

文章编号:1005-0523(2018)02-0046-10

多源荷载作用下合理拱轴的近似解析

胡常福¹,廖妙星^{1,2}

(1.华东交通大学土木建筑学院,江西 南昌 330013; 2.福州大学土木工程学院,福建 福州 350108)

摘要:针对多源荷载下合理拱轴没有通用求解方法的现状,提出该问题的近似解析方法——线型组合法。该方法通过对多源荷载的分析,将其拆分为若干个单一类型荷载的和,分别求解各单一类型荷载作用下的压力线及水平推力的解析,按照各单一荷载的水平推力对总推力的贡献比例,对各自压力线进行线性组合,即得到多源荷载作用下合理拱轴线的近似解析。基于数学与力学的基本原理,通过对多源荷载中单一类型荷载数学表达函数三个层次的推演,证明了本文方法。以若干典型多源荷载作用下合理拱轴线的求解作为算例,从压力线坐标、主拱圈弯矩及水平推力等方面,验证本文方法的通用性与精确性。算例结果表明,本文方法可以简便的求得多源荷载作用下合理拱轴线的近似解析,具有较好的通用性;本文方法所得到的拱轴线与实际合理拱轴线误差很小,主拱圈弯矩也较小;本文方法的推力在连续荷载工况下是精确解,当有离散集中力时,推力的微小误差主要来自离散集中力的连续化。

关键词:多源荷载;合理拱轴线;近似解析;线型组合法

中图分类号:U441

文献标志码:A

拱轴线是拱桥研究的基本问题,它不仅保证了主拱圈受力最优,而且也是拱结构其他科学问题研究的基础之一。比如,在拱结构稳定研究的能量法^[1]中,需要沿拱轴对应变能进行积分以得到能量的变分,不同拱轴线积分的结果也不同;拱结构非线性稳定问题中,基于沿拱轴弧长微元的分析得到应变表达式,进而推演平衡微分方程,而沿圆弧拱轴^[2]与抛物线拱轴^[3]的非线性稳定分析结果有着明显的不同^[4];拱结构振动问题中,需对沿拱轴弧长微元上进行受力平衡分析,同样,拱轴线不同也对结果影响巨大^[5]。因此,针对拱轴线问题的研究,将会极大拓展拱桥其他力学问题的研究范围。

拱桥常用的拱轴线为圆弧线、抛物线、悬链线及悬索线。圆弧线对应于等深度静水压力,抛物线对应于水平布荷载,悬链线是实腹式拱桥填料自重的合理拱轴,悬索线^[6]是主拱圈自重压力线,这些拱轴线均对应于单一分布类型的恒载。而随着拱桥朝大跨、空腹方向发展,其恒载变得复杂且多源^[7],远不是特定的单一分布类型恒载。为解决多源荷载作用下合理拱轴线的求解问题,朱雯^[8]在浅埋地下拱结构中,针对同时出现竖向力与水平力的复杂荷载,使用微元平衡分析,得到了近似的拱轴线;Chai和Wang^[9]针对变深度水深压力与主拱圈自重的双重荷载作用下,基于微元平衡建立微分方程,再通过代数方程与椭圆积分的简化,得到极坐标下的近似解。这些研究工作,为多源荷载下合理拱轴的求解做出了贡献,但是所用的方法均较为复杂,且没有统一的通用方法,以至于难以应用到其他类似分析中。

为解决多源荷载作用下合理拱轴线求解的难题,本文提出了一个通用的方法——线型组合法。该方法从数学与力学的基本原理出发,在单一荷载函数分类的三个层次进行了证明,并通过三个典型的多源荷载作用下合理拱轴线求解的算例,验证了本文方法的精确性与通用性。

收稿日期:2018-11-22

基金项目:国家自然科学基金项目(51568020)

作者简介:胡常福(1980—),男,副教授,博士,研究方向为拱桥力学。

1 线型组合法的提出及证明

目前,拱桥的常用拱轴线是悬链线,其对应的荷载自拱顶至拱脚连续分布的填料自重,因此适用于实腹式拱桥。现代拱桥已经发展成为大跨、空腹、轻柔的结构,其恒载是由主拱圈、吊杆/立柱、桥面系、横撑等多种分布型的综合体,是一个复杂的未知分布类型,如图1所示。

在如图1所示的坐标系下,合理拱轴的基本平衡微分方程及边界条件为

$$\begin{cases} y'' = \frac{q(x)}{H} \\ y(0)=0, y'(0)=0, y\left(\pm\frac{L}{2}\right)=f \end{cases} \quad (1)$$

式中: $(\cdot)'' = d^2(\cdot)/dx^2$; $(\cdot)' = d(\cdot)/dx$; y 为多源荷载作用下的合理拱轴线坐标; $q(x)$ 为外荷载 q 的具体函数表达式; H 为多源荷载对主拱圈产生的水平总推力; L 为跨径; f 为矢高。该微分方程形式虽然简单,但只在 $q(x)$ 表达形式较为简单的情况下才有解析解,如:径向均布荷载、水平均布荷载、填料自重及主拱圈自重。除此之外,式(1)均难以找到方程的解析,因而阻碍了拱轴线研究朝着现代拱桥方向的发展。

为解决多种荷载源下合理拱轴线的求解难题,本文提出了线型组合法,以下从三个方面从易至难分别来论述与证明。

1.1 多源荷载可表达为自变量函数的和时

当拱桥恒载可拆分为若干个可以表达为自变量函数的单一类型荷载的和时,即

$$q(x) = \sum_{i=1}^n q_i(x) \quad (2)$$

式中: $q_i(x)$ 为第 i 个单一类型荷载的函数; n 为单一类型荷载的总数。假设每个单一类型荷载作用下的拱轴方程,都可以得到解析解,即如式(3)所示的 n 个方程有解

$$\begin{cases} y_i'' = \frac{q_i(x)}{H_i} \\ y_i(0)=0, y_i'(0)=0, y_i\left(\pm\frac{L}{2}\right)=f \end{cases} \quad (3)$$

式中: y_i 为第 i 个单一类型荷载作用下的拱轴方程; H_i 为第 i 个单一类型荷载对主拱圈产生的水平推力。根据非齐次线性微分方程解的叠加原理,式(1)的解可精确的表示为

$$y = \sum_{i=1}^n \frac{H_i}{H} y_i = \frac{H_1}{H} y_1 + \frac{H_2}{H} y_2 + \dots + \frac{H_n}{H} y_n \quad (4)$$

式中: H 为多源荷载对主拱圈产生的水平总推力, $H = \sum_{i=1}^n H_i$ 。式(4)即为线型组合法的表达式,此时为精确解。

1.2 多源荷载可表达为拱轴坐标函数的和时

拱桥的恒载可表达为拱轴坐标的函数,如实腹式拱桥填料自重为拱轴坐标的线性函数、主拱圈自重可表示为拱轴弧长的线性函数等。此种情况下,多源荷载可表示为

$$q(y) = \sum_{i=1}^n q_i(y) \quad (5)$$

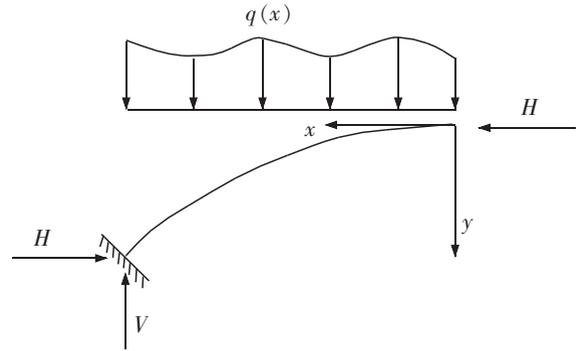


图1 主拱圈受力简图

Fig.1 Diagram of main arch force balance analysis

将式(5)代入式(1)可得

$$y'' = \frac{q(y)}{H} = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^n q_i(y) \quad (6)$$

对式(6)两端沿水平坐标积分可得

$$Hy = \int_0^x q[y(t)](x-t)dt = \sum_{i=1}^n \int_0^x q_i[y(t)](x-t)dt \quad (7)$$

式中: t 为中间变量, 与水平坐标意义相同。若令

$$\begin{cases} \int_0^x q[y(t)](x-t)dt = M_q \\ \int_0^x q_i[y(t)](x-t)dt = M_{qi} \end{cases} \quad (8)$$

式中: M_q, M_{qi} 的物理意义为外荷载 q, q_i 沿拱轴线 $y(x)$ 引起主拱圈截面 (x, y) 处的弯矩。那么, 式(7)可表示为

$$Hy = M_q = \sum_{i=1}^n M_{qi} \quad (9)$$

假设每个单一类型荷载作用下的拱轴方程, 都可以得到解析解, 即如式(10)所示的 n 个方程有解

$$\begin{cases} y_i'' = \frac{q_i(y)}{H_i} \\ y_i(0) = 0, y_i'(0) = 0, y_i\left(\pm \frac{L}{2}\right) = f \end{cases} \quad (10)$$

那么, 对式(10)两端沿水平坐标积分可得

$$Hy_i = \int_0^x q_i[y_i(t)](x-t)dt \quad (11)$$

式(11)右端项的物理意义为外荷载 q_i 沿拱轴线 $y_i(x)$ 引起主拱圈截面 (x, y) 处的弯矩。实际上, 在已知解析的各种线型中, 拱轴线坐标、弧长微分等相差很小^[10-11]。据此, 有以下表达式近似成立

$$Hy_i = \int_0^x q_i[y_i(t)](x-t)dt \approx \int_0^x q_i[y(t)](x-t)dt = M_{qi} \quad (12)$$

将式(12)代入式(9)可得

$$Hy \approx \sum_{i=1}^n Hy_i \quad (13)$$

即得到线型组合法的基本表达式

$$y \approx \sum_{i=1}^n \frac{H_i}{H} y_i = \frac{H_1}{H} y_1 + \frac{H_2}{H} y_2 + \cdots + \frac{H_n}{H} y_n \quad (14)$$

由于在式(12)的积分中使用了近似替换, 因而式(14)是近似解析。

1.3 多源荷载由更一般的复杂恒载组成时

推而广之, 当多源荷载由更为一般的恒载组成时, 会出现以下情况: 难以建立如式(1)所示的平衡微分方程, 或微分方程没有解析。这个难题给合理拱轴分析带来非常大的困难, 如: 恒载由直角坐标系、极坐标系等多种坐标系下的函数组成, 则难以建立平衡微分方程; 恒载极度复杂或有集中力, 难以表达为常用的自变量及拱轴坐标函数, 则微分方程基本没有解析。

即使在这样的情况下, 合理拱轴线基本概念中所包含的力学平衡关系仍旧是成立的, 它并不随着数学表达型式的变化而变化, 即

$$Hy = M_q = \sum_{i=1}^n M_{qi} \quad (15)$$

式中 M_{qi} 的表达式及物理概念如式(8)所示。为使 M_{qi} 中的积分能够得到显示结果,必须满足以下两个基本条件:

- 1) 恒载中的集中力,必须根据能量原理对其进行等效膜张力简化,以满足可积可微的条件;
- 2) 恒载能够拆分为若干个单一类型荷载的和,且每个单一类型荷载均能求得解析或近似解析的拱轴线方程。

若多源荷载满足以上两个基本条件,那么必然有下式成立

$$\begin{cases} q(x) = \sum_{i=1}^n q_i(x) \\ \int_0^x q(x)(x-t)dt = \sum_{i=1}^n \int_0^x q_i(x)(x-t)dt \end{cases} \quad (16)$$

将式(16)代入式(7)及(12),有

$$\begin{cases} M_q = \sum_{i=1}^n M_{qi} \\ Hy = \sum_{i=1}^n Hy_i \end{cases} \quad (17)$$

即可得线型组合法的基本表达式

$$y = \sum_{i=1}^n \frac{H_i}{H} y_i = \frac{H_1}{H} y_1 + \frac{H_2}{H} y_2 + \dots + \frac{H_n}{H} y_n \quad (18)$$

若 M_{qi} 中的积分使用了近似条件,则式(18)即为近似解析;若 M_{qi} 是精确积分,则式(18)为精确解析。

1.4 离散集中力的连续化

离散的集中力不能满足如式(1)所示微分方程的可微条件,是合理拱轴分析中最难处理的部分。拱桥中典型的离散集中力,是由立柱或吊杆传递的桥面系重量或立柱自重并最终加载至主拱,如图 2 所示。

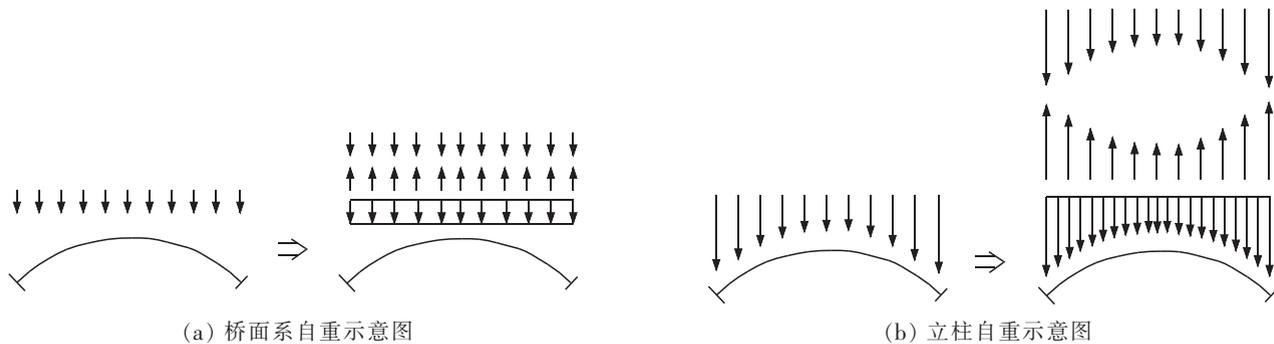


图 2 离散集中力连续化

Fig.2 Continuous transformation of discrete concentrated force

通过对离散集中力的数值计算研究结果显示,基于能量原理将其连续化为等效膜张力,仅产生局部弯矩而不影响整体弯矩^[12],而合理拱轴正是以整体弯矩为主要分析对象^[13]。数值计算研究结果显示,当立柱数量超过 10 个时,局部弯矩不起控制作用^[13]。基于此原则,立柱或吊索传递的桥面系自重(如图 2a 所示)可连续化为均布荷载,立柱自重(如图 2b 所示)可连续化为自拱顶至拱脚连续分布的填料自重。

1.5 线型组合法的一般步骤

通过以上四个部分的论述,可以得到基于线型组合法的基本步骤为:

- 1) 分析多源荷载的构成,将其拆分为若干单一分布类型荷载的和;
- 2) 若某单一分布荷载中有集中力,使用等效膜张力假定将其连续化;

- 3) 对每个单一分布荷载,求解其满足边界的拱轴线方程 y_i 及推力 H_i 的解析或近似解析表达式;
 4) 若步骤 3)中的微分方程难以求解,则返回 1),直至能够得到解析或近似解析为止;

5) 计算多源荷载的总推力 $H = \sum_{i=1}^n H_i$;

6) 对单一分布荷载的拱轴方程 y_i 进行线性组合, $y \approx \sum_{i=1}^n \frac{H_i}{H} y_i = \frac{H_1}{H} y_1 + \frac{H_2}{H} y_2 + \dots + \frac{H_n}{H} y_n$, 即得到多源荷载

作用下合理拱轴线的近似解析。

2 典型多源荷载工况算例验证

为验证本文提出的线型组合法,选取三个典型多源荷载工况作为算例,从压力线坐标、主拱圈弯矩及水平推力三方面,来验证本文方法的通用性与精确性。

2.1 上承式空腹拱桥算例验证

空腹上承式拱桥的主拱圈,除承担主拱圈自重外,还承担由多根不连续立柱传递的立柱自重及桥面系自重,该类型拱桥的合理拱轴问题一直难以解决,目前主要采用五点重合法来拟合拱轴线。由于悬链线是实腹式拱桥填料的合理拱轴,而空腹式拱桥的恒载与之明显不同,所以该方法的理论基础是脆弱的。

基于线型组合法,将上承式空腹拱桥的恒载分为桥面系自重、立柱自重及主拱圈自重,基于能量原理将各部分恒载等效膜张力连续化并求得各自合理拱轴,最终通过推力贡献线性组合得到合理拱轴的近似解析。本算例主要验证多源荷载由自变量函数与拱轴坐标函数共同组成、且其中具有离散集中力的工况下,本文方法的通用性与精确性。一上承式空腹拱桥^[14],跨径,矢跨比 1/6,拱肋截面面积 0.77 m^2 ,惯性矩 0.0047 m^4 ,材料容重为 78.5 kN/m^3 ;假定该拱桥的立柱均匀布置,且立柱数有 $m_{\text{clm}}=11, m_{\text{clm}}=13, m_{\text{clm}}=15, m_{\text{clm}}=17$ 四种工况,每工况的拱顶处立柱高均为 $h_i=8.2 \text{ m}$,拱脚处立柱高均为 $h_j=50.7 \text{ m}$,立柱每延米重量 $\gamma_{\text{clm}}=4.95 \text{ kN/m}$;桥面系每延米重量 305.2 kN/m ,如图 3 所示。

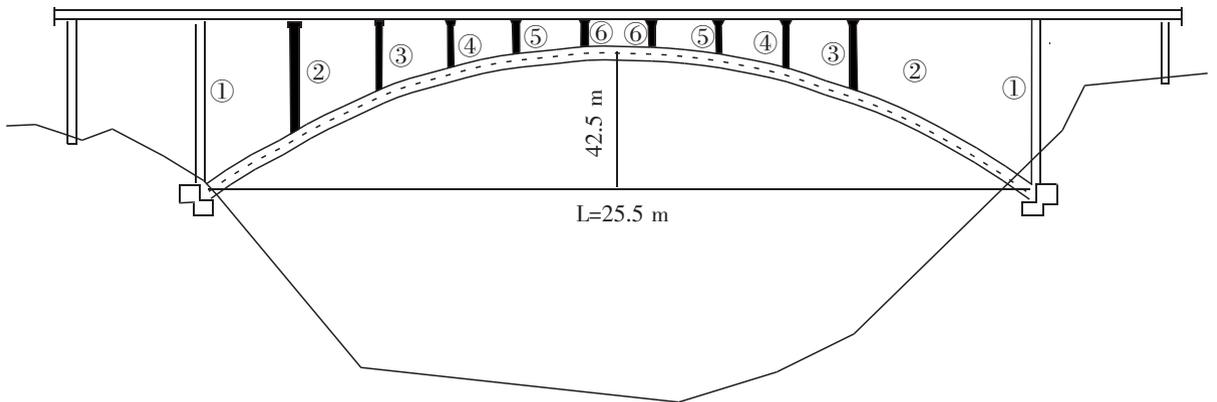


图 3 跨径 255 m 上承式拱桥示意图
 Fig.3 Deck arch bridge with 255 m span

基于等效膜张力假定,桥面系恒载可等效为连续的均布荷载,其压力线为抛物线;立柱自重可等效为连续的填料自重,且连续荷载与集中力的总荷载大小不变,其中拱顶处等效填料恒载集度为 $(h_i \gamma_{\text{clm}})/(L/m_{\text{clm}})$,拱脚处等效填料恒载集度为 $(h_j \gamma_{\text{clm}})/(L/m_{\text{clm}})$,该荷载的合理拱轴为悬链线;主拱圈自重本身就是连续荷载,其压力线为悬索线。根据线型组合法,此时合理拱轴线的近似解析为抛物线 y_1 、悬链线 y_2 及悬索线 y_3 的线性组合,即

$$\begin{cases} y = \frac{H_1}{H} y_1 + \frac{H_2}{H} y_2 + \frac{H_3}{H} y_3 \\ y_1 = 0.002\ 614x^2 \\ y_2 = \frac{42.5}{h_j/h_d - 1} \left\{ \operatorname{ch} \left[\frac{2x}{255} \ln \left(\sqrt{h_j^2/h_d^2 - 1} + h_j/h_d \right) \right] - 1 \right\} \\ y_3 = 199.050\ 043 [\operatorname{ch}(x/199.050\ 043) - 1] \end{cases} \quad (19)$$

式中:系数 $H_1/H, H_2/H, H_3/H$ 如表 1 所示。将得到的拱轴线导入三铰拱有限元模型,有限元模型选用 ANSYS 平台,单元类型为可释放节点转动约束的梁单元 Beam44,在拱顶处形成铰接并在拱脚处约束线位移以形成三铰拱模型,单元个数 510。本文方法与有限元方法水平推力结果比较如表 1 所示。

表 1 不同立柱数工况下线型组合表
Tab.1 Arch axis combination under the conditions of different column number

立柱数	H_1/H	H_2/H	H_3/H	本文方法 H/kN	有限元法 H/kN	H 相对误差/%
11	0.823 351	0.006 933	0.169 716	70 892.6	70 998	0.148 676
13	0.822 211	0.008 308	0.169 481	70 990.9	71 104	0.159 316
15	0.821 074	0.009 68	0.169 246	71 089.2	71 214	0.175 554
17	0.819 940	0.011 047	0.169 013	71 187.5	71 337	0.210 009

由表 1 可以看出,随着立柱数量从 11 变化至 17 根,抛物线的组合系数 H_1/H 基本为 0.82,悬索线 H_3/H 的组合系数基本为 0.17,由立柱自重形成悬链线的组合系数从 0.006 变化至 0.011,表明立柱数量的变化仅对自身荷载影响较大,对其他部分影响较小。由表 1 还可以看出,在立柱数 11 至 17 根的各工况中,本文方法计算的水平推力,最大相对误差为 0.21%,表明本文方法的推力具有较好的精度。进一步计算表明,推力的相对误差是由离散的立柱集中力连续化造成的,若没有此部分,本文方法的推力是精确解。

为了进一步说明本文方法的精度,在 17 根立柱工况下将本文方法与五点重合法进行比较,分别按式(19)与拱轴系数 1.167 悬链线建立三铰拱有限元模型,并计算其主拱弯矩,其中有限元模型建立方法如前所述。本文方法与悬链线法的主拱圈弯矩的比较,如图 4 所示。

由图 4 可以看出,悬链线拱的弯矩极大值约为 12 MN.m,而本文方法的弯矩极大值约为 0.5 MN.m,比悬链线弯矩小一个数量级,表明本文方法比五点重合法具有更好的适用性。

综合表 1 及图 4 可以看出,本文方法可以快速便捷地计算出上承式空腹拱桥恒载工况下的拱轴线近似解析,所得拱轴线与实际的合理拱轴线误差较小,精度比五点重合法高。

2.2 等深静水压力与水平均布荷载工况验证

本荷载工况主要验证当多源荷载分别在两个坐标系,且可表达为自变量的函数情况下,本文方法的通用性与精确性。而在常规的平衡分析方法中,建立该工况无法建立微分方程,是非常困难的荷载工况。一拱结构,跨径 $L=50\text{ m}$,矢高 $f=10\text{ m}$,拱圈截面为高 0.77 m、宽 1 m 的矩形,承担等深静水压力 $q_1(\theta)$ 及沿水平的均布荷载 $q_2(x)$,荷载大小如表 2 所示,不考虑主拱圈自重。基于线型组合法,在此种荷载工况下拱轴线方程的近似解析可统一表达为

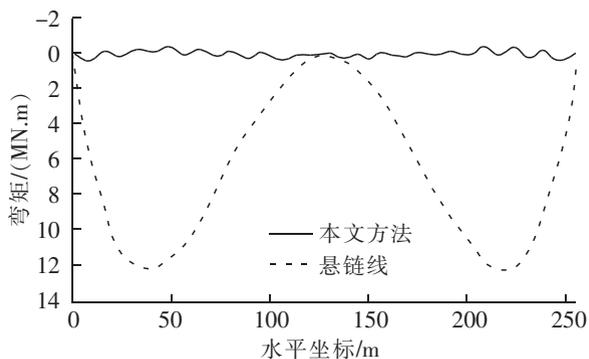


图 4 两种方法的主拱弯矩比较
Fig.4 Comparison of bending moment of two methods

$$y = \frac{H_1}{H} \cdot (36.25 - \sqrt{36.25^2 - x^2}) + \frac{H_2}{H} \cdot \left(-\frac{2}{125}x^2\right) \quad (20)$$

为验证式(20)的精确性,基于通用有限元软件 ANSYS 平台,使用与 2.1 节同样的方法建立包含 400 个单元的有限元模型,计算并提取结果,其中水平推力如表 2 所示。

表 2 不同荷载比的线型组合表
Tab.2 Arch axis combination in different load ratios

q_1/q_2	$q_1(\text{kN/m})$	$q_2(\text{kN/m})$	H_1/H	H_2/H	本文方法 H/kN	有限元法 H/kN	相对误差/%
10.0	100.0	10.0	0.8936	0.1063	2937.5	2937.5	0.00
5.0	50.0	10.0	0.8076	0.1923	1625.0	1625.0	0.00
1.0	10.0	10.0	0.4565	0.5434	575.00	575.00	0.00
0.2	2.0	10.0	0.1438	0.8561	365.00	365.00	0.00
0.1	1.0	10.0	0.0774	0.9225	338.75	338.75	0.00

由表 2 可以看出,当 q_1/q_2 为 1.0 时, H_1/H 为 0.46 且 H_2/H 为 0.54,表明此时的拱轴方程实际上为介于圆弧线与抛物线之间的某个线型;随着 q_1/q_2 从 10.0 变化至 0.1, H_1/H 从 0.89 降低至 0.08, H_2/H 从 0.11 增加至 0.92,说明圆弧线的比例在下降、抛物线的比例在上升,表明拱轴方程逐步从圆弧线过渡至抛物线。力学分析结果表明,当 q_1/q_2 为无穷大时拱轴方程实际上是圆弧线,当 q_1/q_2 为零时拱轴方程实际上是抛物线,表 2 的结果也与之吻合。从表 2 可以看出,本文方法计算推力的相对误差为零,表明在连续分布荷载工况下本文方法的推力是精确解。

选取如表 2 所示的 3 个工况的主拱圈弯矩,如图 5 所示。为更好的展示本文方法的有效性,选取 $q_1/q_2=10$ 工况下圆弧线弯矩与本文方法结果进行比较,而前述分析可知,该工况的拱轴线与圆弧线相差极小。

由图 5 可以看出,以圆弧为拱轴线的主拱圈弯矩的极大值约为 120 kN.m,而本文方法在 3 个工况下的弯矩极大值约 25 kN.m,比圆弧拱少一个数量级,表明本文方法得到的拱轴线更接近合理拱轴线。数值计算结果还表明,在如表 2 所示的工况中,若使用其他拱轴线则主拱圈弯矩更大,相差 2 个数量级以上。由此可以看出,本文方法得到的拱轴线近似解析更接近实际的合理拱轴线。

综合表 2 与图 5 可以看出,本文方法可以快速便捷地计算出等深静水压力与水平均布荷载工况下拱轴线的近似解析,与实际的合理拱轴线误差较小。

2.3 变深度静水压力与主拱圈自重荷载工况验证

本荷载工况主要验证当多源荷载为更一般的函数情况时,本文方法的通用性与精确性。对于变深度静水压力,荷载大小可以表达为拱轴坐标的函数,但荷载的方向无法确定,加上主拱圈自重后更加复杂,属于更一般的函数情况。对于该问题方面,Gavin 与 Reilly^[15]提出了变深度静水压力下的合理拱轴问题;Wang 与 Wang^[16]在对此问题进行了深入研究后,得到了笛卡尔坐标系下的拱轴方程表达型式;Fung^[17]得到了采用椭圆积分表述的变深度静水压力合理拱轴的解析解;Chai 和 Wang^[9]在此基础上考虑了自重,得到了近似解析,并进行了算例验证。

该系列论文的推演,需要对椭圆积分的微分方程进行求解,非常复杂且难以推广。本文以此为例,验

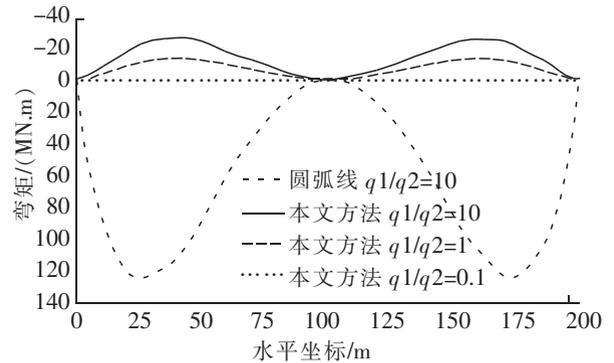


图 5 主拱弯矩比较图

Fig.5 Comparison of bending moment under different load conditions

证本文方法的简易性。一拱结构^[9],跨径 $L=69.202$ m,矢高 $f=6$ m,拱圈截面为高 0.3 m 宽 1 m 的矩形,承担由 3 m 变化至 9 m 的变深度静水压力及主拱圈自重,水的重度取 $\gamma_w=9.81$ kN/m³,拱圈材料重度取 $\gamma_c=24$ kN/m³,得到的合理拱轴近似表达式^[9]为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2\sqrt{p_2+p_1a_3}} \left[p_2 E_1 \left(\frac{\theta}{2}, \frac{2p_1}{p_2+p_1} \right) - (p_1+p_2) E_2 \left(\frac{\theta}{2}, \frac{2p_1}{p_2+p_1} \right) + \sqrt{p_2+p_1a_1} \sin\theta \right] \\ y = \frac{1}{2a_3+a_1^2 \cos\theta} \left\{ -a_2 a_1 \cos\theta + \sqrt{a_2^2+4a_3+\cos\theta} [2a_1(a_1+a_2) - 4a_3 - a_1^2 \cos\theta] \right\} \end{cases} \quad (21)$$

式中: $E_1(\cdot), E_2(\cdot)$ 分别为第一类及第二类不完全椭圆积分函数,其余变量意义见文献^[9]。现以本算例为研究对象,使用线型组合法可得到其合理拱轴的近似解析表达式为

$$y = 0.830\ 452 \cdot y_1(x) + 17.082\ 557 \cdot [\text{ch}(x/100.753\ 518) - 1] \quad (22)$$

式中: $\text{ch}(\cdot)$ 为双曲余弦函数; $y_1(x)$ 为变深度静水压力下的合理拱轴方程^[17],其可以表示为

$$\begin{cases} y_1(\theta) = D_0 \left(\sqrt{1+k \sin^2 \frac{\theta}{2}} - 1 \right) \\ x_1(\theta) = - \left\{ \begin{aligned} (2+k) \left[E_1 \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{\frac{k}{k+1}} \right) - E_1 \left(1, \sqrt{\frac{k}{k+1}} \right) \right] \\ -(2+2k) \left[E_2 \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{\frac{k}{k+1}} \right) - E_2 \left(1, \sqrt{\frac{k}{k+1}} \right) \right] \end{aligned} \right\} \\ \cdot \frac{2X_0 \text{sgn}(\theta)}{k \sqrt{k+1}} \end{cases} \quad (23)$$

式中变量意义见文献^[17]。本文方法与文献^[9]的拱轴坐标比较,如表 3 所示。

表 3 两种方法的合理拱轴坐标比较

Tab.3 Ration arch axis coordinates comparison of two methods

y 坐标/m		x 坐标/m		x 坐标相对误差/%	
所有方法	数值解	文献[9]	本文方法	文献[9]	本文方法
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.048	3.490	3.426	3.469	1.834	0.602
0.189	6.893	6.768	6.917	1.813	-0.348
0.412	10.138	9.961	10.128	1.746	0.099
0.707	13.182	12.962	13.172	1.669	0.076
1.059	16.006	15.752	15.991	1.587	0.094
1.456	18.610	18.329	18.575	1.510	0.188
1.890	21.005	20.702	20.973	1.443	0.152
2.352	23.207	22.888	23.176	1.375	0.134
2.836	25.234	24.902	25.199	1.316	0.139
3.337	27.103	26.761	27.066	1.262	0.137
3.852	28.832	28.482	28.794	1.214	0.132
4.378	30.434	30.077	30.406	1.173	0.092
4.912	31.922	31.560	31.899	1.134	0.072
5.453	33.307	32.942	33.294	1.096	0.039
6.000	34.601	34.232	34.601	1.066	0.000

由表3可以看出,文献[9]与本文方法的拱轴坐标相对误差都较小,文献[9]结果的最大相对误差为1.834%,而本文方法结果的最大相对误差为0.602%,显然本文方法与实际的合理拱轴线更加接近。推力计算的结果表明,本文方法的推力是精确的。通过比较本文方法式(22)与文献[9]的推演过程可知看出,文献[9]需要通过求解椭圆积分的微分方程来得到近似拱轴线,非常复杂且难以推广,而本文方法仅需要对两个曲线进行线性组合,显然本文方法计算更加简单实用。

3 结论

通过理论分析推演与3个典型工况算例的验证,可以得出以下结论:

- 1) 本文提出的线型组合法,可以简捷的得到多源荷载下合理拱轴的高精度近似解析;
- 2) 本文方法得到的拱轴线近似解析与实际的合理拱轴线误差很小,主拱圈弯矩也较小;
- 3) 在连续荷载工况下,本文方法的推力是精确解;当有离散集中力时,推力的微小误差主要来自离散集中力的连续化。

参考文献:

- [1] 许斐,张哲,王德慧,等. 连续梁拱组合体系桥侧倾稳定实用计算[J]. 大连理工大学学报,2015,55(2):152-156.
- [2] PI Y L, BRADFORD M A, GUO Y L. Revisiting nonlinear in-plane elastic buckling and postbuckling analysis of shallow circular arches under a central concentrated load[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 2016, 10:1061.
- [3] CAI J, FENG Y, ZHANG J. In-plane elastic buckling of shallow parabolic arches under an external load and temperature changes [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 2012, 138(11):1300-1309.
- [4] BRADFORD M A, PI Y L, YANG G T, et al. Effects of approximations on non-linear in-plane elastic buckling and postbuckling analyses of shallow parabolic arches[J]. Engineering Structures, 2015, 101:58-67.
- [5] EFIEKHARI S A. A differential quadrature procedure for in-plane vibration analysis of variable thickness circular arches traversed by a moving point load[J]. Applied Mathematical Modeling, 2015, doi: 10.1016/j.apm, 2015, 11, 046.
- [6] HU C F, WAN Y, SHANGGUAN X. A new practice in the design of arch axis [C]//Proceedings of 6th International Conference on Arch Bridge, Fuzhou, China, 2010:709-715.
- [7] 陈宝春. 钢管混凝土拱桥[M]. 北京:人民交通出版社,2007.
- [8] 朱雯. 复杂荷载作用下浅埋大跨地下拱结构的合理拱轴线研究[D]. 西安:西安建筑科技大学,2012.
- [9] CHAI Y H, WANG C M. Approximate solution for the shape of submerged funicular arches with self-weight [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 2005, 131(3):399-404.
- [10] 胡常福,雷亮亮,陈海龙,等. 等截面抛物线拱桥内力实用解析解研究[J]. 铁道科学与工程学报,2011,8(5):97-103.
- [11] 胡常福,陆小雨,甘慧慧,等. 基于近似积分的悬链线拱实用解析解研究[J]. 中南大学学报:自然科学版,2015,46(3):1058-1065.
- [12] 胡常福. 悬索线无铰拱桥自重内力实用计算方法研究[J]. 华东交通大学学报,2010,27(6):12-16.
- [13] 任伟新,胡常福,上官兴,等. 空腹式拱桥新型拱轴线研究[J]. 交通科学与工程,2010,26(2):26-30.
- [14] PAN Y, HU C F, WU T A, et al. A new deck-type CFST arch bridge with diagonal web cables[C]// 3rd Chinese-Croatian Joint Colloquium on Long Span Arch Bridge, Zagreb, Croatia, 2011:133-140.
- [15] GAVIN H P, REILLY K J. Submerged funicular arches[J]. Journal of Structure Engineering, ASCE, 2000, 126(5):627-629.
- [16] WANG C M, WANG C Y. Funicular shapes for submerged arches[J]. Journal of Structure Engineering, ASCE, 2002, 128(2):266-270.
- [17] FUNG T C. Shapes of submerged funicular arches[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 2003, 129(1):120-125.

Approximate Analytical Solution for Rational Arch Axis under Multi-type Loads

Hu Changfu¹, Liao Miaoxing^{1,2}

(1. School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China;

2. School of Civil Engineering, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China)

Abstract: The arch axis combination method of approximate analytical solution for rational arch axis under multi-type loads was proposed in this paper as there was no general method solving this problem. Based on the analysis of multi-type loads, the multi-type loads were firstly divided into a series of single type loads, and then the analytical solution for rational arch axis and horizontal thrust was deduced in every single type load; according to the contributions to total horizontal thrust, a linear combination of these rational arch axes was the approximate analytical solution for multi-type loads. Based on the basic principles of mathematics and mechanics, the proposed method was verified through the deduction of three aspects for single type load mathematical function. By taking several typical deduction work of rational arch axis under multi-type loads as examples, the universality and accuracy of proposed method were tested from the aspects of pressure line coordinates, main arch bending moment and horizontal thrust. The research results show that approximate analytical solution of rational arch axis can be easily deduced by the proposed method, which is of great universality; axis deviation between approximate analytical solution and actually rational arch axis is very small, and the bending moment of main arch ring is close to zero; the horizontal thrust is a precise solution under continuous loads, and the continuous transformation of discrete concentrated force will bring some small errors in horizontal thrust of the proposed method.

Key words: multi-types loads; rational arch axis; approximate analytical solution; arch axis combination method