

文章编号: 1005-0523(2019)04-0039-09

基于弹性薄板理论的下穿铁路框架涵顶板受力分析

彭 彤, 郑明新

(华东交通大学土木建筑学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 为了对下穿铁路路基的框架涵顶板的受力进行分析, 以南昌某国道框架涵下穿铁路路基为背景工程, 引入 Kirchhoff 弹性薄板理论计算, 将挠度表达式设为双三角级数的形式, 采用通解加特解两部分探讨承受了上覆土荷载以及列车荷载时箱涵顶板的受力特征, 表达式中通解的积分常数根据矩形薄板的边界条件来确定。理论计算采用 Wolfram Mathematica 计算软件, 将计算所得到的解析解与 ABAQUS 有限元计算结果进行对比, 对比结果表明二者吻合度较好, 说明基于弹性薄板理论的解析解能够较好地满足工程计算需要, 该方法可用于研究实际下穿工程中框架涵顶板的受力情况, 具有很好的工程实用价值。

关键词: 铁路路基; 弹性薄板理论; 解析解; 有限元; 框架涵; 顶板受力

中图分类号: TU113.5+47

文献标志码: A

随着我国铁路交通运营的不断发展和进步, 出现了越来越多的框架涵下穿既有铁路的工程。在运营过程中, 框架涵顶板承受了铁路路基荷载与列车荷载等多种形式的荷载, 顶板在承受了荷载后发生的弯曲变形将影响到上部路基的变形, 从而对上部列车的正常运行产生一定的影响。根据弹性薄板理论, 当板的厚度与其最小边长的比值在 $1/8 \sim 1/5$ 时, 便可以用弹性薄板理论进行计算。一般来说, 用于交通工程的框架涵顶板厚度在 $60 \sim 150$ cm 居多, 其厚度远大于板的挠度值; 因此, 可以运用弹性薄板理论对箱涵顶板的受力进行分析。

针对弹性薄板弯曲问题的求解, 众多学者已经开展了大量的研究。求解的方法主要有解析法以及有限元方法。其中, 曲庆璋^[1]通过假定满足边界条件以及薄板问题的基本微分方程的三角级数形式的挠度方程进行求解, 并将所求解得到的结果与有限元结果进行对比, 来验证求解的正确性。钟万勰^[2]采用分离变量法结合哈密尔顿体系进行薄板弯曲问题的求解。针对矩形板的求解, 要考虑四边支承形式的不同, 米筠^[3]通过功的互等法分别对四边固定, 一对边固定一对边自由, 一对边固定一对边简支, 一对边固定一边简支一边自由, 两邻边简支另两邻边自由有角点支撑, 两邻边固定另两邻边自由有角点支撑弹性地基薄矩形板在集中载荷作用下的挠曲面方程进行推导求解, 通过将编程软件 MATLAB 求解出的数值解与有限元解进行对比分析来验证推导出的挠曲面方程的准确性。朱晓双等^[4]研究了对边固支另两边简支的支承条件下板的受力情况。钟阳等^[5]利用辛几何方法, 研究了两邻边固支另两邻边简支支承条件下矩形薄板的理论解。Krauthammer T 和 Ventsel E^[6]研究了承受均布荷载、局部荷载、点荷载等不同荷载作用下不同支承形式的薄板与薄壳的受力变形情况。马方^[7]研究各项同性异种材料填充开孔薄板的应力集中问题, 根据所研究问题的特点对应力集中系数计算公式进行推导。已有研究多针对理论体系的求解验证, 而将理论运用到解决实际工程问题的研究相对较少。目前, 大部分学者在研究实际工程中类似结构变形问题时, 多借助有限元数值软件进行分析, 金刚等^[8]通过建立 ANSYS 有限元数值模型, 同时考虑框架涵顶部受到回填土压力以及车轮荷载作用, 不同深度下回填土对框架涵的受力的影响。杨菲^[9]在研究桩板、空心板梁桥结构下穿高铁桥梁时, 运用有限元软件 Plaxis

收稿日期: 2019-01-15

基金项目: 江西省自然科学基金资助项目(2017BAB206056)

作者简介: 彭彤(1994—), 女, 硕士研究生, 研究方向为隧道及地下工程稳定性分析与结构优化。

通讯作者: 郑明新(1966—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为道路边坡稳定与路基病害防治、环境岩土保护。

以及 ABAQUS 对施工过程进行模拟,以此来评估下穿过程中高铁桥梁的安全性。部分学者在工程应用上也采用弹性薄板理论,王卫红等^[10]在研究地下采场顶板变化规律研究中,建立弹性薄板组的力学模型,同时采用数值模拟方法来研究模型的挠曲和应力分布情况。徐洪涛等^[11]运用弹性薄板小挠度理论研究了地下立体车库的挡土侧墙在不同厚度,不同混凝土强度等级以及不同边界约束下的受力情况,以此确定合理的设计方案。孙伟等^[12]基于弹性薄板理论采用能量法分析了巷道层状顶板的破坏特征。但在许多工程领域中,运用薄板理论进行研究分析的例子仍然较少。在框架涵下穿铁路路基工程中鲜有基于薄板理论的框架涵顶板变形研究。据此,本文主要结合实际工程中下穿铁路路基框架涵顶板的受力情况进行研究分析,为下穿铁路框架涵在运营中的安全问题的处理提供理论依据。

1 计算模型

1.1 弹性曲面的微分方程

矩形薄板的边长分别设为 a 和 b ,其在 x 轴方向为对边自由边,在 y 轴方向为对边固支边,薄板承受横向荷载 $q(x,y)$ 的作用。该弹性曲面的微分方程为

$$D\Delta^4\omega=q \quad (1)$$

式中: ω 为矩形板的挠度; $D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$; E 为板的弹性模量,MPa; h 为板的厚度,m; μ 为泊松比, $\Delta^4\omega=\frac{\partial^4\omega}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\omega}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\omega}{\partial y^4}$ 。

1.2 有限元边界条件

在 $x=0$ 以及 $x=a$ 边上,有

$$\omega=0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=0 \quad (3)$$

在 $y=0$ 以及 $y=b$ 边上,有

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^3\omega}{\partial y^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3\omega}{\partial x^2\partial y}=0 \quad (5)$$

1.3 挠度表达式

矩形薄板弯曲问题的挠度表达式通常表示为单或者双三角级数以及多项式的形式,在本文矩形板的支承条件下,挠度表达式可以设为^[13]:

$$\omega(x,y)=\omega^0(x,y)+\omega^*(x,y) \quad (6)$$

其中

$$\omega^0(x,y)=\sum_{m=1,2,3,\dots}\{A_m\sinh[\alpha y]+B_m\sinh[\alpha(b-y)]+C_m\alpha y\cosh[\alpha(b-y)]+D_m\alpha y\cosh[\alpha(b-y)]\}\sin[\alpha x]+$$

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}\{E_n\sinh[\beta x]+F_n\sinh[\beta(a-x)]+G_n\beta x\cosh[\beta x]+H_n\beta x\cosh[\beta(a-x)]\}\sin[\beta y]$$

$\omega^0(x,y)$ 为挠度表达式对应方程的通解部分。

$$\omega^*(x,y)=\sum_{m=1,2,3,\dots}\sum_{n=1,3,5,\dots}T_{mn}\sin[\alpha x]\sin[\beta y], \omega^*(x,y) \text{ 为挠度表达式对应方程的特解。}$$

在 $\omega^0(x,y)$ 与 $\omega^*(x,y)$ 的表达式中, $A_m, B_m, C_m, D_m, E_n, F_n, G_n, H_n$ 为通解式中的 8 个系数, $\alpha=\frac{m\pi}{a}$, $m=1, 2, 3, \dots$; $\beta=\frac{n\pi}{2b}$, $n=1, 3, 5, \dots$ 。

当荷载形式为均布荷载时,特解的形式如式(7)所示。另外,作用为均布荷载时,特解的形式还可以采用多项式来表示,且多项式必须同时满足弹性曲面微分方程以及边界条件。

当 $q(x,y)=q_0$ 时,

$$\omega^*(x,y)=\frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,2,3,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin[\frac{m\pi x}{a}] \sin[\frac{n\pi y}{2b}]}{mn(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{4b^2})^2} \quad (7)$$

列车荷载在这里可以看作局部的均布荷载,其作用位置如图1阴影位置所示,在 $v \times a$ 区域内作用均布荷载 q_1 。将 $\omega^*(x,y)=\sum_{m=1,2,3,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} T_{mn} \sin[\alpha x] \sin[\beta y]$ 带入式(1)可得

$$\omega^*(x,y)=\frac{32q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,2,3,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin[\frac{m\pi\delta}{a}] \sin[\frac{m\pi a}{2a}] \sin[\frac{n\pi\eta}{2b}] \sin[\frac{n\pi v}{4b}]}{mn(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{4b^2})^2} \times \sin[\frac{m\pi x}{a}] \sin[\frac{n\pi y}{2b}] \quad (8)$$

当板上作用均布荷载时,将上述用双三角级数表示的 $\omega^0(x,y)$ 以及 $\omega^*(x,y)$ 带入到挠度表达式,以作用上覆土荷载为例,将挠度表达式依次带入到边界条件,可以得到如下与 A_m, C_m, G_n, H_n 这4个系数相关的线性方程组。

将所设的挠度方程带入边界条件(8)以及式(4)和式(5),可分别得到用 A_m, C_m, G_n, H_n 表示的 B_m, D_m, E_n, F_n 的表达式,再将这些表达式联立带入上述边界条件,即可得到 A_m, C_m, G_n 和 H_n 的表达式,由此即可得到通解式中的8个系数的表达式,带入各个参数即可求出其数值解。

将 B_m, D_m, E_n, F_n 的表达式联立并带入当 $x=0$ 时的边界条件(3),即可得到

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1,2,3,\dots} \left\{ \frac{2}{\mu+3} \frac{\beta}{\alpha} \sinh[\alpha b] + \frac{\mu+1}{\mu+3} \sin[\frac{n\pi}{2}] + \frac{1-\mu}{\mu+3} \frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} \times \sin[\frac{n\pi}{2}] + \frac{1-\mu}{\mu+3} \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} \sinh[\alpha b] \right\} \frac{2\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} \times \cosh[\alpha b] A_m + \\ & \sum_{m=1,2,3,\dots} \left(\frac{2}{\mu+3} \alpha b + \frac{2\mu+2}{\mu^2+2\mu-3} \coth[\alpha b] \right) \left(\frac{\beta}{\alpha} \sinh[\alpha b] - \sin[\frac{n\pi}{2}] \right) \left(\frac{2\alpha^2}{b(\alpha^2+\beta^2)} \sinh[\alpha b] \right) + (\alpha b \sin[\frac{n\pi}{2}]) \times \\ & \left(\frac{2\alpha^2}{b(\alpha^2+\beta^2)} \sinh[\alpha b] \right) + \left(\frac{1-\mu}{\mu+3} \alpha b - \frac{\mu+1}{\mu+3} \coth[\alpha b] \right) \times \left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} \sin[\frac{n\pi}{2}] + \frac{2\alpha\beta}{b(\alpha^2+\beta^2)} \sinh[\alpha b] \right) \times \\ & \left(\frac{2\alpha^2}{b(\alpha^2+\beta^2)} \sinh[\alpha b] \right) + \left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} \coth[\alpha b] \sin[\frac{n\pi}{2}] \right) \times \left(\frac{2\alpha^2}{b(\alpha^2+\beta^2)} \sinh[\alpha b] \right) C_m + (\beta - \beta^2 a \coth[\beta a]) G_n + \\ & (\beta \coth[\beta a] - \beta^2 a \operatorname{csch}[\beta a]) H_n = - \sum_{m=1,2,3,\dots} \frac{16q_0}{\pi^6 D m n (\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{4b^2})^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

将 B_m, D_m, E_n, F_n 的表达式联立并带入当 $x=a$ 时的边界条件(3),即可得到

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1,2,3,\dots} \left\{ \frac{2}{\mu+3} \frac{\beta}{\alpha} \sinh[\alpha b] + \frac{\mu+1}{\mu+3} \sin[\frac{n\pi}{2}] + \frac{1-\mu}{\mu+3} \frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} \times \sin[\frac{n\pi}{2}] + \frac{1-\mu}{\mu+3} \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} \sinh[\alpha b] \right\} \frac{2\alpha^2}{(\alpha^2+\beta^2)b} \cosh[\alpha b] \\ & \cos[m\pi] A_m + \sum_{m=1,2,3,\dots} \left(\frac{2}{\mu+3} \alpha b + \frac{2\mu+2}{\mu^2+2\mu-3} \coth[\alpha b] \right) \times \left(\frac{\beta}{\alpha} \sinh[\alpha b] - \sin[\frac{n\pi}{2}] \right) \left(\frac{2\alpha^2}{b(\alpha^2+\beta^2)} \sinh[\alpha b] \right) \cos[m\pi] + \\ & (\alpha b \sin[\frac{n\pi}{2}]) \left(\frac{2\alpha^2}{b(\alpha^2+\beta^2)} \sinh[\alpha b] \right) \cos[m\pi] + \left(\frac{1-\mu}{\mu+3} \alpha b - \frac{\mu+1}{\mu+3} \coth[\alpha b] \right) \left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} \sin[\frac{n\pi}{2}] + \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} \sinh[\alpha b] \right) \times \\ & \left(\frac{2\alpha^2}{b(\alpha^2+\beta^2)} \sinh[\alpha b] \right) \cos[m\pi] + \left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} \coth[\alpha b] \sin[\frac{n\pi}{2}] \right) \left(\frac{2\alpha^2}{b(\alpha^2+\beta^2)} \sinh[\alpha b] \right) \cos[m\pi] C_m + (\beta \coth[\beta a] - \\ & \beta^2 a \operatorname{csch}[\beta a]) G_n + (\beta - \beta^2 a \coth[\beta a]) H_n = - \sum_{m=1,2,3,\dots} \frac{16q_0}{\pi^6 D m n (\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{4b^2})^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) \cos[m\pi] \end{aligned} \quad (10)$$

将 B_m, D_m, E_n, F_n 的表达式联立并带入当 $y=0$ 时的边界条件(5),即可得到

$$(1-\mu)\alpha^3 \sinh^2[\alpha b]A_m + [(1-\mu)\alpha b \coth[\alpha b] - (1+\mu)\alpha^3 \sinh^2[\alpha b]C_m + \sum_{n=1,3,5,\dots} [(\mu-2) + (1-\mu)] \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}] \times \frac{4\alpha\beta^3}{a(\alpha^2 + \beta^2)} \cos[m\pi] \sinh[\beta a]G_n + \sum_{n=1,3,5,\dots} [(\mu-2) + (1-\mu)] \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{4\alpha\beta^3}{a(\alpha^2 + \beta^2)} \sinh[\beta a] \cdot H_n = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{16q_0}{\pi^6 Dmn} \frac{1}{(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{4b^2})^2} [(\frac{n\pi}{2b})^3 + (2-\mu)(\frac{m\pi}{a})^2(\frac{n\pi}{2b})] \quad (11)$$

将 B_m, D_m, E_n, F_n 的表达式联立并带入当 $y=b$ 时的边界条件(4),即可得到

$$(1-\mu)(\frac{1-\mu}{\mu+3}\alpha b \coth[\alpha b] + 1)\alpha^2 \sinh[\alpha b]A_m + [2\alpha^2 \sinh[\alpha b] + (1-\mu)\alpha b(\frac{1-\mu}{\mu+3}\alpha b - \frac{\mu+1}{\mu+3}\coth[\alpha b])]\alpha^2 \sinh[\alpha b] + (1-\mu)\alpha^3 \sinh[\alpha b] + (1-\mu)\alpha^3 b \coth[\alpha b] \sinh[\alpha b]C_m - \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4\alpha^2\beta(\mu\alpha^2 + \beta^2)}{a(\alpha^2 + \beta^2)} \sinh[\beta a] \sin(\frac{n\pi}{2}) \cos[m\pi]G_n - \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4\alpha^2\beta(\mu\alpha^2 + \beta^2)}{a(\alpha^2 + \beta^2)} \sinh[\beta a] \sin(\frac{n\pi}{2})H_n = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{16q_0}{\pi^6 Dmn} \frac{1}{(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{4b^2})^2} [(\frac{n\pi}{2b})^2 + \mu(\frac{m\pi}{a})] \quad (12)$$

同理,当荷载 q 为局部均布荷载时,则将式中的 $\omega^*(x, y)$ 替换成 $\omega_1^*(x, y)$,再带入计算各个系数的值。

当 m 和 n 的项数均取 M 项时,式(9)~式(12)共 4 个线性方程可以组成 $4M$ 阶的线性方程组,以此可以分别解出 M 个 A_m, C_m, G_n, F_n 的值,另外的 4 个系数均可由 A_m, C_m, G_n, F_n 表示的代数式求出,由此可以得到 8 个系数的 M 项的值,再将求得的系数值带入挠度表达式,即可求得矩形板上各个点的挠度值。在进行系数计算时,借助数学计算软件 Wolfram Mathematica 进行线性方程的求解与计算。

2 工程实例

本文以南昌某国道框架涵下穿铁路为依托工程。框架涵为行车道,穿越处铁路为两股道,轨道位移框架涵顶板沿顶进长度方向的正中部。框架涵净宽 12 m,顶进部分长 20 m,墙厚 1.1 m,顶板厚 1.2 m,底板厚 1.4 m,箱体为钢筋混凝土结构,如图 2。下穿框架涵的上覆土平均厚度为 1.94 m,土层参数如表 1。

表 1 土层及箱涵材料参数
Tab.1 Material parameters

参数	厚度 h/m	重度 $\gamma/(\text{kN}/\text{m}^3)$	粘聚力 C/kPa	内摩擦角 $\phi/(\text{°})$	弹性模量 E/MPa	泊松比 μ
路基土	2.8	18.9	27.3	30	64	0.29
箱涵	-	24	-	-	32 500	0.22

该框架涵的顶板可以看作两对边施加固定约束,另外两对边不施加约束支承形式的矩形薄板。承受的上覆土压力可看作均布荷载,荷载大小的计算根据《TB.1002.1-2007 铁路桥涵基本设计规范》确定,本文通过计算取 $q_0=40.257 \text{ kPa}$ 。同时还承受了列车荷载,本文中的两股列车荷载在矩形板上沿 x 方向的中心线呈对称分布,荷载大小采用换算土柱法计算,根据《TB 10001-2016 铁路路基设计规范》确定,列车竖向荷载采用“中-活载”,轴重 220 kN,铁路为 I 级铁路,道床厚度取 0.5 m,计算宽度为 3.7 m,换算土柱高度为 3.4 m,计算所得均布荷载 $q_1=60 \text{ kPa}$,作用在如图 1 所示位置阴影位置,其中 δ 为局部均布荷载中心到固定边界的距离, η 为局部均布荷载中心到自由边界的距离, v 为局部均布荷载的作用宽度, a 为矩形板 x 方向上的长度, b 为矩形板 y 方向上的长度, x 方向上的两条边为自由边界, y 方向上的两条边为固定。在本文中, $\delta=6 \text{ m}, \eta=10 \text{ m}, v=3.7 \text{ m}$ 。

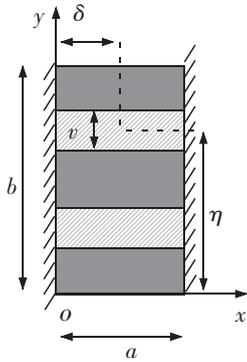


图 1 局部均布荷载作用下的矩形板

Fig.1 Rectangular plate under local uniform layout loads

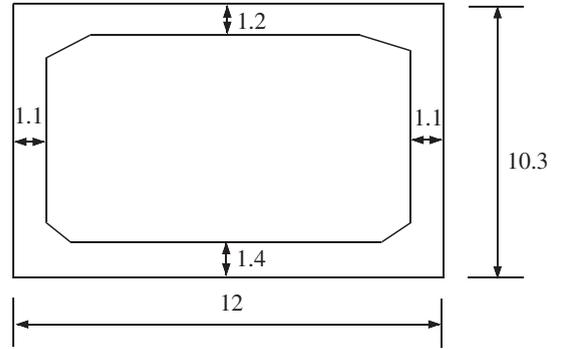


图 2 箱涵断面图(单位:m)

Fig.2 Section diagram of frame culvert(Unit:m)

3 结果分析

在承受上覆土荷载时,计算得出的系数值如表 2 及表 3 所示(文中 M 的值取 3)。

表 2 均布荷载挠度方程系数 A_m, B_m, C_m, D_m 的值

Tab.2 Value of equation coefficients A_m, B_m, C_m, D_m for loading in uniform arrangement

m 取值	A_m	B_m	C_m	D_m
1	$1.520\ 5 \times 10^{-5}$	$6.214\ 0 \times 10^{-6}$	$-4.112\ 1 \times 10^{-6}$	$2.423\ 48 \times 10^{-6}$
2	$-1.775\ 0 \times 10^{-24}$	$5.435\ 5 \times 10^{-20}$	$2.549\ 0 \times 10^{-26}$	$2.119\ 84 \times 10^{-20}$
3	$2.293\ 5 \times 10^{-10}$	$-6.122\ 5 \times 10^{-12}$	$-1.621\ 5 \times 10^{-11}$	$-2.387\ 80 \times 10^{-12}$

表 3 均布荷载挠度方程系数 E_n, F_n, G_n, H_n 的值

Tab.3 Value of equation coefficients E_n, F_n, G_n, H_n for loading in uniform arrangement

m 取值	E_n	F_n	G_n	H_n
1	$-3.721\ 60 \times 10^{-3}$	0	$8.990\ 77 \times 10^{-3}$	$-8.990\ 77 \times 10^{-3}$
2	$-8.015\ 07 \times 10^{-5}$	0	$3.191\ 28 \times 10^{-5}$	$-3.191\ 28 \times 10^{-5}$
3	$-3.994\ 43 \times 10^{-6}$	0	$8.630\ 12 \times 10^{-7}$	$8.630\ 12 \times 10^{-7}$

当板上作用列车活载即局部均布荷载时,带入计算得到的系数值如表 4 及表 5 所示。

表 4 局部均布荷载挠度方程系数 A_m, B_m, C_m, D_m 的值

Tab.4 Value of equation coefficients A_m, B_m, C_m, D_m for local uniform layout loads

m 取值	A_m	B_m	C_m	D_m
1	$4.495\ 71 \times 10^{-6}$	$6108\ 03 \times 10^{-6}$	$-1.195\ 95 \times 10^{-6}$	$2.382\ 13 \times 10^{-6}$
2	$-1.490\ 25 \times 10^{-15}$	$7.226\ 34 \times 10^{-16}$	$1.673\ 03 \times 10^{-16}$	$2.818\ 27 \times 10^{-16}$
3	$5.304\ 87 \times 10^{-11}$	$-5.077\ 01 \times 10^{-12}$	$-3.750\ 65 \times 10^{-12}$	$-1.980\ 03 \times 10^{-13}$

表 5 局部均布荷载挠度方程系数 E_n, F_n, G_n, H_n 的值

Tab.5 Value of equation coefficients E_n, F_n, G_n, H_n for local uniform layout loads

m 取值	E_n	F_n	G_n	H_n
1	$-7.268\ 55 \times 10^{-3}$	0	$1.755\ 96 \times 10^{-3}$	$-1.755\ 96 \times 10^{-3}$
2	$-5.305\ 74 \times 10^{-5}$	0	$2.112\ 53 \times 10^{-5}$	$-2.112\ 53 \times 10^{-5}$
3	$-1.032\ 66 \times 10^{-5}$	0	$2.231\ 10 \times 10^{-6}$	$-2.231\ 10 \times 10^{-6}$

将系数带入到挠度方程即可得板上任意一点的挠度值,当承受上覆土荷载时,表6及表7列出了当 $y=10\text{ m}$ 时, x 分别取1,2,3,4,5,6 m时的各点挠度值。

表6 均布荷载, $y=10\text{ m}$ 时板上部分点挠度值的解析解($\times 10^{-4}$)

Tab.6 Analytical solution of partial point deflection value when $y=10\text{ m}$ for loading in uniform arrangement($\times 10^{-4}$)

x 的值/m	1	2	3	4	5	6
ω 的值/m	0.996 6	2.405 9	3.851 7	5.058 2	5.846 3	6.119 1

表7 局部均布荷载, $y=10\text{ m}$ 时板上部分点挠度值的解析解($\times 10^{-4}$)

Tab.7 Analytical solution of partial point deflection value when $y=10\text{ m}$ for local uniform layout loads($\times 10^{-4}$)

x 的值/m	1	2	3	4	5	6
ω 的值/m	0.779 6	1.837 6	2.902 4	3.780 9	4.350 8	4.547 4

将上述两种荷载叠加起来即可得到同时承受上覆土以及列车活载时,箱涵顶板的总挠度变形值。如表8中所示。

表8 $y=10\text{ m}$ 时板上部分点挠度值的叠加解析解($\times 10^{-4}$)

Tab.8 Analytical solution for the superposition of partial point deflection values when $y=10\text{ m}$ ($\times 10^{-4}$)

x 的值/m	1	2	3	4	5	6
ω 的值/m	1.776 3	4.243 5	6.754 0	8.839 1	10.197 1	10.666 5

4 有限元模型建立

4.1 基本假设

- 1) 不考虑钢筋混凝土的初始缺陷;
- 2) 钢筋混凝土板在变形前后,其横截面均保持平截面假定。

4.2 混凝土材料本构关系

上述理论是适用于弹性薄板的变形理论,故本文在有限元分析中采用弹性混凝土的本构模型,表达式为

$$\sigma = E_s \times \varepsilon \quad (13)$$

式中: σ 为应力; E_s 为弹性模量,按325 00 MPa计算; ε 为应变。

4.3 建立有限元分析模型

采用ABAQUS有限元数值分析软件,约束板上 y 方向的转角和 x,y 位移,板上部同时承受均布荷载(上覆土荷载)以及局部均布荷载(列车活载)的作用,单元采用CD8R实体单元,在列车经过位置进行网格加密,分析步采用Static General分析步,有限元模型如图3所示。

通过建立图4所示模型进行有限元分析计算,通过计算所得在同时作用了上覆土荷载及作用一股列车活载、同时作用了上覆土荷载及作用两股列车活载的情况下的矩形板竖向位移云图分别如图4中的(a)图与(b)图所示。

由图4可知,在一股列车荷载作用下,列车

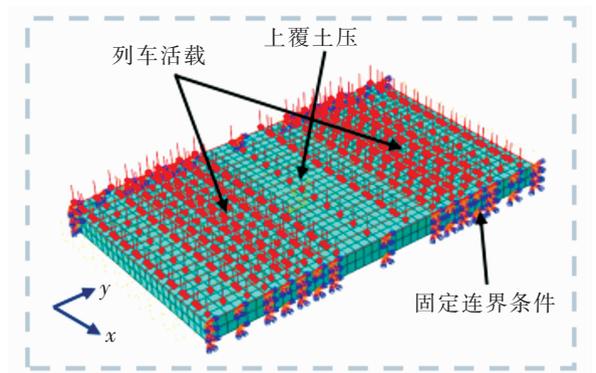
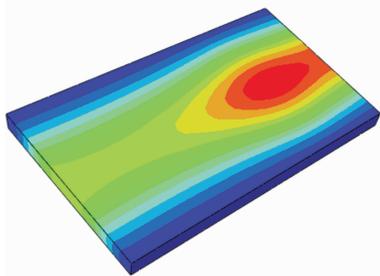
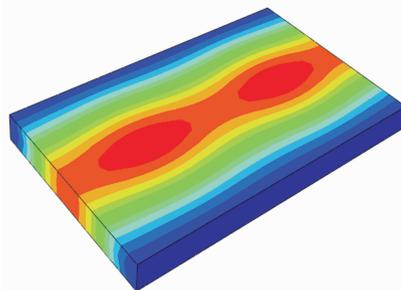


图3 边界以及荷载图
Fig.3 Boundary and load



(a) 上覆土及一股列车荷载作用位移云图

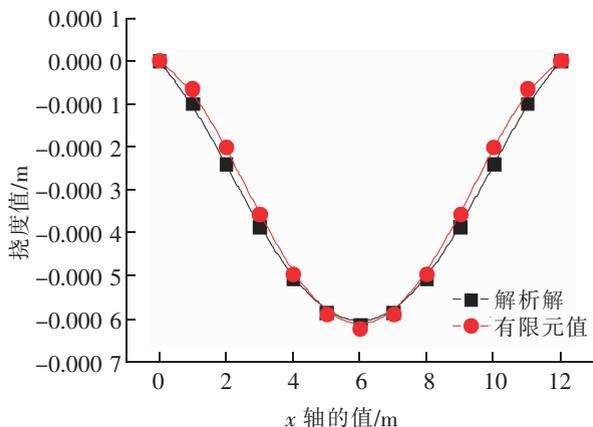


(b) 上覆土及两股列车荷载作用位移云图

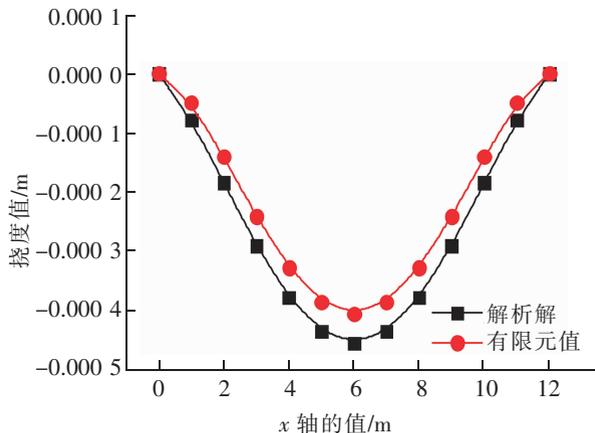
图 4 有限元计算位移(挠度)云图

Fig.4 Distribution of finite element calculation

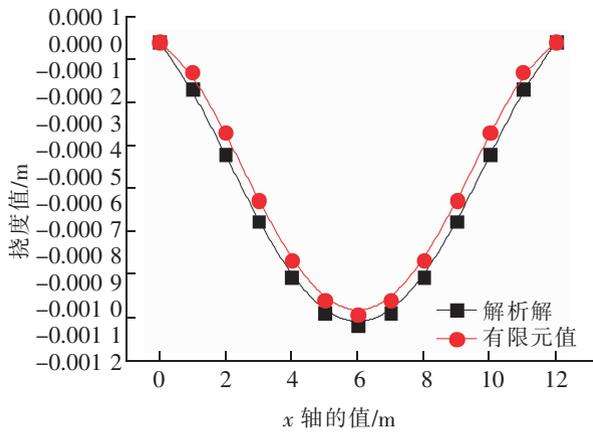
活载作用的中心位置产生的竖向位移最大,在作用了两股列车活载时,同样是在两股列车荷载中心位置的竖向位移绝对值最大,与一股列车荷载相比,在相同位置处的位移绝对值有所增大,在本例中竖向位移的绝对值沿矩形板 y 方向的中轴线逐渐减小,且呈对称分布形式。将计算所得的作用了上覆土荷载及两股列车荷载的有限元值与解析解值进行对比,对比结果如图 5 所示。



(a) 上覆土荷载作用下挠度值



(b) 列车活载作用下挠度值



(c) 叠加总挠度值

图 5 解析解与有限元值对比图

Fig.5 Comparison of analytical solutions and finite element values

由图 5 可知,无论是上覆土荷载下还是列车活载下或者是叠加荷载下的挠度值的解析解,其与有限元计算结果比较吻合,偏差值均在 $0.0408 \sim 0.0631$ mm。发生最大挠度变形的位置为两股列车荷载作用的中心位置,在本文中挠度值沿着直线 $y=10$ 呈对称分布,最大点处的挠度变形值的解析解与有限元值的差值为 0.0408 mm,二者的偏差为 3.8% 。且解析解的收敛性很强,级数取三项时,计算所得解析解就能达到较高的精度,而且随着项数取值的增加,解析解与有限元值的偏差更小。另外,通过计算,解析解的计算值关于轴 $y=$

10呈对称分布,与在对称荷载作用下板的变形机理相吻合。

5 结论

本文研究了下穿铁路的框架涵顶板在承受上覆土压力与列车荷载时的挠度变形,通过理论计算与有限元值对比分析,得到如下结论:

1) 通过计算可知,框架涵顶板在承受本文中的上覆土荷载以及列车活荷载时,最大挠度值发生在列车荷载作用的中心位置,发生最大挠度处的解析解与有限元值的偏差为3.8%,符合计算精度,且偏差值控制在0.040 8~0.063 1 mm。

2) 将计算所得的解析解与有限元值对比可知,采用弹性薄板理论来进行框架涵顶板受力的分析,能够达到较为满意的计算精度,级数取三项时,就有较高的精度,随着项数取值的增加,解析解与有限元值也越来越接近。

3) 本文所用到的理论计算模型,主要针对的是研究下穿铁路框架涵顶板的受力分析,将受到的上覆土荷载以及列车活载的形式假设成两种满足矩形薄板边界条件的不同 ω^* 的表达形式,以此来求解这两种荷载作用下的薄板挠度变形值,通过将理论值与模拟值对比可知,采用这种薄板理论能够较好地进行框架涵顶板受力计算。并且,在考虑框架涵顶板受到其他力的作用时,只需改变挠度表达式中的满足边界条件的特解 ω^* 的形式就能进行求解,在实际工程中运用该方法,对研究既有下穿铁路框架涵的顶板受力问题,以及挠度的变形对上部铁路正常运营的影响具有一定的工程参考价值。

参考文献:

- [1] 曲庆璋. 弹性板理论[M]. 北京:人民交通出版社,2000:94-104.
- [2] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连:大连理工大学出版社,1995:2-42.
- [3] 米筠. 集中载荷作用不同边界条件下弹性地基板的弯曲[D]. 秦皇岛:燕山大学,2016.
- [4] 朱晓双,何文明. 对边固支另两边简支矩形薄板弯曲问题的哈密顿方法[J]. 温州大学学报(社会科学版),2014(3):35-42.
- [5] 钟阳,孙爱民. 两邻边固支另两邻边简支弹性矩形薄板问题的理论解[J]. 武汉理工大学学报,2007,29(6):62-64,103.
- [6] KRAUTHAMMER T, VENTSEL E. Thin plates and shells: theory, analysis and applications[M]. New York: Merceel Dekker Inc, 2001:60-80.
- [7] 马方. 异种材料填充开圆孔矩形薄板应力集中的弹性分析[J]. 华东交通大学学报,2007,24(5):39-43.
- [8] 金刚,吴焕庆. 回填土深度对框架涵结构受力影响分析[J]. 兰州工业学院学报,2018,25(1):29-32.
- [9] 杨菲. 桩板及空心板梁桥结构下穿软土区高铁桥梁的数值模拟研究[J]. 华东交通大学学报,2017,34(5):12-20.
- [10] 王红卫,陈忠辉,杜泽超,等. 弹性薄板理论在地下采场顶板变化规律研究中的应用[J]. 岩石力学与工程学报,2006,25(S2):3769-3774.
- [11] 徐洪涛,关飞飞,周尚武. 弹性薄板小挠度理论在工程设计中的应用举例[J]. 结构工程师,2016,32(2):40-45.
- [12] 孙伟,谢飞鸿,郭磊. 基于弹性薄板理论的巷道层状顶板破坏的能量法分析[J]. 石家庄铁道学院学报(自然科学版),2009,22(2):54-57.
- [13] 岳建勇,曲庆璋. 两对边固定两对边自由矩形板的精确解[J]. 强度与环境,2000(3):41-46.

Stress Analysis of Frame Culvert Roof Based on Theory of Elastic Thin Plates

Peng Tong, Zheng Mingxin

(School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: This paper quoted the Kirchhoff elastic thin plate theory to analyze the roof stress of frame culvert which traversed the railway subgrade. Taking a certain frame culvert of national highway traversing railway subgrade in Nanchang as the research object, the expression of deflection was set in the form of a double trigonometric series which were divided into general solution and particular solution to calculate the stress of frame culvert under the load of overlying soil and the load of train. The general constant of the general solution in the expression was determined based on the boundary conditions of the rectangular thin plate. Mathematical computing software Wolfram Mathematica was used for theoretical calculation and the commercial software ABAQUS was adopted to set up the finite element model. The theoretical values obtained from the calculation were compared with those obtained by finite element analysis, and the comparison results were in good agreement. It is concluded that this theory can better meet the engineering needs of precision and it is proved that this method has good practical value in the analysis of the stress of frame culvert roof.

Key words: railway subgrade; theory of elastic thin plate; theoretical calculation; finite element value; frame culver; stress of frame roof