpha_{1Z_{t+1}}(\varepsilon_{t-Z_{t+1}}^+)^{\eta\beta} + \alpha_{2Z_{t+1}}(\varepsilon_{t-Z_{t+1}}^-)^{\eta\beta} \end{cases} \quad (1)$$

其中 f 是 $R^{j+1} \rightarrow R^1$ 的可测函数, 它在 R^{j+1} 的每一个有界集上是有界的. 且满足 $\alpha > 0$, $0 \leq \alpha_{1j} < 1$, $0 \leq \alpha_{2i} < 1$, $j \in E$, $0 < r \leq 1$, $\beta \geq 1$; $Ee_t = 0$, $E|e_t| < \infty$, $\varepsilon_t^+ = \max\{\varepsilon_t, 0\}$, $\varepsilon_t^- = \min\{\varepsilon_t, 0\}$, 则 (1) 定义的非线性时间序列模型为带随机延滞的衍生的 ARCH 模型.

令

$$Y_t = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-m}, Z_t)^T, t \geq 1 \quad (2)$$

定义 2 设 $m+2$ 维随机向量序列由模型 (2) 定义, Π 是一概率分布. 如果当 $Y_0 \sim \Pi$ 时, $\forall t \geq 1$, 有 $Y_t \sim \Pi$, 则 Π 称为模型 (2) 的不变分布.

2 不可约性、非周期性及相关结论

我们对模型做出以下假设:

收稿日期: 2007-11-20

基金项目: 江西理工大学校级基金资助项目.

作者简介: 王允艳 (1981-), 女, 山东枣庄人, 江西理工大学助教, 理学硕士, 从事非线性时间序列方面的研究.

A1 $\forall t \geq 0 \{ \varepsilon_{t+1} \}$ 与 $\{ X_s, s \leq t \}$ 独立; A2 $\forall t \geq 0 Z_t$ 与 ε_t 相互独立, 且 Z_t 与初始随机变量 $(X_0, X_1, \dots, X_{-m})$ 相互独立; A3 $\forall i \in E, \varepsilon_i$ 有处处为正的连续下半连续的密度函数 $\Phi(\cdot)$.

引理 1 设 A1 ~ A3 成立, 则模型 (2) 确定的序列 $\{Y_t\}$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{H}, P_r)$ 上, 以 $(R^{m+1} \times E, B_{m+1} \times F)$ 为状态空间的齐次马氏链.

令 $p_{ij} = P_r(Z_{t+1} = j | Z_t = i)$, $P((\hat{x}, i), A \times \{j\}) = P_r(Y_{t+1} \in A \times \{j\} | Y_t = (\hat{x}, i))$

并且 $\forall l \geq 2, P^{(l)}((\hat{x}, i), A \times \{j\}) = P_r(Y_{t+l} \in A \times \{j\} | Y_t = (\hat{x}, i))$,

其中 $t \geq 0, (\hat{x}, i) \in R^{m+1} \times E, A \times \{j\} \in B_{m+1} \times F$.

$$P^{(1)}((\hat{x}, i), A \times \{j\}) = \sum_{k \in E} \int_{R^{m+1}} P((\hat{x}, i), d\omega \times \{k\}) P^{(l-1)}((\omega, k), A \times \{j\})$$

注意到关于模型 (2) 的假设之一是: $\{Z_t\}$ 是不可约的, 从而可知, 对 (E, F) 上的任一测度 λ , $\{Z_t\}$ 是 λ -不可约的. 适当地选取一个测度, 仍以 λ 记之, 满足 $\forall i \in E, \lambda\{i\} > 0$. 于是可以导出一个定义在 $(R^{m+1} \times E, B_{m+1} \times F)$ 上的测度 $\mu_{m+1} \times \lambda$, 这里 μ_{m+1} 为 (R^{m+1}, B_{m+1}) 上的 Lebesgue 测度, 使得 $\mu_{m+1}(A) > 0$ 蕴含 $\mu_{m+1} \times \lambda(A \times \{j\}) > 0, A \in B_{m+1} \in E$.

引理 2 设 $\{Y_t\}$ 是由模型 (2) 确定的序列, 且 A1 成立, 令 $\Lambda = \Lambda_0 \times \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_m, \Lambda_k \in B_k, k = 0, 1, \dots, m$; $I_{\Lambda_k}(\cdot)$ 表示 Λ_k 的示性函数. 则它的 l 步转移函数为: 当 $1 \leq l \leq m$ 时,

$$P^{(l)}((\hat{x}, i), A \times \{j\}) = \prod_{q=0}^{m-1} I_{\Lambda_{q+1}}(x_q) \sum_{k_1, \dots, k_{l-1} \in E} p_{ik_1} \dots p_{k_{l-1}j} \int_{\Lambda_{l-1} \times \dots \times \Lambda_0} \Phi(y_{l-1} - f(U_l)) \cdot \Phi(y_{l-2} - f(U_{l-1})) \dots$$

$$\Phi(y_1 - f(U_2)) \cdot \Phi(y_0 - f(U_1)) dy_{l-1} \dots dy_0;$$

$$P^{(m+1)}((\hat{x}, i), A \times \{j\}) = \sum_{k_1, \dots, k_m \in E} p_{ik_1} \dots p_{k_mj} \int_A \Phi(y_m - f(U_{m+1})) \cdot \Phi(y_{m-1} - f(U_m)) \dots \Phi(y_1 - f(U_2)) \cdot$$

$$\Phi(y_0 - f(U_1)) dy_m \dots dy_0;$$

当 $l \geq m+2$ 时,

$$P^{(l)}((\hat{x}, i), A \times \{j\}) = \sum_{k_1, \dots, k_{m-1} \in E} p_{ik_1} \dots p_{k_{m-1}j} \int_R \Phi(y_{l-1} - f(U_l)) dy_{l-1} \dots$$

$$\int_R \Phi(y_{m+1} - f(U_{m+2})) dy_{m+1} \int_A \Phi(y_m - f(U_{m+1})) \dots \Phi(y_0 - f(U_1)) dy_m \dots dy_0;$$

其中 $U_l = (x_0, \dots, x_{k_1}), U_{l-s} = (y_{l-s}, \dots, y_{l-1}, x_0, \dots, x_{k_{s+1}-s}), 1 \leq s \leq k_{s+1}$;

$U_{l-s} = (y_{l-s}, \dots, y_{l-s+k_{s+1}}), k_{s+1} < s \leq l-1$.

引理 3 设 A1, A2 和 A3 成立, 则由模型 (2) 确定的序列 $\{Y_t\}$ 是 $\mu_{m+1} \times \lambda$ 不可约和非周期的.

引理 4 设 $\{Y_t\}$ 是由模型 (2) 确定的序列, 且 A1, A2 和 A3 成立, A 为 R^{m+1} 中的一个有界集合, 且 $\mu_{m+1}(A) > 0$, 则 $\forall i \in E, A \times \{i\}$ 是一个关于 $\{Y_t\}$ 的小集.

3 模型收敛的一个充分条件

设 $\{X_t\}$ 为 (1) 确定的序列, 令 $\bar{X}_t = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-m}), t \geq 0, \bar{X}_0 = (X_0, X_{-1}, \dots, X_{-m})$ 为初始随机向量. $\{Y_t\}$ 是由模型 (2) 确定的序列.

定理 1 假设模型 (2) 满足 A1, A2 和 A3. 若又有 (i) 存在常数 $\theta_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, m$, 使得 $\forall j \in E, |f(x_0, \dots, x_j)|^r \leq \sum_{i=0}^m \theta_i |x_i|^r$; (ii) $\forall t \geq 0, E[|e_{t+1}|^r | Z_t = i] \leq 1$; (iii) $\theta_{\max} + (m+2)\alpha_{\max}^{1/\beta} < 1$, 其中 $\theta_{\max} = \max_{0 \leq i \leq m} \{\theta_i\}, \alpha_{\max} = \max_{0 \leq i \leq m} \{\alpha_{1i}, \alpha_{2i}\}$ 成立, 则存在唯一的概率分布 π^* 及正数 $\rho < 1$, 使得对 $\bar{X}_0 = (X_0, X_{-1}, \dots, X_{-m})$ 的任意可能的取值 $\hat{x}$ 及任何 $A \in B_{m+1}$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho^{-t} \|P(\bar{X}_t \in A | \bar{X}_0 = \hat{x}) - \pi^*(A)\|_r = 0 \quad (3)$$

证明 首先证明 $\{Y_t\}$ 是几何遍历的: 由引理 1, 引理 3 和引理 4 知, 在定理给定的条件下, $\{Y_t\}$ 是一个 $\mu_{m+1} \times \lambda$ 不可约和非周期的马氏链, 且对 R^{m+1} 中任一有界集 A , 以及 $\forall i \in E, A \times \{i\}$ 是一个小集.

令 $\hat{x} = (x_0, x_1, \dots, x_m)' \in R^{m+1}$ 取检验函数:

$g(\hat{x}, j) = 1 + \|\hat{x}\|_\infty = 1 + \max\{\beta_0 |x_0|^r, \dots, \beta_m |x_m|^r\}$ 且满足: $\beta_0 > \beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_m$

$$\begin{aligned} |X_{i+1}|^r &= |f(X_t, \dots, X_{t-Z_{t+1}}) + \varepsilon_{t+1}|^r \leq \theta_{\max} (|X_t|^r + \dots + |X_{t-m}|^r) + |h_{t+1}^{1/\beta} e_{t+1}|^r \\ &= \theta_{\max} \sum_{i=0}^m |X_{t-i}|^r + [\alpha + \alpha_{10}(\varepsilon_t^+)^{\beta} + \alpha_{20}(\varepsilon_{t-1}^-)^{\beta} + \dots + \alpha_{1Z_{t+1}}(\varepsilon_{t-Z_{t+1}}^+)^{\beta} + \alpha_{2Z_{t+1}}(\varepsilon_{t-Z_{t+1}}^-)^{\beta}] |e_{t+1}|^r \\ &\leq \theta_{\max} \sum_{i=0}^m |X_{t-i}|^r + [\alpha^{1/\beta} + \alpha_{\max}^{1/\beta} (|\varepsilon_t|^r + \dots + |\varepsilon_{t-Z_{t+1}}|^r)] |e_{t+1}|^r \\ &\leq \theta_{\max} \sum_{i=0}^m |X_{t-i}|^r + [\alpha^{1/\beta} + \alpha_{\max}^{1/\beta} (|X_t|^r + \dots + |X_{t-Z_{t+1}}|^r)] + \theta_{\max} \sum_{i=0}^m |X_{t-i}|^r + (Z_{t+1} + 1) |e_{t+1}|^r \\ &= [\theta_{\max} + \alpha_{\max}^{1/\beta} |e_{t+1}|^r (Z_{t+1} + 1)] \sum_{i=0}^m |X_{t-i}|^r + [\alpha^{1/\beta} + \alpha_{\max}^{1/\beta} (|X_t|^r + \dots + |X_{t-Z_{t+1}}|^r)] |e_{t+1}|^r \end{aligned}$$

因此, 对 $\forall i \in E$ $\hat{x} = (x_0, x_1, \dots, x_m)' \in R^{m+1}$ 有

$$\begin{aligned} E[g(Y_{t+1}) | Y_t = (\hat{x}, j)] &= \sum_{j \in E} p_{ij} E[g(Y_{t+1}) | Z_{t+1} = j, Y_t = (\hat{x}, j)] \\ &= \sum_{j \in E} p_{ij} E[1 + \max\{\beta_0 |X_{t+1}|^r, \beta_1 |x_0|^r, \dots, \beta_m |x_{m-1}|^r, |Z_{t+1} = j, Y_t = (\hat{x}, j)\}] \\ &\leq \sum_{j \in E} p_{ij} E[1 + \max\{\beta_0 [(\theta_{\max} + \alpha_{\max}^{1/\beta} |e_{t+1}|^r (j+1)) \sum_{i=0}^m |x_i|^r + \alpha^{1/\beta} + \alpha_{\max}^{1/\beta} (|x_0|^r + \dots + |x_j|^r)] |e_{t+1}|^r, \beta_1 |x_0|^r, \dots, \beta_m |x_{m-1}|^r\} |Z_{t+1} = j, Y_t = (\hat{x}, j)] \\ &\leq 1 + \max\{\beta_0 [(\theta_{\max} + \alpha_{\max}^{1/\beta} (m+2)) \sum_{i=0}^m |x_i|^r + \alpha^{1/\beta}] \beta_0 |x_0|^r, \beta_1 |x_1|^r, \dots, \beta_{m-1} |x_{m-1}|^r\} \end{aligned} \quad (4)$$

令 $\delta = 1 - \theta_{\max} - (m+2) \alpha_{\max}^{1/\beta}$ 则 $0 < \delta < 1$, 当 $\|\hat{x}\|_\infty$ 充分大, 即 $\forall K > 0$ 有 $\|\hat{x}\|_\infty > K$ 时 (4) 式有上界:

$$(1 - \delta) (1 + \max\{\beta_0 |x_0|^r, \beta_1 |x_1|^r, \dots, \beta_m |x_m|^r\}) = (1 - \delta) g(\hat{x}, j)$$

取 $B = \{(\hat{x}, j) : \|\hat{x}\|_\infty \leq K, j \in E\}$ 则 B 是小集, 且存在 $C > 0, \rho < \rho = 1 - \delta < 1$ 使得

$$E[g(Y_{t+1}) | Y_t = (\hat{x}, j)] \leq \rho g(\hat{x}, j), \forall (\hat{x}, j) \notin B$$

$$E[g(Y_{t+1}) | Y_t = (\hat{x}, j)] \leq C, \forall (\hat{x}, j) \notin B$$

由文献[6]定理 1.4.4 及其注释知 $\{Y_t\}$ 是几何遍历的.

下证式(3)成立, 由于 $\{Y_t\}$ 具有几何遍历性, 故由定义知: 存在 $(R^{m+1} \times E, \mathcal{B}_{m+1} \times F)$ 上的概率测度 π 及常数 $\rho: 0 < \rho < 1$ 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho^{-t} \|P^t((\hat{x}, j), \cdot) - \pi(\cdot)\|_r = 0$ (5)

在 $(R^{m+1}, \mathcal{B}_{m+1})$ 上定义集合函数 π^* 如下: $\forall A \in \mathcal{B}_{m+1}, \pi^*(A) = \pi(A \times E)$ 显然 π^* 是 $(R^{m+1}, \mathcal{B}_{m+1})$ 上的概率测度.

设 $\hat{x} \in R^{m+1}, \{Y_t\}$ 是以 $(X_0, X_{-1}, \dots, X_{-m}) = \hat{x}$ 为初始值, 由模型(2)确定的迭代序列, 于是 $\forall A \in \mathcal{B}_{m+1}$ 有

$$\begin{aligned} P(X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-m}) \in A | X_0, X_{-1}, \dots, X_{-m} = \hat{x} \\ &= \sum_{j \in E} P((X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-m}) \in A, Z_t = j | (X_0, X_{-1}, \dots, X_{-m}) = \hat{x}) \\ &= \sum_{j \in E} \sum_{i \in E} P((X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-m}) \in A, Z_t = j | (X_0, X_{-1}, \dots, X_{-m}) = \hat{x}, Z_0 = i) \\ &P(Z_0 = i | (X_0, X_{-1}, \dots, X_{-m}) = \hat{x}) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{且 } \pi^*(A) = \pi(A \times E) = \sum_{j \in E} \sum_{i \in E} \pi(A \times \{j\}) P(Z_0 = i | (X_0, X_{-1}, \dots, X_{-m}) = \hat{x}) \quad (7)$$

因 E 是一个有限集合, 于是由式(5)(6)(7)立得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho^{-t} \|P((X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-m}) \in A | (X_0, X_{-1}, \dots, X_{-m}) = \hat{x}) - \pi^*(A)\|_r = 0 \quad (8)$$

又由文献[6]中定理 1.4.1 的证明过程知: π 是 $\{Y_t\}$ 的不变概率测度, 从而由 π^* 的定义易知 π^* 是 $\{Y_t\}$ 的不变概率测度, 且 π^* 的唯一性可由 π 的唯一性导出. 于是由 π^* 具有的性质及(8)知(3)成立.

(下转第 140 页)

参考文献:

- [1] 阚前华, 谭长建, 张娟, 董城. ANSYS 高级工程应用实例分析与二次开发 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2006.
- [2] 韩宗杰, 薛松柏, 王俭辛, 陈旭. QFP 器件半导体激光钎焊焊点力学性能和显微组织 [J]. 焊接学报, 2006, 27 (10): 41-44.
- [3] 张胜红. 电子封装 SnPbAg 焊层热循环可靠性研究 [D]. 上海: 中国科学院上海冶金研究所, 2000.
- [4] 王勖成. 有限单元法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.

Finite Element Analysis of QFP Structure Subjected to Circular Heat

HONG Jia-di¹, ZHANG Yuan-cai²

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering; 2. School of Vocational Education and Technology,
East China Jiaotong University Nanchang 330013, China)

Abstract: Circular heat loadings lead to plastic deformation of QFP package structures. To increase the reliability of QFP package structures, some measures should be sought. In this paper, FEM technique is used to investigate the influence of FR-4 plate thickness, solders, strain rate sensitivity of stress and variation range of temperature. According to the numerical results, some advice is given to reduce the plastic deformation of QFP solders subjected to circular heat.

Key words: QFP; package electron; FEM; circular heat; plastic strain

(责任编辑: 刘棉玲)

(上接第 122 页)

参考文献:

- [1] 安鸿志, 陈敏. 非线性时间序列分析 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1998.
- [2] Hwang S Y, Mi-Ja Woo. Threshold ARCH(1) processes: asymptotic inference [J]. Statistics & Probability Letters, 2001 (53): 11-20.
- [3] Ha J, Lee S. Coefficient constancy test in AR-ARCH models [J]. Statistics & Probability Letters, 2002 (57): 65-77.
- [4] Hwang S Y, Basawa I V. Stationarity and moment structure for Box-Cox transformed threshold GARCH(1,1) processes [J]. Statistics & Probability Letters, 2004 (68): 209-220.
- [5] Hwang S Y, Tae Yoon Kim. Power transformation and threshold modeling for ARCH innovations with applications to test for ARCH structure [J]. Stochastic Processes and their Applications, 2004 (110): 295-314.
- [6] 盛昭瀚, 王涛, 刘德林. 非线性时间序列模型的稳定性分析-遍历性理论与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1993.

Geometric Stability of a Threshold ARMA-ARCH Model with Delay

WANG Yun-yan, TANG Ming-tian

(Faculty of Science, Jiangxi University of Sciences and Technology, Ganzhou 341000, China)

Abstract: In this article, a new class of threshold ARMA-ARCH model with random delay is proposed. Its limited behavior is discussed and the sufficient condition for its convergence is obtained. This paper makes threshold ARMA-ARCH model with fixed time delay to threshold ARMA-ARCH model with random time delay, so it can better imitate many substantial problems in the real world. On the other hand, this paper popularizes the ARCH model, which makes the model more adaptive to improve application to phenomena of price behavior fluctuation in financial market.

Key words: Markov chains; random delay; limited behavior; geometric stability

(责任编辑: 周尚超)