文章编号:1005-0523(2018)02-0089-05

扇形图和广义扇形图的边控制集划分

徐保根,孟卓明,张婷婷

(华东交通大学理学院,江西 南昌 330013)

摘要:通过分类讨论、归纳总结的方法,研究了一些与扇形图有关的图的边控制集划分问题,并对已有文献关于扇形图 F_n 的集边控制数结论及其证明过程进行了优化改进。还推广提出了广义扇形图 $F_{m,n}$,并且得到了其较为精确的集边控制数。

关键词:边控制集划分;集边控制数;扇形图

中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A

1 引言及定义

近几年来,图的控制理论的研究越来越深入广泛,各类控制概念被相继提出且研究成果不断丰富,T.W.Haynes 等[1-2]综述了图的控制理论研究方面的主要研究成果,不过美中不足的是,大部分研究成果都是关于控制参数的估计[3-6],属于图的点控制,有关于图的边控制问题和结论甚少,正是基于此现状,通过借阅两类图的边控制集划分[7],对扇形图的边控制集划分进行了探索。Cockayme 等[8]引入了图的控制划分数的概念,Zelinka[9-12]研究了图的集边控制数。文中所指的图均为无向简单图,文中未说明的符号和术语同于文献[13-15]。

设 $G=(V,E)$ 为一个图,$S\subseteq E$,$f:E\rightarrow R$ 为一个实值函数,则简记 $f(S)=\sum\limits_{e\in S}f(e)$。用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和边集。对于任意边 $e\in E(G)$,$N_G(e)$ 表示 G 中与 e 相邻的边集,称为 e 的边邻域,$N_G[e]=N_G(e)\cup\{e\}$ 意为 e 的闭边邻域。用 $d_G(e)=|N_G(e)|$ 表示 e 在 G 中的边度。$N_G(e)$,$N_G[e]$ 和 $d_G(e)$ 可分别简记为 $N(e)$,$N[e]$ 和 $d[e]$。F_n(如图1所示)表示 $n+1$ 阶扇形图,$F_{m,n}$(如图2所示)表示 $m\times n+1$ 阶广义扇形图。本文中的两类图 F_n,$F_{m,n}$ 均可简记为 G。

引理 1[15] 设 $G=(V,E)$ 为一个非空图,$D\subseteq E$,如果对于任何一条边 $e\in E-D$,均存在 $e'\in D$ 使得 e 和 e' 相邻(即有一个公共端点),则称 D 为图 G 的一个边控制集。

定义 1[15] 设 $G=(V,E)$ 为一个图,E 的一个划分 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{t}D_i$ 称为 G 的一个 t-集边控制划分,如果每一个 $D_i(i=1,2,\cdots,t)$ 均为图 G 的边控制集。图 G 的集边控制数记为 $d'(G)$,其定义为

$$d'(G)=\max\{t|存在图 G 的 t-集边控制划分\}。$$

引理 2[9] 对于任何图 G,$\delta(G)$ 和 $\delta_e(G)$ 分别表示图 G 的最小度和最小边度,则有

$$\delta(G)\leqslant d'(G)\leqslant\delta_e(G)+1。$$

收稿日期:2017-11-20

基金项目:国家自然科学基金项目(11361024);江西省高校科技落地计划项目(KJLD12067);江西省自然科学基金项目(20171BAB201009);江西省研究生创新专项资金项目(YC2016-S264)

作者简介:徐保根(1963—),男,教授,研究方向为图论及其应用。

通讯作者:孟卓明(1993—),男,硕士研究生,研究方向为图论及其应用。

论文优化了扇形图 F_n 的集边控制数结论及其证明过程，并将扇形图作了推广，确定了广义扇形图 $F_{m,n}$ 的集边控制数。

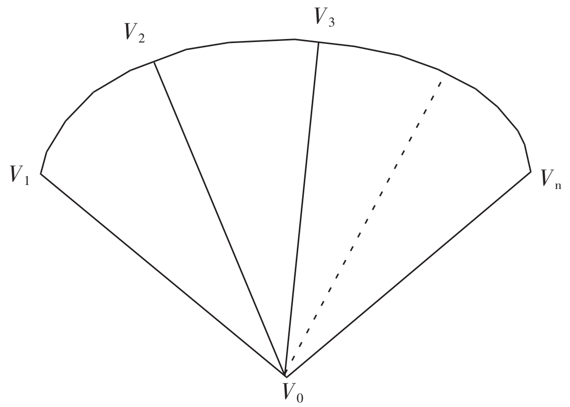

图 1　扇形图

Fig.1　Fan graph

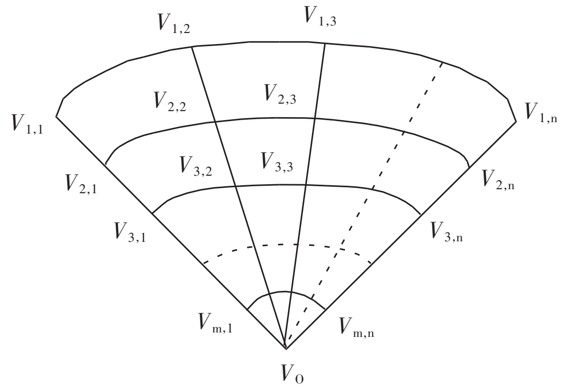

图 2　广义扇形图

Fig.2　Generalized fan graph

2　主要结果及证明

定理 1　对于扇形图 F_n，设 $n\geqslant 2$ 且 n 为整数，则有

$$d'(F_n)=\begin{cases}3, & \text{当 } 2\leqslant n\leqslant 4 \text{ 时；}\\ 4, & \text{当 } n\geqslant 5 \text{ 时。}\end{cases}$$

证明　$F_n=P_n\vee K_1$，记 K_1 点为 v_0，路 P_n 上的点 $V(P_n)=\{v_i|1\leqslant i\leqslant n\}$，边 $E(G)=\{(v_0v_i)|1\leqslant i\leqslant n\}\cup\{(v_iv_{i+1})|1\leqslant i\leqslant n-1\}$。下面对 F_n 进行边标号 1,2,3,4⋯，使得相同标号的边集为一个边控制集。

情况 1　当 $2\leqslant n\leqslant 4$ 时，注意到引理 2 中关于图的集边控制数的上下界限。

子情况 1.1　当 $n=2$ 时，不难得到 $|E(G)|=3=\delta_e(G)+1=d'(G)$。

子情况 1.2　当 $n=3$ 时，用反证法证。若 $d'(G)=4$，因为 $|E(G)|=5$，则说明有一条边为一个边控制集，产生矛盾，所以 $d'(G)<4$；又容易给出标号：$f(v_0v_1)=f(v_0v_3)=3$，$f(v_0v_2)=2$，$(v_1v_2)=f(v_2v_3)=1$，即 $d'(G)\geqslant 3$；故 $d'(G)=3$。

子情况 1.3　当 $n=4$ 时，证法同子情况 1.2。若 $d'(G)=4$，因为 $|E(G)|=7$，结果没有一条边为一个边控制集，与假设矛盾，所以 $d'(G)<4$。同样地，记 $f(v_0v_1)=f(v_2v_3)=f(v_0v_4)=1$，$f(v_0v_2)=f(v_0v_3)=3$，$f(v_1v_2)=f(v_3v_4)=1$，即 $d'(G)\geqslant 3$。故 $d'(G)=3$。

情况 2　当 $n\geqslant 5$ 时。注意到标号规律关于 n 成 4 倍循环关系。

子情况 2.1　当 $n\equiv 1(\text{mod}4)$时，如图 1 所示，对于每个 $k=1,2,\cdots$，记 $f(v_0v_{4k-3})=3f(v_{4k-3}\neq v_n)$，$f(v_0v_{4k-2})=4$，$f(v_0v_{4k-1})=1$，$f(v_0v_{4k})=2$，$f(v_0v_n)=1$；$f(v_{4k-3}v_{4k-2})=1$，$f(v_{4k-2}v_{4k-1})=2$，$f(v_{4k-1}v_{4k})=3$，$f(v_{4k}v_{4k+1})=4$。

即 $d'(G)\geqslant 4$，此标号给出了一般规律。又 $d'(G)\leqslant\delta_e(G)+1=4$，故 $d'(G)=4$。

子情况 2.2　当 $n\equiv 2(\text{mod}4)$时，如图 1 所示，对于每个 $k=1,2,\cdots$，记 $f(v_0v_{4k-3})=3$，$f(v_0v_{4k-2})=4(v_{4k-2}\neq v_n)$，$f(v_0v_{4k-1})=1$，$f(v_0v_{4k})=2$，$f(v_0v_n)=2$；$f(v_{4k-3}v_{4k-2})=1$，$f(v_{4k-2}v_{4k-1})=2$，$f(v_{4k-1}v_{4k})=3$，$f(v_{4k}v_{4k+1})=4$。

即 $d'(G)\geqslant 4$，此标号给出了一般规律。又 $d'(G)\leqslant\delta_e(G)+1=4$，故 $d'(G)=4$。

子情况 2.3　当 $n\equiv 3(\text{mod}4)$时，如图 1 所示，对于每个 $k=1,2,\cdots$，记 $f(v_0v_{4k-3})=3$，$f(v_0v_{4k-2})=4$，$f(v_0v_{4k-1})=1$，$f(v_{4k-1}\neq v_n)$，$f(v_0v_{4k})=2$，$f(v_0v_n)=3$；$f(v_{4k-3}v_{4k-2})=1$，$f(v_{4k-2}v_{4k-1})=2$，$f(v_{4k-1}v_{4k})=3$，$f(v_{4k}v_{4k+1})=4$。

即 $d'(G)\geqslant 4$，此标号给出了一般规律。又 $d'(G)\leqslant\delta_e(G)+1=4$，故 $d'(G)=4$。

子情况 2.4　当 $n\equiv 0(\mathrm{mod}4)$时，如图 1 所示，对于每个 $k=1,2,\cdots$，记 $f(v_0v_{4k-3})=3$，$f(v_0v_{4k-2})=4$，$f(v_0v_{4k-1})=1$，$f(v_0v_{4k})=2(v_{4k}\neq v_n)$，$f(v_0v_n)=4$；$f(v_{4k-3}v_{4k-2})=1$，$f(v_{4k-2}v_{4k-1})=2$，$f(v_{4k-1}v_{4k})=3$，$f(v_{4k}v_{4k+1})=4$。

即 $d'(G)\geqslant 4$，此标号给出了一般规律。又 $d'(G)\leqslant\delta_e(G)+1=4$，故 $d'(G)=4$。

综上所述，当 $2\leqslant n\leqslant 4$ 时，$E(G)$可划分成图 G 的 3 个不交的边控制集，即 $d'(F_n)=3$；当 $n\geqslant 5$ 时，$E(G)$可划分成图 G 的 4 个不交的边控制集，即 $d'(F_n)=4$。定理 1 证毕。

定理 2　对广义扇形图，若且为整数，则

$$d'(F_{m,n})=\begin{cases}3, & \text{当 } m\geqslant 2 \text{ 且 } n=2,3 \text{ 或 } m=2 \text{ 且 } n=4 \text{ 时；}\\ 4, & \text{当 } m\geqslant 3 \text{ 且 } n=4 \text{ 或 } m\geqslant 2 \text{ 且 } n\geqslant 5 \text{ 时。}\end{cases}$$

证明　现将广义扇形图 $F_{m,n}$ 上的点如图 2 所示进行标记，记 $V(G)=\{v_0\}\cup\{(v_{i,j})|1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant i\leqslant n\}$，$E(G)=\{(v_0v_{m,j})|1\leqslant i\leqslant n\}\cup\{(v_{i,j}v_{i,j+1})|1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n-1\}\cup\{(v_{i,j}v_{i+1,j})|1\leqslant i\leqslant m-1,1\leqslant j\leqslant n\}$。

下面对 $F_{m,n}$ 进行边标号 1，2，3，4…，使得相同标号的边集为一个边控制集。

情况 1　当 $m\geqslant 2$ 且 $n=2,3$ 时，有 $d'(G)=3$。

子情况 1.1　当 $m\geqslant 2$ 且 $n=2$，记 $f(v_{i,1},v_{i,2})=1(1\leqslant i\leqslant m)$。

当 i 为奇数时$(1\leqslant i\leqslant m-1)$，记 $f(v_{i,1},v_{i+1,1})=2$，$f(v_{i,2},v_{i+1,2})=3$；

当 i 为偶数时$(1\leqslant i\leqslant m-1)$，记 $f(v_{i,1},v_{i+1,1})=3$，$f(v_{i,2},v_{i+1,2})=2$。

即 $d'(G)\geqslant 3$。又 $d'(G)\leqslant\delta_e(G)+1=3$，故 $d'(G)=3$。

子情况 1.2　当 $m\geqslant 2$ 且 $n=3$ 时，用反证法。若 $d'(G)=4$，该情况的广义扇形图，即考虑定理 1 中当 $n=3$ 时的情况。因为图的部分边 $E_1(G)=\{(v_{i,j},v_{i,j+1})|1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n-1\}\cup\{(v_{i,j}v_{i+1,j})|1\leqslant i\leqslant m-1,1\leqslant j\leqslant n\}$可以用 1~4 来标号，而部分边 $E_2(G)=\{(v_0,v_{m,j})|1\leqslant j\leqslant n\}$不存在一条边构成一个边控制集的情况，与假设矛盾，所以 $d'(G)<4$。这里 $E(G)=E_1(G)\cup E_2(G)$。同时，不难得到 $d'(G)=3$ 时的标号，即 $d'(G)\geqslant 3$。故 $d'(G)=3$。

情况 2　当 $m=2$ 且 $n=4$ 时，证法同子情况 1.2，即考虑定理 1 中当 $n=4$ 时的情况。故 $d'(G)=3$。

情况 3　当 $m\geqslant 3$ 且 $n=4$ 时，与情况 2 不同的是，边控制集标号在边$\{(v_{i,j},v_{i+1,j})|1\leqslant i\leqslant m-1,1\leqslant j\leqslant n\}$上得到了延伸，而其边集 $E_2(G)$正好可以用 4 个边控制集来进行标号，如图 3 所示，可以很清晰地发现规律。故 $d'(G)=4$。

情况 4　当 $m\geqslant 2$ 且 $n\geqslant 5$，$d'(G)=4$。注意到标号规律关于 n 成 4 倍循环关系。

子情况 4.1　当 $m=2$ 且 $n\equiv 1(\mathrm{mod}4)$时，如图 2 所示，对于每个 $k=1,2,\cdots$ 记

$f(v_{1,2k-1},v_{1,2k})=4$，$f(v_{1,2k},v_{1,2k+1})=3$，$f(v_{1,2k-1},v_{2,2k-1})=2$，$f(v_{1,2k-1},v_{2,2k})=1$，

$f(v_{2,4k-3},v_{2,4k-2})=1$，$f(v_{2,4k-2},v_{2,4k-1})=2$，$f(v_{2,4k-1},v_{2,4k})=3$，$f(v_{2,4k},v_{2,4k+1})=4$，

$f(v_0v_{2,4k-3})=3(v_{2,4k-3}\neq v_{2,n})$，$f(v_0v_{2,4k-2})=4$，$f(v_0v_{2,4k-1})=1$，$f(v_0v_{2,4k})=2$，$f(v_0v_{2,n})=1$。

即 $d'(G)\geqslant 4$。又因为 $d'(G)\leqslant\delta_e(G)+1=4$，故 $d'(G)=4$。

子情况 4.2　当 $m=2$ 且 $n\equiv 2(\mathrm{mod}4)$时，如图 2 所示，对于每个 $k=1,2,\cdots$ 记

$f(v_{1,2k-1},v_{1,2k})=2(v_{1,2k}\neq v_{1,n})$，$f(v_{1,2k},v_{1,2k+1})=1$，$f(v_{1,n-1},v_{1,n})=4$，

$f(v_{1,2k-1},v_{2,2k-1})=4(v_{1,2k-1}\neq v_{1,n-1})$且 $v_{2,2k-1}\neq v_{2,n-1})$，$f(v_{1,2k},v_{2,2k})=3$，$f(v_{2,4k-3}v_{2,4k-2})=1$，

$f(v_{2,4k-2}v_{2,4k-1})=2$，$f(v_{2,4k-1}v_{2,4k})=3$，$f(v_{2,4k}v_{2,4k+1})=4$，$f(v_0v_{2,4k-3})=3$，

$f(v_0v_{2,4k-2})=4(v_{2,4k-2}\neq v_{2,n})$，$f(v_0v_{2,4k-1})=1$，$f(v_0v_{2,4k})=2$，$f(v_0v_{2,n})=2$。

即 $d'(G)\geqslant 4$。又因为 $d'(G)\leqslant\delta_e(G)+1=4$，故 $d'(G)=4$。

子情况 4.3　当 $m=2$ 且 $n\equiv 2(\mathrm{mod}4)$时，如图 2 所示，对于每个 $k=1,2,\cdots$ 记

$f(v_{1,2k-1},v_{1,2k})=2$，$f(v_{1,2k},v_{1,2k+1})=1$，$f(v_{1,2k-1},v_{2,2k-1})=4$，$f(v_{1,2k},v_{2,2k})=3$，

$f(v_{2,4k-3},v_{2,4k-2})=1$，$f(v_{2,4k-2},v_{2,4k-1})=2$，$f(v_{2,4k-1},v_{2,4k})=3$，$f(v_{2,4k},v_{2,4k+1})=4$，

$f(v_0v_{2,4k-3})=3(v_0v_{2,4k-2})=4$，$f(v_0v_{2,4k-1})=1(v_{2,4k-1}\neq v_{2,n})$，$f(v_0v_{2,4k})=2$，$f(v_0v_{2,n})=3$。

即 $d'(G)\geqslant 4$。又因为 $d'(G)\leqslant \delta_e(G)+1=4$，故 $d'(G)=4$。

子情况 4.4 当 $m=2$ 且 $n\equiv 0(\mathrm{mod}4)$ 时，如图2所示，对于每个 $k=1,2,\cdots$ 记

$f(v_{1,2k-1},v_{1,2k})=4(v_{1,2k-1}\neq v_{1,n-1}$ 且 $v_{1,2k}\neq v_{1,n})$，$f(v_{1,2k},v_{1,2k+1})=3$，$f(v_{1,n-1},v_{1,n})=2$，

$f(v_{1,2k-1},v_{2,2k-1})=2(v_{1,2k-1}\neq v_{1,n-1}$ 且 $v_{2,2k-1}\neq v_{2,n-1})$，$f(v_{1,2k},v_{2,2k})=1$，$f(v_{1,n-1}v_{2,n-1})=4$，

$f(v_{2,4k-3}v_{2,4k-2})=1$，$f(v_{2,4k-2}v_{2,4k-1})=2$，$f(v_{2,4k-1}v_{2,4k})=3$，$f(v_{2,4k}v_{2,4k+1})=4$，

$f(v_0v_{2,4k-3})=3$，$f(v_0v_{2,4k-2})=4$，$f(v_0v_{2,4k-1})=1$，$f(v_0v_{2,4k})=2(v_{2,4k}\neq v_{2,n})$，$f(v_0v_{2,n})=4$。

即 $d'(G)\geqslant 4$。又因为 $d'(G)\leqslant \delta_e(G)+1=4$，故 $d'(G)=4$。

子情况 4.5 此子情况之所以不同于上述4种子情况，理由同情况3。现给出其标号如图4所示，同样地，其边集 $E_2(G)$ 可以任意标号4个边控制集即可满足条件，不难得到 $d'(G)=4$。

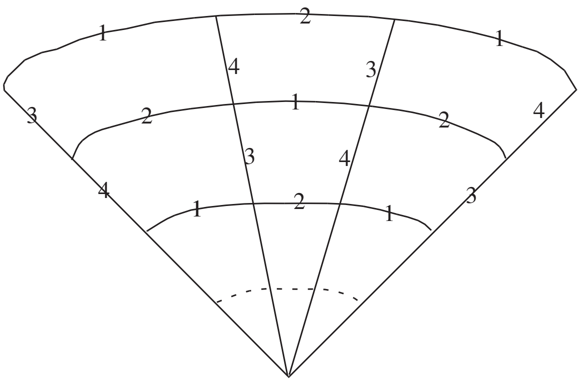

图3 广义扇形图1

Fig.3 Genera lized fan graph 1

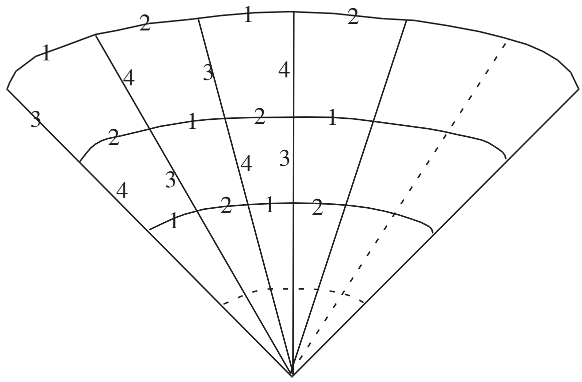

图4 广义扇形图2

Fig.4 Genera lized fan graph 2

综上所述，当 $m\geqslant 2$ 且 $n=2,3$，或 $m=2$ 且 $m=4$ 时，$E(G)$ 可划分成图 G 的3个不交的边控制集，即 $d'(F_{m,n})=3$；当 $m\geqslant 3$ 且 $n=4$，或 $m\geqslant 2$ 且 $n\geqslant 5$ 时，$E(G)$ 可划分成图 G 的4个不交的边控制集，即 $d'(F_{m,n})=4$。定理2证毕。

参考文献：

[1] HAYNES T W, HEDETNIEMI S T, SLATER P J. Domination in graphs[M]. New York Marcel Dekker, 1998: 76-81.

[2] HAYNES T W, HEDETNIEMI S T, HENNING M A, et al. Fundamentals of domination in graphs[M]. New York: Marcel Dekker Inc, 1998: 76-81.

[3] ORE O. Theory of graphs[C]//American Mathematical Society Colloquium, RI, 1962: 135-141.

[4] DOMKE G S, HEDETNIEMI S T, LASKAR R C. Fractional packings, coverings and irredundance in graphs[J]. Congr Numer, 1998, 66: 227-238.

[5] ZHANG Z F, XU B G. A note on the lower bounds of signed domination number of a graph[J]. Discrete Math, 1999, 195: 295-298.

[6] XU B G. On signed edge domination numbers of graphs[J]. Discrete Math, 2001, 239: 179-189.

[7] 徐保根，邹妍，赵丽鑫. 两类图的边控制集划分[J]. 安徽大学学报, 2016, 40(4), 1-5.

[8] COCKAYNE E J, HEDETNIEMI S T. Towards a theory of domination in graphs[J]. Networks, 1977(7): 247–261.
[9] ZELINKA B. Edge-domatic number of graph[J]. Czech Math, 1983, 33: 107–110.
[10] ZELINKA B. Total edge-domatic number of graph[J]. Math Bohe, 1989, 116: 96–100.
[11] ZELINKA B. Some remarks on domatic numbers of graphs[J]. Casop Pest Mat, 1982, 106: 373–375.
[12] ZELINKA B. Adomatic and idiomatic numbers of graphs[J]. Math Slovaca, 1983, 33: 99–103.
[13] BONDY J A, MURTY V S R. Graph theory with applications[M]. New York: Elsevier, 1976: 102–108.
[14] DUBAR J E, HEDETNIEMI S T, HENNING M A, et al. Signed domination in graphs[M]. New York: John Wiley Inc, 1995: 66–71.
[15] 徐保根. 图的控制与染色理论[M]. 武汉：华中科技大学出版社，2013：113–114.

Edge Control Set Partition for a Fan Graph and Generalized Fan Graph

Xu Baogen, Meng Zhuoming, Zhang Tingting

(School of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Through classification and summarization, this paper studied the edge control set partition for some graphs concerning fan graph, and optimized the conclusion and proof process of set edge control number for the fan graph F_n from existing papers. This paper also put forward generalized fan graph $F_{m,n}$, and obtained the set edge control number with higher accuracy.

Key words: edge control set partition; set edge control number; fan graph