文章编号:1005-0523(2018)05-0117-07

# 非均匀温度场下的热固耦合结构多相材料拓扑优化

# 占金青1,2,龙良明2,林春辉2,杨湘杰1

(1. 南昌大学机电工程学院,江西南昌 330031;2. 华东交通大学机电与车辆工程学院,江西南昌 330013)

摘要:为了集成不同特殊的材料以提升结构的性能,提出一种非均匀温度场下的热固耦合结构多相材料拓扑优化设计的方法。 以应变能最小化作为目标函数以满足结构刚度要求,以各相材料的体积作为约束,建立非均匀温度场作用下的热固耦合结构 多相材料拓扑优化数学模型。利用伴随矩阵法进行灵敏度分析,采用 Heaviside 过滤求解技术对灵敏度进行过滤,利用移动渐 近线算法求解优化问题。数值算例结果表明,提出的非均匀温度场作用下的热固耦合结构多相材料拓扑优化方法是有效的。 关键词:热固耦合结构;拓扑优化;非均匀温度场;多相材料

中图分类号:0327 文献标志码:A

拓扑优化通常是在指定的载荷作用、边界条件及约束条件下寻求材料最优的布局,从而使某种性能指标达到最优<sup>[1]</sup>。然而,机械结构容易由于工作温度变化受到热载荷作用,例如航空发动机排气结构、超音速飞行器的热保护系统等,因而对于这些结构,考虑热载荷作用进行热固耦合拓扑优化设计是非常必要的。Rodrigues等<sup>[2]</sup>首次提出基于均匀化方法的热固耦合结构拓扑优化设计方法。左孔天等<sup>[3]</sup>采用变密度法进行了热固耦合结构拓扑优化设计。Du等<sup>[4]</sup>提出了基于无网格有限方法的热驱动柔顺机构几何非线性拓扑优化设计 方法。Gao等<sup>[5]</sup>采用热应力系数插值模型进行了热载荷作用下的结构拓扑优化设计。李冬梅等<sup>[6]</sup>考虑可靠性约束进行热固耦合结构拓扑优化设计。Deng等<sup>[7]</sup>提出基于多目标的热固耦合结构材料/结构一体化设计方法。Liu等<sup>[8]</sup>采用导重法进行热固耦合结构拓扑优化设计。Deaton等<sup>[9]</sup>提出基于应力约束的热固耦合结构拓扑 优化模型。Li等<sup>[10]</sup>采用单一材料进行不均温度场作用的热固耦合拓扑优化设计。

为了满足结构的轻量化、多功能等综合性指标要求,使得采用单一材料进行拓扑优化设计模式转变为 多相材料拓扑优化设计<sup>[11-13]</sup>。因此,采用多相材料进行热固耦合拓扑优化设计受到关注。Gao 等<sup>[14]</sup>采用两相 材料进行了质量约束下的热固耦合结构拓扑优化设计。Sigmund 等<sup>[15]</sup>建立了多物理场条件下的多相材料插 值模型,进行了电热驱动柔顺机构多相材料拓扑优化设计。总的来说,对于多相材料进行热固耦合结构拓 扑优化设计方面的研究甚少,特别是对非均匀温度场作用下的多相材料热固耦合结构拓扑优化研究还显 得较薄弱。

本文提出了一种非均匀温度场作用下的热固耦合结构多相材料拓扑优化设计方法。基于广义 SIMP 插 值方法建立多相材料插值模型,以应变能最小化作为目标函数,以各相材料(包括空洞材料)的体积作为约 束,建立非均匀温度场作用下的热固耦合结构多相材料拓扑优化模型。利用伴随矩阵法推导目标函数及约 束的灵敏度,采用 Heaviside 过滤求解技术来避免优化问题迭代过程中出现数值不稳定性现象,将移动渐近 线算法(method of moving asymptotes, MMA)用于优化问题求解。

收稿日期:2018-01-24

基金项目:国家自然科学基金项目(51665011,51305136);江西省自然科学基金项目(20161BAB206152)

作者简介:占金青(1979—),男,副教授,博士,研究方向为结构拓扑优化设计。

#### 1 拓扑优化模型的建立

#### 1.1 热固耦合场有限元分析

对于二维的非均匀温度场下的热固耦合结构分析,热和结构系统可以分别离散为以下两个有限元方程 进行描述:

$$\boldsymbol{K}_{t}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{F}_{t} \tag{1}$$

$$K_{\rm m} U = F_{\varepsilon} \tag{2}$$

式中:F<sub>t</sub>为结构所受的热通量向量;F<sub>e</sub>为热应变引起的热载荷向量;T为节点的温度向量;U为单元节点的位 移向量;K<sub>t</sub>和K<sub>m</sub>分别为结构的热传导矩阵和结构的总刚度矩阵。

由温度场变化产生的热应变,因而引起的热载荷向量F。表示为

$$\boldsymbol{F}_{e} = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_{i}} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{a} \Delta \boldsymbol{T} \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \mathrm{d} \boldsymbol{\Omega}$$
(3)

式中:B为单元的应变矩阵;D为弹性矩阵;a为单元的热膨胀系数向量; $\Delta T$ 为单元内任一点的温度场的变 化量;N为单元的数目; $\Phi$ =[1,1,0]; $\Omega$ 为单元区域。

# 1.2 多相材料插值模型

广义 SIMP 插值模型由 Sigmund 等<sup>169</sup>提出,该模型可以对多相可选材料逐相混合建立多相材料插值数 学模型,以三相材料为例,其中包括两相实体材料和空洞,单元材料的弹性模量、热传导系数及热膨胀系数 的插值模型可分别表示为

$$E_{i}(x_{1,i},x_{2,i}) = x_{1,i}^{P_{1}} [x_{2,i}^{P_{2}} E_{1} + (1 - x_{2,i}^{P_{2}}) E_{2}]$$

$$\tag{4}$$

式中: $E_i$ 为单元i的弹性模量; $x_{1,i}$ 为判断是实体或者空洞设计变量; $x_{2,i}$ 为判断是实体1或实体2设计变量;  $E_1$ 和 $E_2$ 分别表示材料1、材料2的弹性模量; $P_1$ 和 $P_2$ 均为惩罚系数,取为3。

$$k_{i}(x_{1,i},x_{2,i}) = x_{1,i}^{P_{1}} \left[ x_{2,i}^{P_{2}} k_{1} + (1 - x_{2,i}^{P_{2}}) k_{2} \right]$$
(5)

式中:k,为单元i的热传导系数;k,和k2分别表示实体材料1、实体材料2的热传导系数。

$$\alpha_i(x_{1,i}, x_{2,i}) = x_{2,i}^{r_2} \alpha_1 + (1 - x_{2,i}^{r_2}) \alpha_2 \tag{6}$$

式中: $\alpha_i$ 为单元的热膨胀系数; $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 分别表示实体材料1、实体材料2的热膨胀系数。

对于三相材料结构拓扑优化问题,设计变量取不同组合表示为不同的材料。

 $(x_{1,i}, x_{2,i}) = \begin{cases} (1,0) & 实体材料 \\ (1,1) & g体材料 2 \\ (0,0) & 空洞 \end{cases}$ (7)

三相材料在结构的分布如图1所示。

由式(3)(5)(6),多相材料结构由热应力引 起的等效载荷可以表示为

$$\boldsymbol{F}_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{N} E_{i} \boldsymbol{\alpha}_{i} \int_{\boldsymbol{\Omega}_{i}} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_{0} \Delta \boldsymbol{T} \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \mathrm{d} \boldsymbol{\Omega}$$
(8)

式中:**D**<sub>0</sub>为单元弹性模量的倒数与单元弹性矩阵 **D**的乘积。

### 1.3 拓扑优化模型

在机械力载荷及热通量(非均温度场)作用 下,以结构的应变能最小化为目标函数来满足热 固耦合结构的刚度要求,以各相材料的体积为约 束,建立非均匀温度场作用下的热固耦合连续体



图 1 各相材料分布示意图 Fig.1 Distribution of each phase material

结构多相材料拓扑优化的数学模型

$$\min S_{E} = \frac{1}{2} U^{T} F_{m} = \frac{1}{2} U^{T} F_{m} U$$

$$K_{m} U = F_{e} + F_{s} = F_{m}$$

$$K_{1} T = F_{1}$$

$$V_{1} = \sum_{i=1}^{N} x_{1,i}, x_{2,i} V_{e} \leq V_{1}^{*}$$

$$V_{2} = \sum_{i=1}^{N} x_{1,i} (1 - x_{2,i}) V_{e} \leq V_{2}^{*}$$

$$0 < x_{\min} \leq x_{1,i} \leq 1, i = 1, 2, \cdots, N$$

$$0 \leq x_{2,i} \leq 1, i = 1, 2, \cdots, N$$
(9)

式中: $S_E$ 为结构的应变能; $F_s$ 结构所受的机械力载荷向量; $F_m$ 为结构所受的总载荷向量; $V_e$ 为实体单元的体积; $V_1^*$ 和 $V_2^*$ 分别为实体材料1、实体材料2的允许体积; $x_{min}$ 为设计变量 $x_{1,i}$ 的下限,取10<sup>-5</sup>。

#### 1.4 灵敏度求解

采用基于梯度的优化方法对非均匀温度场下的热固耦合多相材料拓扑优化问题求解,优化问题的目标 函数及约束进行灵敏度分析是必要的。采用伴随矩阵法及直接法进行优化问题的灵敏度分析。

由式(8)可得拓扑优化问题的拉格朗日函数

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{S}_{\mathrm{E}} + \boldsymbol{\lambda}_{2}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{K}_{\mathrm{I}} \boldsymbol{T} - \boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}) + \boldsymbol{\lambda}_{1}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{K}_{\mathrm{m}} \boldsymbol{U} - \boldsymbol{F}_{\mathrm{m}})$$
(10)

式中: $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 均为伴随矩阵矢量。

Lagrangian 函数对设计变量的灵敏度可求解为

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial x_{j,i}} = \frac{\partial \boldsymbol{S}_{\mathrm{E}}}{\partial x_{j,i}} + \boldsymbol{\lambda}_{2}^{\mathrm{T}} \left( \frac{\partial \boldsymbol{K}_{\mathrm{t}}}{\partial x_{j,i}} \boldsymbol{T} - \frac{\partial \boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}}{\partial x_{j,i}} \right) + \boldsymbol{\lambda}_{1}^{\mathrm{T}} \left( \frac{\partial \boldsymbol{K}_{\mathrm{m}}}{\partial x_{j,i}} \boldsymbol{U} - \frac{\partial \boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}}{\partial x_{j,i}} \right) + \frac{\partial \boldsymbol{S}_{\mathrm{E}}}{\partial \boldsymbol{U}} \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x_{j,i}} + \frac{\partial \boldsymbol{S}_{\mathrm{E}}}{\partial \boldsymbol{T}} \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x_{j,i}} + \boldsymbol{\lambda}_{2}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{i} \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x_{i,i}} + \boldsymbol{\lambda}_{2}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{i} \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x_{i$$

式中: j=1,2。

为了消除未知项的 $\frac{\partial T}{\partial x_{i,i}}$ 及 $\frac{\partial U}{\partial x_{i,i}}$ ,由于伴随矩阵矢量可以任意取值,则有下列两个伴随方程:

$$\frac{\partial \mathbf{S}_{\mathrm{E}}}{\partial \mathbf{T}} + \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{1}}^{\mathrm{T}} \mathbf{K}_{\mathrm{I}} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{1}}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathrm{m}}}{\partial \mathbf{T}} = 0$$
(12)

$$\frac{\partial \mathbf{S}_{\mathrm{E}}}{\partial U} + \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}} \mathbf{K}_{\mathrm{m}} = 0 \tag{13}$$

将式(11)和式(12)代入式(10)可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial x_{j,i}} = \frac{\partial \boldsymbol{S}_{\mathrm{E}}}{\partial x_{j,i}} + \boldsymbol{\lambda}_{2}^{\mathrm{T}} (\frac{\partial \boldsymbol{K}_{\mathrm{t}}}{\partial x_{j,i}} \boldsymbol{T} - \frac{\partial \boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}}{\partial x_{j,i}}) + \boldsymbol{\lambda}_{1}^{\mathrm{T}} (\frac{\partial \boldsymbol{K}_{\mathrm{m}}}{\partial x_{j,i}} \boldsymbol{U} - \frac{\partial \boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}}{\partial x_{j,i}})$$
(14)

由于结构所受的热通量和机械力的作用大小固定不变, $F_t$ 和 $F_s$ 对设计变量 $x_{j,i}$ 的敏度为0,由式(8)和式(13)可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial x_{j,i}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{F}_{\varepsilon}}{\partial x_{j,i}} + \boldsymbol{\lambda}_{2}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{K}_{\mathrm{t}}}{\partial x_{j,i}} \boldsymbol{T} + \boldsymbol{\lambda}_{1}^{\mathrm{T}} (\frac{\partial \boldsymbol{K}_{\mathrm{m}}}{\partial x_{j,i}} \boldsymbol{U} - \frac{\partial \boldsymbol{F}_{\varepsilon}}{\partial x_{j,i}})$$
(15)

其中

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}_{\varepsilon}}{\partial x_{j,i}} = \frac{\partial \boldsymbol{F}_{i}}{\partial x_{1,i}} \alpha_{i} \int_{\Omega_{i}} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_{0} \Delta \boldsymbol{T} \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \mathrm{d} \boldsymbol{\Omega}$$
(16)

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}_{\varepsilon}}{\partial x_{2,i}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}_{\varepsilon}}{\partial x_{2,i}} \alpha_{i} + E_{i} \frac{\partial \alpha_{i}}{\partial x_{2,i}}\right) \int_{\Omega} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_{0} \Delta \boldsymbol{T} \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \mathrm{d} \boldsymbol{\Omega}$$
(17)

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{m}}{\partial x_{1,i}} = P_{1} x_{1,i}^{(P_{1}-1)} [x_{2,i}^{P_{2}} E_{1} + (1 - x_{2,i}^{P_{2}}) E_{2}] \mathbf{K}_{0}$$
(18)

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{\rm m}}{\partial x_{2,i}} = x_{1,i}^{P_1} P_2(E_1 - E_2) x_{2,i}^{(P_2 - 1)} \mathbf{K}_0$$
(19)

$$\frac{\partial \boldsymbol{K}_{t}}{\partial x_{1,i}} = P_{1} x_{1,i}^{(P_{1}-1)} [x_{2,i}^{P_{2}} k_{1} + (1 - x_{2,i}^{P_{2}}) k_{2}] \boldsymbol{K}_{g}$$
(20)

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{i}}{\partial x_{2,i}} = x_{1,i}^{P_{1}} P_{2}(k_{1} - k_{2}) x_{2,i}^{(P_{2} - 1)} \mathbf{K}_{g}$$
(21)

式中:K<sub>0</sub>为实体单元刚度矩阵与材料弹性模型倒数的乘积;K<sub>g</sub>为实体单元热传导矩阵与材料热传导系数倒 数的乘积。

各相材料的体积约束对设计变量直接求偏导,其灵敏度为

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_{1,i}} = x_{2,i} V_e \tag{22}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_{2,i}} = x_{1,i} V_e \tag{23}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_{1,i}} = (1 - x_{2,i}) V_e \tag{24}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_{2,i}} = -x_{1,i} V_e \tag{25}$$

#### 1.5 Heaviside 过滤技术及优化算法

为了获得更好的的离散 0/1 分布拓扑图,保证优化迭代过程稳定性,采用 Heaviside 非线性密度过滤技术<sup>[17]</sup>,这种方法是利用 Heaviside 阶梯函数修正原线性过滤密度

$$\hat{x}_{j,i} = 1 - e^{-\beta x_{j,i}} + \bar{x}_{j,i} e^{-\beta}$$
(26)

式中: $\beta$ 为 Heaviside 函数平缓控制的参数。

式(23)中 $\bar{x}_{i,i}$ 的表达式为

$$\bar{x}_{j,i} = \frac{1}{\sum_{i \in N_i} H_{ij}} \sum_{i \in N_i} H_{ij} x_{j,i}$$
(27)

式中:Ni是与单元 i 质心距离小于过滤半径 rmin 所有单元 f 的数目。Hit 权重系数可表示为

$$H_{if} = \max(0, r_{\min} - dist(i, f))$$
(28)

式中: $r_{min}$ 为过滤半径;dist(i,f)为单元 i和单元 f的质心距离。

移动渐近线算法将隐式原问题近似为一系列显式的线性凸子问题,利用移动近似子问题的解来不断逼近获得一个原问题的近似解,它对于复杂的多个约束优化问题具有很好的鲁棒性<sup>118</sup>,因此本文采用 MMA 求解非均匀温度场下热固耦合结构多相材料拓扑优化问题。

### 2 数值算例

现以非均匀温度场及机械力作用下的梁结构为例进行拓扑优化设计,在 Matlab 软件中编程实现。梁结构的设计域、作用载荷及边界条件如图 2 所示。梁结构的长度 L 与宽度 H 之比为 6:2,左右两端固定,结构上端作用输入的热通量  $F_1$ 大小为 1 W/mm<sup>2</sup>,机械力  $F_s$  作用在结构下端中点,大小为 10 N。实体材料 1 和实体材料 2 的弹性模型分别为  $E_1$ =10 MPa, $E_2$ =5 MPa,实体材料 1 和实体材料 2 的热传导系数分别为  $k_1$ =10 W/(mm·K), $k_2$ =5 W/(mm·K),实体材料 1 和实体材料 2 的热膨胀系数分别  $\alpha_1$ =5×10<sup>-4</sup>/k, $\alpha_1$ =2×10<sup>-4</sup>/k,两种实体材料的 1 和的 1 松/mm·K), 2 体材料 1 和实体材料 2 及空洞允许体积占结构总体积份数分别为 0.2,0.2,0.6。设计域离散为 120×40 个 4 节点矩形单元。

采用上述实体材料1进行单相材料的热固耦合结构拓扑优化设计获得拓扑结构如图3所示。基于多

120

相材料的热固耦结构拓扑优化获得拓扑结构如 图 4 所示,黑色区域表示实体材料 1,灰色区域 表示实体材料 2,白色区域表示无材料即空洞。 由图 4 可知拓扑结构清晰,避免了多相材料拓扑 优化设计中容易出现的棋盘格等数值不稳定性 现象。由图 3 及图 4 可知,基于单相材料及多相 材料获得的结构拓扑图大致相似,并且由多相材 料结构拓扑图可知:弹性模型较大的实体材料 1 (黑色区域)主要分布在变形大的区域,弹性模 量较小的实体材料 2(灰色区域)主要分布在变 形小的区域。





图 3 单相材料的结构拓扑图 Fig.3 Optimal topology obtained by single material



图 4 两相材料的结构拓扑图 Fig.4 Optimal topology obtained by multiple materials

当没有热载荷作用即热通量 *F*<sub>1</sub>大小为0时,多相材料的结构拓扑图如图 5(a),可知实体材料2 主要分 布在变形小的区域及实体材料1 边界区域,实体材料1 主要分布在变形大的区域。当热通量 *F*<sub>1</sub>大小分别为 1,1.5,2,结构拓扑图如图 5(b),5(c),5(d)所示。由图 5 及表1可知,随着热通量 *F*<sub>1</sub>大小增加,拓扑优化获得 的结构的应变能增加,即结构的刚度降低,主要由于越来越多实体材料2 分布在主要的变形大的区域,其材 料的弹性模量小,导致了优化获得的结构的刚度降低。



(a)  $\boldsymbol{F}_{t}=0$  W/m<sup>2</sup>



(b)  $\boldsymbol{F}_{t}=1 \text{ W/mm}^{2}$ 



(c)  $F_1 = 1.5 \text{ W/mm}^2$ 



(d)  $F_{t}=2 \text{ W/mm}^{2}$ 

121

图 5 不同热通量获得的结构拓扑图 Fig.5 Optimal topology with different heat flux

1 ab.1 Strain energy under different heat flux	
热通量 $F_t$ /(W/mm <sup>2</sup> )	应变能 $S_{\rm E}$ /(N·mm)
0	148.6
1	152.3
1.5	166.2
2	170.1

#### 表 1 不同热通量作用下的结构应变能 Tab.1 Strain energy under different heat fl

# 3 结论

 本文提出的多相材料进行非均匀温度场作用下的热固耦合结构拓扑优化设计方法是可行的,能够避 免棋盘格等数值不稳定性现象,获得清晰分布的拓扑图。

2) 非均匀温度场作用下热固耦合结构多相材料拓扑优化获得最优材料分布,弹性模型较大的材料主要 分布在变形大的区域,弹性模量较小的材料主要分布在变形小的区域。

3)随着热通量的增加,不均匀温度场条件下的热固耦合结构多相材料拓扑优化获得结构的应变能增大, 即结构刚度降低

#### 参考文献:

- [1] 周新建,王若飞,吴智恒,等. 基于 Hypermesh 的立式加工中心立柱结构的拓扑优化[J]. 华东交通大学学报,2013,30(6):78-83.
- [2] RODRIGUES H, FERNANDES P. A material based model for topology optimization of thermoelastic structures[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995, 38(12): 1951–1965.
- [3] 左孔天,钱勤,赵雨东,等. 热固耦合结构的拓扑优化设计研究[J]. 固体力学学报,2005,26(4):447-452.
- [4] DU Y,LUO Z,TIAN Q, et al. Topology optimization for thermo-mechanical compliant actuators using mesh-free methods[J]. Engineering Optimization, 2009, 41(8):753-772.
- [5] GAO T,ZHANG W. Topology optimization involving thermo-elastic stress loads[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2010,42(5):725-738.
- [6] 李冬梅,张宪民,王念峰,等. 基于可靠性约束的热固耦合结构拓扑优化[J]. 华南理工大学学报:自然科学版,2011,39(6): 42-46.
- [7] DENG J, YAN J, CHENG G. Multi-objective concurrent topology optimization of thermoelastic structures composed of homogeneous porous material[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2013, 47(4):583-597.
- [8] LIU XJ, WANG C, ZHOU YH. Topology optimization of thermoelastic structures using the guide-weight method[J]. Technological Sciences, 2014, 57(5):968–979.
- [9] DEATON JD, GRANDHI RV. Stress-based design of thermal structures via topology optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2015, 53(2):1–18.
- [10] LI Q, STEVEN GP, XIE YM. Thermoelastic topology optimization for problems with varying temperature fields[J]. Journal of Thermal Stresses, 2001, 24(4): 347–366.
- [11] 孙士平,张卫红. 多相材料结构拓扑优化的周长控制方法研究[J]. 航空学报,2006,27(5):963-968.
- [12] LIU P, LUO Y, KANG Z. Multi-material topology optimization considering interface behavior via XFEM and level set method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016, 308:113–133.
- [13] GUO X,ZHANG W,ZHONG W. Stress-related topology optimization of continuum structures involving multi-phase materials[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2014, 268(1):632-655.
- [14] GAO T, XU P, ZHANG W. Topology optimization of thermo-elastic structures with multiple materials under mass constraint[J]. Computers and Structures, 2016, 173(9):150-160.

- [15] SIGMUND O. Design of multiphysics actuators using topology optimization—part II:two-material structures[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190(49):6577-6604.
- [16] SIGMUND O, TORQUATO S. Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1997, 45(6):1037-1067.
- [17] XU S, CAI Y, CHENG G. Volume preserving nonlinear density filter based on heaviside functions[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2010, 41(4):495–505.
- [18] SVANBERG K. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987, 24(2): 359–373.

# Multi-material Topology Optimization of Thermo-Mechanical Coupling Structure in Non-uniform Temperature Field

Zhan Jinqing<sup>1,2</sup>, Long Liangming<sup>2</sup>, Lin Chunhui<sup>2</sup>, Yang Xiangjie<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Nanchang University, Nanchang 330031, China;

2. School of Mechanotronics and Vehicle Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

**Abstract**: To obtain better structural performance by exploiting the advantages of different materials, a topological design method of thermo-mechanical coupling structure using multiple materials under non-uniform temperature field is proposed in this study. The objective function was developed by minimizing the strain energy to satisfy the stiffness requirements, and the structure volume was restricted. The multi-material topology optimization model of thermo-mechanical coupling structure subjected to non-uniform temperature field was also established. The sensitivities of the objective function and the constraint were solved by the adjoint matrix approach. The Heaviside filter technique was adopted to modify the sensitivities in to avoid the phenomenon of numerical instability and the method of moving asymptotes was used to solve the topological optimization problem. The numerical examples were given to illustrate that the proposed method is correct and effective.

**Key words**: thermo-mechanical structure; topology optimization; non-uniform temperature field; multiple materials