

文章编号: 1005-0523(2019)04-0102-11

# 基于临界距离理论砂浆梁断裂性能的研究

童谷生, 盛杰辉

(华东交通大学土木建筑学院, 江西 南昌 330013)

**摘要:** 采用一种只基于线弹性理论基础的新型断裂准则——临界距离理论, 对3种强度、槽口深度、槽根部半径共27种组合下的U型槽口梁试件进行三点弯曲实验。通过公式计算和有限元模拟得出及校核临界距离理论参数, 并据此推导出一种预测槽口梁试件最大荷载的新公式。分析发现, 对于不同槽口特征下试件的最大荷载, 新公式具有良好的预测精度, 且临界距离理论参数 $L$ 值随砂浆强度的增长而增大。

**关键词:** 临界距离; 三点弯曲实验; 有限元模拟; 最大荷载

**中图分类号:** O346.4

**文献标志码:** A

水泥净浆和水泥砂浆可以作为灌浆材料或混凝土基体材料使用, 这些材料的力学特性通常不作为独立的材料体系进行研究。但是随着水利工程及高铁工程应用的需要, 有时这些材料自身也作为连接材料使用, 对其强度与断裂特性提出了明确要求<sup>[1]</sup>。此时, 这些材料便同时具备了功能与结构特征, 对其相关力学特性与机理的研究很有必要。

关于水泥净浆与水泥砂浆等材料研究, 工程中较为常见的研究方向就是孔口断裂问题。这类问题虽不像尖锐裂纹问题中有应力奇异性的存在, 但由于有应力集中的产生, 含该类问题的材料也易发生脆性与准脆性行为的断裂失效, 对于该类问题的断裂评价方法被称之为孔口断裂力学<sup>[2]</sup>。在孔口断裂力学上, 已经提出的准则有: 主应力准则、最大周向应力准则、平均应力准则以及有限断裂力学方法等。

对于孔口问题, 首先应该知道孔口附近区域的位移、应变及应力分布, 就可以采用临界距离理论进行断裂分析。Taylor等<sup>[3]</sup>的临界距离理论是一种结合了材料微观结构尺度和局部线弹性应力的双参数断裂理论。这种理论只需引入材料微结构特征常数——临界距离 $L$ 及材料固有强度 $\sigma_0$ , 就可以对构件的断裂<sup>[4]</sup>与疲劳<sup>[5]</sup>特性进行预测。但临界距离理论用于砂浆类材料的断裂分析未见相关研究。

本文浇筑了3种槽深 $a$ , 3种槽根部半径 $r$ , 3种砂浆强度共27种组合下的单边U型槽试件。同时, 考虑砂浆材料离散性的影响, 对每种组合浇筑了3个样本用于取平均值, 共81个试件。基于此, 讨论这3个因素对三点弯曲实验下最大荷载的影响。同时采用公式计算和有限元软件模拟这2种方法来获取及校核砂浆材料的临界距离理论参数, 并据此推导出一种预测槽口梁最大荷载的新公式。

## 1 临界距离理论简介

临界距离理论(the theory of critical distance, TCD)假设: 对于带槽口材料的断裂问题, 当槽口附近一定区域内线弹性应力的平均值 $\sigma_{\text{eff}}$ 达到材料内在强度 $\sigma_0$ 时即发生断裂。公式表述如下:

$$\sigma_{\text{eff}} = \sigma_0 \quad (1)$$

此后, 围绕这一基本思想, 渐渐发展出了4种不同形式的TCD方法, 即点法(point method, PM), 线法

收稿日期: 2019-02-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(11242006, 11462005)

作者简介: 童谷生(1962—), 男, 教授, 博士后, 研究方向为材料与结构强度。

(line method, LM), 面法 (area method, AM), 体法 (volume method, VM)。它们的共同点是都使用一个材料特征长度: 临界距离  $L$ <sup>[6]</sup>。对于临界距离  $L$ , 文献[7]指出, 可根据另外 2 个材料参数即材料断裂韧度  $K_{IC}$  和材料内在强度  $\sigma_0$ , 通过公式(2)计算得出。

$$L = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_0} \right)^2 \quad (2)$$

TCD 中点法假设: 当距槽口尖端  $L/2$  处的线弹性应力  $\sigma_{\text{eff}}$  值达到  $\sigma_0$  时, 试件断裂<sup>[8-9]</sup>。即

$$\sigma_{\text{eff}} = \sigma(\theta=0, r=L/2) = \sigma_0 \quad (3)$$

相较于点法强调的特定点处的应力, 线法则是通过计算一个长度范围内的平均应力来进行判定。即假设: 当槽口尖端附近  $2L$  长度范围内线弹性应力的平均值  $\sigma_{\text{eff}}$  达到  $\sigma_0$  时, 试件断裂。即

$$\sigma_{\text{eff}} = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} \sigma(\theta=0, r) dr = \sigma_0 \quad (4)$$

通过点法、线法公式可以看出, 使用 TCD 的关键是找出材料临界距离  $L$ 。为了满足此要求, 必须正确计算材料的断裂韧度  $K_{IC}$  和内在强度  $\sigma_0$ 。对于  $\sigma_0$ , 通过大量的实验发现, 若试件属于脆性材料,  $\sigma_0$  值和极限抗拉强度  $\sigma_u$  值相接近。若试件属于延性材料,  $\sigma_0$  值往往要大于  $\sigma_u$  值。这时, 找出  $\sigma_0$  的第二种方法是利用 TCD 点法的原理: 在断裂瞬间, 距槽口尖端  $L/2$  处的线弹性应力会达到  $\sigma_0$ 。这时, 不同槽口特征的最大主应力-距离曲线就会相交, 通过交点坐标来找  $\sigma_0$  值和  $L$  值, 如图 1 所示,  $r$  为二等分线上的点与槽口顶点的距离,  $\sigma_{\text{max}}$  为最大主应力。即槽口越尖锐, 其二等分线上的应力集中现象越严重, 如图 1 中点划线所示; 槽口越光滑, 其二等分线上的应力集中程度就越会得到缓解, 如图 1 中实线所示。因此, 当同时绘制出不同尖锐程度槽口试件的最大主应力-距离的插值曲线时, 它们会相交, 交点所对应的距离为  $L/2$ , 最大主应力为  $\sigma_0$ 。本文采用第一种方法计算出临界距离  $L$  值, 再通过第二种方法进行校核。

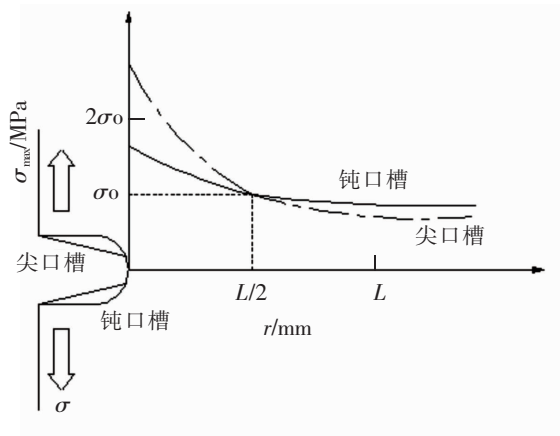


图 1 点法原理

Fig.1 Principle of point method

## 2 实验细节

### 2.1 实验程序

本实验设计了 3 种槽深  $a$  (20, 30, 40 mm), 3 种槽根部半径 (1.5, 7.5, 12.5 mm), 3 种砂浆强度 (M10, M20, M25) 共 27 种组合下的单边 U 型槽砂浆梁试件的浇筑方案, 试件长宽高尺寸统一取 400 mm×100 mm×100 mm。同时, 考虑砂浆材料离散性的影响, 每种组合浇筑了 3 个样本用于取平均值。81 个试件在 4 h 内完成浇筑, 并提取浇筑过程中同批次的砂浆拌合物用于测试砂浆的基本力学性能及反映浇筑质量。所有试件在 1 天后脱模、标准养护。28 天后, 先用边长为 70.7 mm 试块测试砂浆基本力学性能, 然后对 81 个单边 U 型槽砂浆梁试件粘贴电阻应变片并进行三点弯曲实验, 记录下加载过程中的开裂荷载值和最大荷载值, 为采用临界距离理论进行分析做准备。

实验中, 创新性地使用了 3D 打印技术制作了 U 型模块。浇筑前, 在其表面刷隔离油后嵌入到模具内, 3D 打印精度为 0.1 mm。具体如图 2 所示。

### 2.2 原材料及配合比

实验中所用的原材料分别为: 海螺牌 P.O 32.5, P.O 42.5, 河砂, 自来水, 具体配合比如表 1。

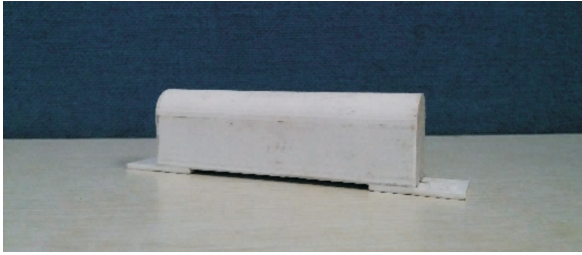


图2 3D打印U型模块  
Fig.2 3D printing model

表1 砂浆配合比  
Tab.1 Mix proportion of cement mortar (kg/m<sup>3</sup>)

强度等级	水泥	砂子	水
M10	310	1 550	280
M20	400	1 550	280
M25	465	1 550	280

### 2.3 基本力学性能测试与计算

本文采用了文献[10-11]中建议的经验公式/值。

对于泊松比 $\nu$ ,文献[12]指出:砂浆应变为0时, $\nu$ 为0.20,接近破坏时的 $\nu$ 上升为0.50或更大。文献[10]也指出,砂浆在纵向线应变为0.001时, $\nu$ 为0.20,当纵向线应变为0.002时, $\nu$ 波动为0.30左右,在接近破坏时的 $\nu$ 将大于1。另外文献[13]中将砂浆的 $\nu$ 取0.20~0.28时,有限元模拟值与实验值吻合良好。因此,本文将砂浆的 $\nu$ 取0.24。

对于弹性模量 $E$ ,文献[12]根据大量实验数据的数理回归分析,得出砂浆的割线弹性模量 $E$ 值与抗压强度 $f$ 值之间的关系为(在此假设砂浆的割线压缩弹性模量与割线拉伸弹性模量相等):

$$E=1\ 057 f^{0.84} \quad (5)$$

式中: $E$ 为砂浆割线弹性模量,MPa; $f$ 为砂浆抗压强度,MPa。

对于抗拉强度 $\sigma_u$ ,由材料力学可知:在三点弯曲加载下,试件处于上部受压,下部受拉的状态,当试件底面的正应力达到抗拉强度时,试件即破坏。本文通过计算槽口顶点的名义应力 $\sigma_n$ 并取其平均值的方法分别反映3组强度砂浆的抗拉强度 $\sigma_u$ ,具体公式为

$$\sigma_n = \frac{3 \cdot F_{\max} \cdot S}{2 \cdot t \cdot (h-a)^2} \quad (6)$$

式中: $F_{\max}$ 为砂浆最大荷载,N; $S$ 为试件的跨度,mm; $t$ 为试件的厚度,mm; $h$ 为试件的高度,mm; $a$ 为槽口深度,mm。

然后,本文为3组强度砂浆的抗压实验各制作了6个边长为70.7 mm立方体小试块。测试它们在饱和水状态下的抗压强度,测试方案参照JGJ/T70-2009《建筑砂浆基本性能试验方法标准》<sup>[14]</sup>执行,得到的结果具体如表2。

### 2.4 应变片的布置

由文献[15]知,砂浆在达到起裂荷载后,浆体——骨料界面开裂所产生的应力释放会导致周边区域的张拉应变出现骤减现象,而这可以通过布置在附近的电阻应变片捕捉到。

电阻应变片应布置在最先出现起裂现象可能的位置。由于应力集中的存在,试件槽口附近会最先出现起裂现象,所以本文在槽口轮廓线周围粘贴2枚电阻应变片以测定试件的起裂荷载。同时,为了监测裂缝的发展过程,在槽口二等分线及其左右两端各布置了2~3枚电阻应变片。取同强度的砂浆试件作为温度补偿片,所有应变片均与其构成半桥回路,具体如图3所示。

### 2.5 三点弯曲加载过程及结果

在三点弯曲实验中试件的跨度统一取360 mm,并在加载端、支座端设置与试件同宽的圆柱形小铁棒以传递线荷载。实验的加载过程分为实验前预压和正式加载,预压最大荷载控制在300 N以内,

表2 基本力学指标表  
Tab.2 Mechanical properties of cement mortar

编号	抗压强度/MPa	割线弹性模量/MPa	泊松比	抗拉强度/MPa
M10	10.48	7 606.25	0.24	1.32
M20	23.21	14 831.84	0.24	3.35
M25	26.46	16 558.67	0.24	3.48

正式加载采用位移控制加载,速率为 0.05 mm/min,直至试件断裂。记录下电阻应变片应变增长出现骤降点所对应的荷载作为起裂荷载,并记录实验中的最大荷载。27 种槽口特征试件的起裂荷载与最大荷载都计算了平均值,平均值取值参照 JGJ/T70-2009 《建筑砂浆基本性能试验方法标准》执行:当 3 个测值的最大值或最小值中如有一个与中间值的差值超过中间值的 15%时,则把最大值及最小值一并舍除,取中间值作为该组试件的平均值,具体结果如表 3 所示。所有试件均是在移出标准养护室后立即加载,以统一干湿状态对试件强度的影响。实验中有 5 个 U 型槽试件由于脱模、移动等原因在加载前就已断裂,所以实际只记录到 76 个数据。

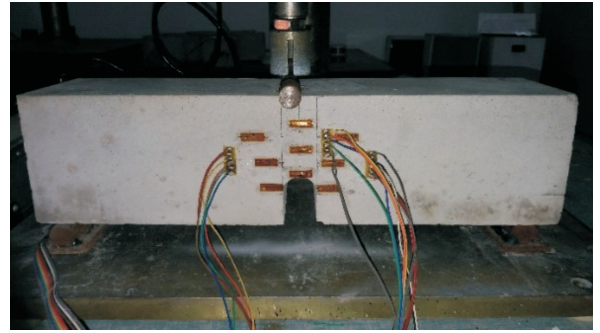


图3 应变片布置图

Fig.3 The arrangement of strain gauges

实验中有 5 个 U 型槽试件由于脱模、移动等原因在加载前就已断裂,所以实际只记录到 76 个数据。

表 3 起裂荷载值和最大荷载值表

Tab.3 The crack load and maximum load

试件编号	$a/mm$	$r/mm$	水泥砂浆强度等级	起裂荷载平均值/N	最大荷载平均值/N
M10-1	20	1.5	M10	1 150	1 494
M10-2	20	7.5	M10	1 047	1 382
M10-3	20	12.5	M10	1 056	1 474
M10-4	30	1.5	M10	882	1 157
M10-5	30	7.5	M10	754	1 239
M10-6	30	12.5	M10	844	1 066
M10-7	40	1.5	M10	593	879
M10-8	40	7.5	M10	658	960
M10-9	40	12.5	M10	658	1 100
M20-1	20	1.5	M20	2 884	3 081
M20-2	20	7.5	M20	2 927	3 502
M20-3	20	12.5	M20	2 832	2 932
M20-4	30	1.5	M20	2 367	2 868
M20-5	30	7.5	M20	2 493	2 660
M20-6	30	12.5	M20	2 434	2 986
M20-7	40	1.5	M20	1 912	2 457
M20-8	40	7.5	M20	1 575	2 936
M20-9	40	12.5	M20	1 787	3 083
M25-1	20	1.5	M25	2 993	3 230
M25-2	20	7.5	M25	3 033	3 337
M25-3	20	12.5	M25	3 156	3 428
M25-4	30	1.5	M25	2 521	2 646
M25-5	30	7.5	M25	2 662	3 051.5
M25-6	30	12.5	M25	2 865	2 918
M25-7	40	1.5	M25	2 002	2 645
M25-8	40	7.5	M25	1 662	3 021
M25-9	40	12.5	M25	2 157	3 248

同时,图 4 展示了一些断裂试件的样本,其中编号 M20-7-2 指 M20-7 编号的第 2 个样本,其它以此类推。可以发现:



1) 相比混凝土断裂面的凹凸不平,砂浆断裂面基本较为平整,裂纹大体沿着二等分线方向发展。其原因可能是砂浆中没有粗骨料的存在,裂纹发展即使遇到骨料的阻碍作用,绕行路径也不会太远。

2) M10组在达到最大荷载值后,只在试件表面观测到明显裂纹,并不会完全断裂。其原因可能是因为M10组强度要比M20,M25组强度低,试件在达到最大荷载后,加载端的刚度释放并不足以震断试件。



(a) M10-5-1



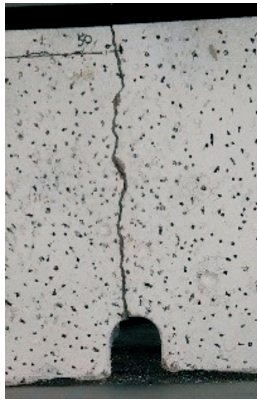
(b) M20-7-2



(c) M20-8-1



(d) M10-4-1



(e) M25-2-1



(f) M25-9-3

图4 断裂试件样本

Fig.4 Samples of failed specimens

### 3 实验数据的分析

#### 3.1 最大荷载影响因素分析

最大荷载随槽根部半径的变化趋势如图5所示,其中图5(a)中图标 $a=20$ 指当砂浆强度等级为M10,槽口深度 $a$ 为20mm时,最大荷载平均值随槽根部半径 $r$ 的变化情况;图5(a)中图标 $a=20$ 拟合曲线指通过MATLAB软件对前者做出的拟合曲线,其它以此类推。通过对最大荷载平均值在最小二乘准则下的拟合曲线观察发现:当砂浆强度和槽口深度 $a$ 不变时,槽根部半径 $r$ 增加,最大荷载呈增大趋势,如图5所示。通过观察后续有限元模型发现,槽根部半径 $r$ 的增加可以缓解槽口附近区域的应力集中,有利于槽口梁试件承受更高的荷载。

#### 3.2 临界距离理论对砂浆实验的分析

##### 3.2.1 概述

由第1节知,材料临界距离 $L$ 值的确定方法有两种:①通过定义公式(2)直接计算;②通过最大主应力-距离曲线找交点的方法得出。本文先通过第一种方法计算出砂浆的临界距离 $L$ 值,然后采用第二种方法进行校核。并由第二种方法得到启发,推导出一种预测脆性或准脆性材料槽口梁最大荷载的新公式。

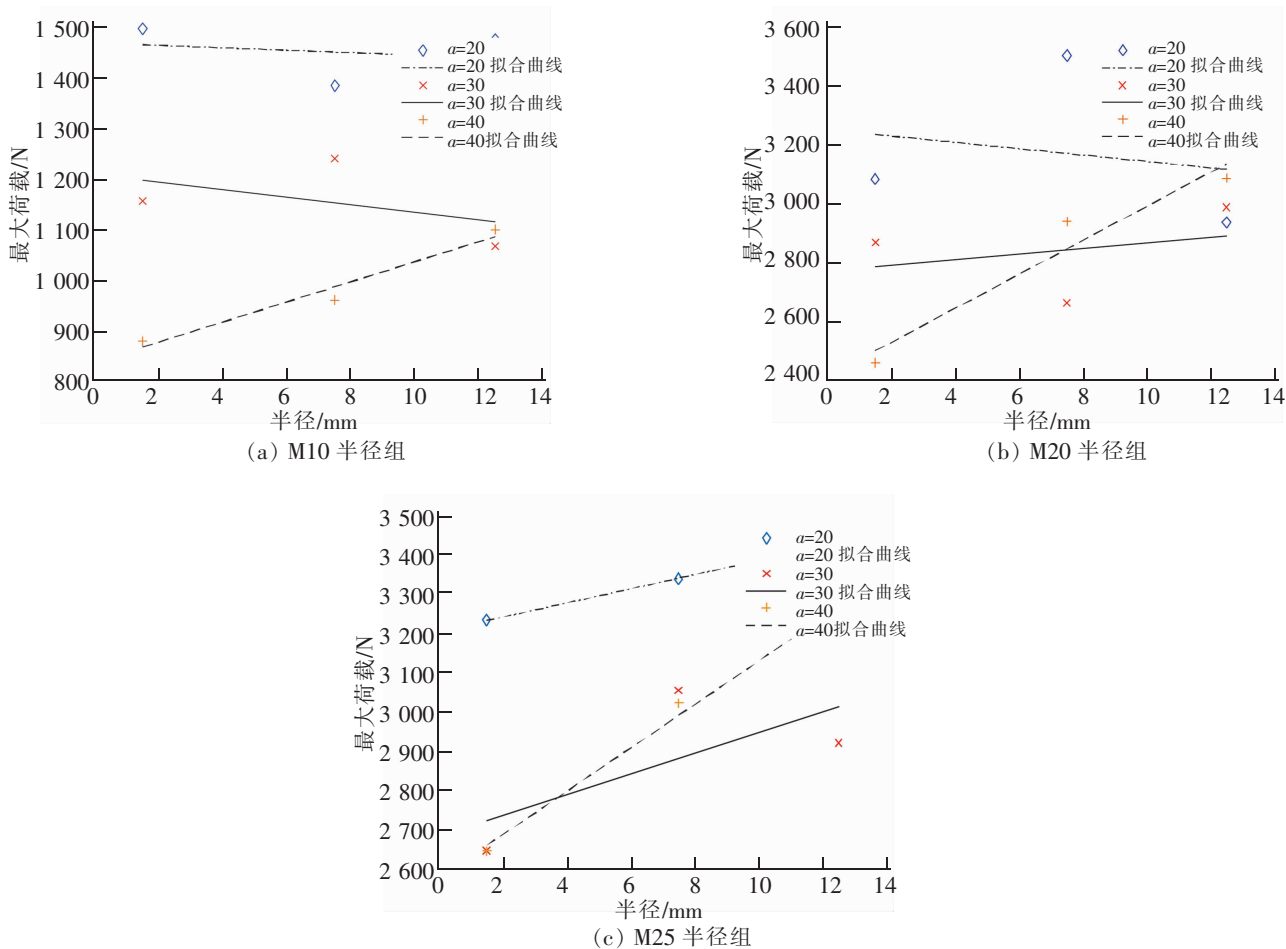


图5 最大荷载随槽根部半径的变化

Fig.5 Maximum load vs the groove root radius

3.2.2 按定义公式计算临界距离  $L$  值

徐世焯等<sup>[15]</sup>曾提出混凝土等准脆性材料的断裂过程可以分为 3 个阶段:① 起裂前的线弹性增长阶段;② 起裂后裂纹稳定扩展的非线性增长阶段;③ 裂纹的失稳扩展阶段。用区分这 3 个阶段的起裂韧度  $K_{IC}^{ini}$  和失稳韧度  $K_{IC}^{um}$  来衡量这些材料的安全性。

由于砂浆属于准脆性材料,断裂行为应该更加趋向于陶瓷等脆性材料的特点。所以本文假设:在砂浆材料中,公式(2)中的  $\sigma_0$  即为抗拉强度  $\sigma_u$ ,  $K_{IC}$  即为起裂韧度  $K_{IC}^{ini}$ 。砂浆的抗拉强度可通过表 2 得到。

对于起裂韧度  $K_{IC}^{ini}$ ,本文采用《水工混凝土断裂试验规程》<sup>[16]</sup>中的推荐式(7)~式(9)得出。由于文中 3 组强度砂浆都各有 9 种槽口特征,而该规程又主要针对直裂纹缺陷类型编写,所以文中计算各组强度砂浆中槽根部半径  $r=1.5$  mm,槽深  $a=20, 30, 40$  mm 这 3 种趋向于直裂纹特征槽口的起裂韧度  $K_{IC}^{ini}$ ,取其平均值表示该组强度砂浆的起裂韧度。

$$K_{IC}^{ini} = \frac{3 \cdot F_{ini} \times 10^{-3} \times S \times a^{1/2}}{2 \cdot t \cdot h^2} f(\alpha) \tag{7}$$

$$f(\alpha) = \frac{1.99 - \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot (2.15 - 3.39\alpha + 2.7\alpha^2)}{(1 + 2\alpha) \cdot (1 - \alpha)^{3/2}} \tag{8}$$

$$\alpha = \frac{a}{h} \tag{9}$$

式中： $F_{ini}$  为起裂荷载，kN； $S$  为试件的跨度，m； $t$  为试件的厚度，m； $h$  为试件的高度，m； $a$  为槽口深度，m。

计算出 3 组强度砂浆的  $\sigma_0$  值和  $K_{IC}$  值后，再通过公式(2)就可得到各自对应的临界距离  $L$  值，具体如表 4 所示。

表 4 起裂韧度与临界距离值  
Tab.4 The initial fracture toughness and critical distance value

砂浆强度等级	起裂韧度 $K_{IC}^{ini}/(\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2})$	临界距离 $L/\text{mm}$
M10	0.15	3.93
M20	0.41	4.75
M25	0.43	4.86

可以发现：随着砂浆强度的增长，临界距离  $L$  值也在增大。文献[17]计算了 C30 混凝土材料的  $L$  值为 4.8 mm，并指出  $L$  值与混凝土中骨料粒径大小有关。对于骨料的平均粒径大小而言，砂浆要小于混凝土，此即间接验证了本文  $L$  值的可靠性。

至于 M25 组的临界距离值大于 4.8 mm 的原因，可能是由应变仪的电路噪声、电阻应变片的灵敏度以及应变片的粘贴初始应力所引起的。但在上述 3 种影响因素中，前 2 种所造成的是系统误差，后 1 种所造成的是偶然误差，且当实验数量趋向于无穷大的时候，正负偶然误差的算数平均值是趋向于 0 的。所以本文中临界距离  $L$  值随砂浆强度增长而增大的基本规律是可信的。至此，完成了按定义公式计算临界距离  $L$  值的整个过程。

文献[18]总结了相关断裂准则中混凝土等准脆性材料断裂过程区(fracture process zone, FRP)长度的计算公式：

$$L_{FRP} = \alpha \left( \frac{K_C}{f_t} \right)^2 \quad (10)$$

式中： $L_{FRP}$  为断裂过程区长度，m； $K_C$  为断裂韧度， $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ ； $f_t$  为抗拉强度，MPa； $\alpha$  为根据不同断裂准则， $\alpha$  取不同值。

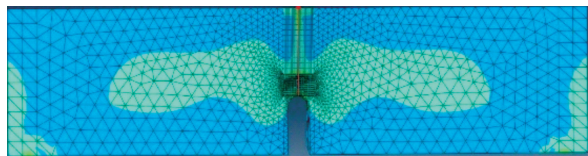
通过对比发现，临界距离的定义公式(2)与公式(10)十分相似。由此可将本文中计算出的临界距离  $L$  值作为砂浆材料 FPZ 长度一个参考值。

### 3.2.3 作最大主应力-距离曲线来校核已获得的临界距离 $L$ 值

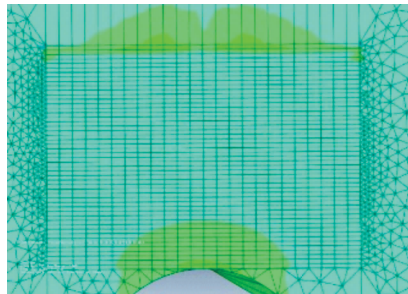
通过有限元软件 Abaqus 对最大荷载下试件槽口附近区域的应力场进行分析。在模型中，砂浆被假想为内部均匀，各向同性的线性、弹性材料，采用 C3D8R 减缩积分 3 维实体单元建模，边界条件为两端铰接，并在跨中心线上施加线荷载来模拟实验加载过程。同时，为了保证精度的条件下尽可能的提高效率，采用 Abaqus 中的分割命令将模型划分为中间区和其它区两块，中间区密集布置网格以精确描述 U 型槽口上部区域的应力梯度情况，其它区则逐步加密网格直至数据一致出现，如图 6 所示。同时，考虑试件浇筑误差的存在，模型中试件及 U 型槽口尺寸均取实验方案设计值，最大荷载取 3 个样本的平均值。然后提取最大荷载下试件 U 型槽上部二等分线上的最大主应力分布，二等分线的起点为槽口顶点。绘制出 3 组强度砂浆的最大主应力-距离曲线如图 7 所示。

可以发现：每组强度中的 9 条曲线实际上并不会完美的相交于一点，而是交于多个点(文献[6]中 PMMA 材料也遇见类似情况)。导致这种误差出现的原因可能有以下几点：

1) 本文有限元模拟中，模型的几何尺寸均取设计值，而实际上是存在试件浇筑误差的；模型的最大荷载取平均值，而砂浆材料离散性大，平均值中也包含误差。



(a) 整体图

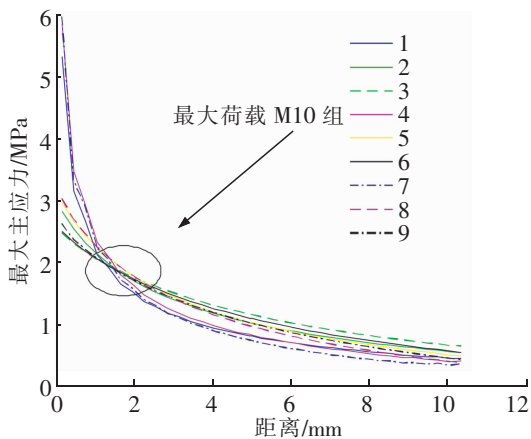


(b) 预制口上部网格加密区

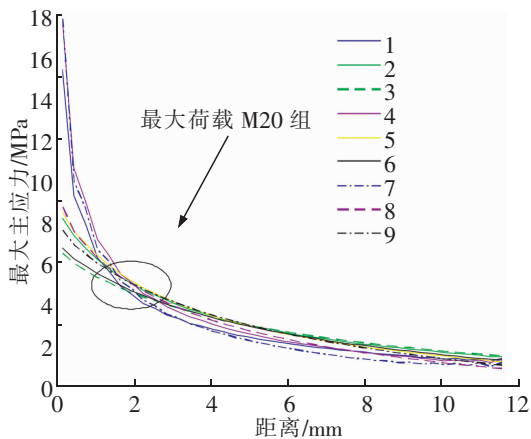
图 6 有限元模型  
Fig.6 FE model

2) 本文假定砂浆割线拉伸弹性模量等于割线压缩弹性模量,且割线弹性模量  $E$  及泊松比均  $\nu$  是由经验公式/值得出,且砂浆的泊松比  $\nu$  是一个随着应变而波动的参数。

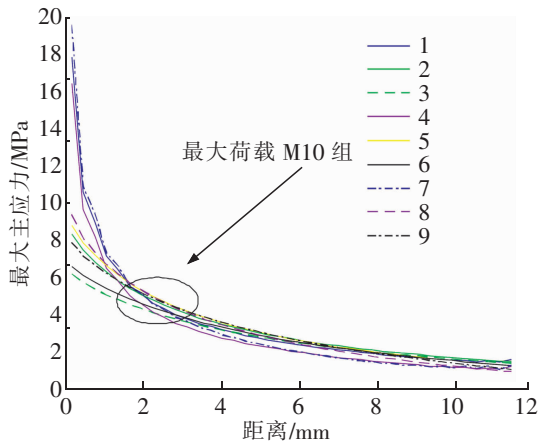
但 3 组强度砂浆的最大主应力-距离曲线都整体如图 1 所示,其交点所对应的距离在 1.5~2.5 mm 这个范围内,即  $L$  在 3~5 mm 这个范围内,整体与表 4 中的值接近,说明通过公式法计算出的砂浆临界距离  $L$  值是可靠的。至此,完成了作最大主应力-距离曲线校核已获得的临界距离  $L$  值的整个过程。



(a) M10 组



(b) M20 组



(c) M25 组

图 7 最大主应力-距离曲线图  
Fig.7 Max principal stresses vs the distance



通过观察还发现：作最大主应力-距离曲线找交点的方法,其实是建立了槽口二等分线上弹性应力值与临界距离  $L$  之间的联系;因此,只要能正确定义二等分线上弹性应力的表达式,就能找出它们之间具体的函数关系。

文献[19]曾给出了三点弯曲下 U 型槽口二等分线上张拉应力  $\sigma_y$  的解析公式(11),坐标系的建立以 U 型槽口顶点  $o$  为原点,具体如图 8 所示。对于三点弯曲下的脆性或准脆性试件,公式(11)可近似看成是计算其二等分线上弹性最大主应力的表达式。

$$\sigma_y = \frac{3 \cdot K_1 \cdot F \cdot S \cdot \sqrt{r} \cdot (x+r) \cdot (1-2x)}{2 \cdot t \cdot (h-a)^2 \cdot (2x+r)^{3/2} \cdot (h-a)} f(\alpha) \quad (11)$$

式中: $\sigma_y$  为二等分线上张拉应力,MPa; $K_1$  为槽口顶点处应力集中系数; $F$  为集中荷载,N; $S$  为试件的跨度,mm; $r$  为槽根部半径,mm; $t$  为试件的厚度,mm; $h$  为试件的高度,mm; $a$  为槽口深度,mm。

在已知了二等分线上弹性应力的表达式(11)后,可将其代入临界距离理论中线法公式(4),得出包含二等分线上弹性应力值与临界距离  $L$  值之间具体关系的隐函数公式(12):

$$\frac{1}{2L} \int_0^{2L} \frac{3 \cdot K_1 \cdot F_{\max} \cdot S \cdot \sqrt{r} \cdot (x+r) \cdot (1-2x)}{2 \cdot t \cdot (h-a)^2 \cdot (2x+r)^{3/2} \cdot (h-a)} dx = \sigma_0 \quad (12)$$

对公式(12)进行积分、化简后为隐函数公式(13):

$$\frac{3 \cdot K_1 \cdot F_{\max} \cdot S \cdot \sqrt{r}}{4 \cdot L \cdot t \cdot (h-a)^3} \cdot \left[ \frac{2L \cdot (h-a) - \frac{1}{3} (4L+r)^2 - r^2 + \frac{4}{3} \sqrt{4L \cdot r^3 + r^4}}{\sqrt{4L+r}} \right] = \sigma_0 \quad (13)$$

隐函数公式(13)中有多个参数,对于试件跨度  $S$ 、槽根部半径  $r$ 、试件厚度  $t$ 、试件高度  $h$  及槽深  $a$  等参数值,可根据实验方案得到;对于内在强度  $\sigma_0$ ,在脆性或准脆性材料中可用抗拉强度  $\sigma_u$  值代替;对于特定切槽特征下的槽口顶点应力集中系数  $K_1$  是一个与荷载无关的常数,可以通过查表或有限元计算等方法事先确定下来;至此,就只剩下临界距离  $L$  和最大荷载  $F_{\max}$  两个未知量了。对于临界距离  $L$ ,其值在同种材料是个常数,可通过上文中按定义公式计算或作最大主应力-距离曲线找交点的这两种方法得出。只要能确定材料的抗拉强度  $\sigma_u$  值和临界距离  $L$  值,通过公式(13)就可以预测任意槽口特征梁试件的最大荷载  $F_{\max}$  值了。将隐函数公式(13)显化:

$$F_{\max} = \frac{4 \cdot \sigma_0 \cdot L \cdot t \cdot (h-a)^3}{3 \cdot K_1 \cdot S \cdot \sqrt{r}} \cdot \left[ \frac{\sqrt{4L+r}}{2L \cdot (h-a) - \frac{1}{3} (4L+r)^2 - r^2 + \frac{4}{3} \sqrt{4L \cdot r^3 + r^4}} \right] \quad (14)$$

并将本文 M10 组下 9 种槽口特征试件的几何尺寸事先输入有限元软件 Abaqus 中,算出在假定荷载下各自对应的应力集中系数  $K_1$ ,再将其代入公式(14)算出预测的最大荷载值  $F_f$ 。最后通过公式(15)计算最大荷载预制值  $F_f$  与实验值  $F_{\max}$  之间的相对误差,得到的结果如表 5 所示。

$$\delta = \frac{F_f - F_{\max}}{3F_{\max}} \cdot 100\% \quad (15)$$

可以看出,按公式(14)计算出的最大荷载具有良好的精度;因此,可将本文推导的公式(14)作为一种预测脆性或准脆性材料槽口梁最大荷载的新公式。

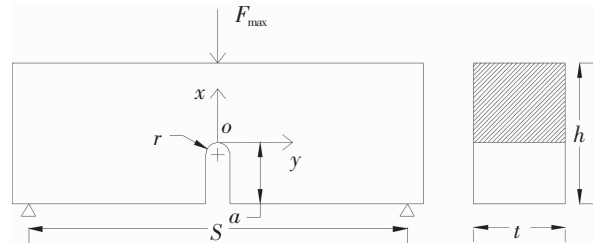


图 8 三点弯曲加载下 U 型槽口试件  
Fig.8 U-shape notched specimen under three-point bending load

表5 最大荷载预测值及相对误差  
Tab.5 The prediction values of maximum load and relative error values

试件编号	最大荷载预测值 $F_i$ /N	最大荷载实验值 $F_{max}$ /N	相对误差/%
M10-1	1 467.43	1 494	-1.78
M10-2	1 356.93	1 382	-1.81
M10-3	1 422.40	1 474	-3.50
M10-4	1 060.51	1 157	-8.34
M10-5	1 189.40	1 239	-4.00
M10-6	1 049.93	1 066	-1.51
M10-7	814.88	879	-7.30
M10-8	941.51	960	-1.93
M10-9	1 078.35	1 100	-1.97

## 4 结论

本文对3种槽深 $a$ 、槽根部半径 $r$ 、水泥砂浆强度共81个的单边U型槽砂浆梁试件进行一系列的三点弯曲加载和有限元模拟,并应用临界距离理论对实验结果进行分析和推导,主要结论如下:

- 1) 随着U型槽根部半径 $r$ 的增加,最大荷载值呈上升趋势。
- 2) 砂浆材料中, $\sigma_0$ 值与 $\sigma_u$ 值相接近,趋向于脆性材料的特点。
- 3) 砂浆材料中,临界距离理论的 $K_{IC}$ 用的是起裂韧度 $K_{IC}^{ini}$ 。
- 4) 3种不同强度的砂浆实验表明,随着砂浆强度的增长,临界距离参数 $L$ 值增大。
- 5) 临界距离 $L$ 值可作为槽口砂浆梁试件的断裂过程区长度的一个参考值。
- 6) 对于脆性与准脆性材料的槽口梁试件,可通过新公式(14)预测其最大荷载。

## 参考文献:

- [1] 张梦楠,马晓川,王平,等. 减振型无砟轨道对CA砂浆力学性能要求研究[J]. 铁道科学与工程学报,2014(6):20-24.
- [2] AYATOLLAHI M R, TORABI A R, RAHIMI A S. Brittle fracture assessment of engineering components in the presence of notches: a review[J]. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 2016, 39(3): 267-291.
- [3] TAYLOR D. The theory of critical distances: A new perspective in fracture mechanics[M]. London: Elsevier, 2007: 1-307.
- [4] CASTRO J, CICERO S, SAGASETA C. A criterion for brittle failure of rocks using the theory of critical distances[J]. Rock Mechanics & Rock Engineering, 2016, 49(1): 1-15.
- [5] HU XUTENG, XU JIA, BAO ZHENQIANG, et al. Effect of notch geometry on the fatigue strength and critical distance of TC4 titanium alloy[J]. Journal of Mechanical Science & Technology, 2017, 31(10): 4727-4737.
- [6] CICERO S, MADRAZO V, CARRASCAL I A. Analysis of notch effect in PMMA using the Theory of Critical Distances[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2012, 86: 56-72.
- [7] LOUKS R, ASKES H, SUSMEL L. A generalised approach to rapid finite element design of notched materials against static loading using the Theory of Critical Distances[J]. Materials & Design, 2016, 108: 769-779.
- [8] SUSMEL L, TAYLOR D. On the use of the Theory of Critical Distances to predict static failures in ductile metallic materials containing different geometrical features[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2008, 75(15): 4410-4421.
- [9] SUSMEL L, TAYLOR D. The theory of critical distances to predict static strength of notched brittle components subjected to mixed-mode loading[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2008, 75(3/4): 534-550.

- [10] MAHER A, DARWIN D. Mortar constituent of concrete in compression[J]. ACI Journal, 1982, 79: 100–109.
- [11] HAERI H, SARFARAZI V, SHEMIRANI A, et al. On the direct experimental measurement of mortar fracture toughness by a compression-to-tensile load transformer (CTLT)[J], 2018, 181: 687–712.
- [12] 刘桂秋. 砌体结构基本受力性能的研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2005: 30–37.
- [13] SAYED-AHMED E Y, SHRIVE N G. Nonlinear finite-element model of hollow masonry[J]. Journal of Structural Engineering, 1996(6): 683–690.
- [14] 陕西省建筑科学研究院. JGJ/T 70–2009 建筑砂浆基本性能试验方法标准[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2009.
- [15] 徐世焯, 朱榆, 张秀芳. 水泥净浆和水泥砂浆材料的 I 型断裂韧性测定[J]. 水利学报, 2008, 39(1): 41–46.
- [16] 中华人民共和国国家发展和改革委员会. DL/T 5332–2005 水工混凝土断裂试验规程[S]. 北京: 中国电力出版社, 2006.
- [17] PELEKIS I, SUSMEL L. The Theory of Critical Distances to assess failure strength of notched plain concrete under static and dynamic loading[J]. Engineering Failure Analysis, 2017, 82: 378–389.
- [18] AYATOLLAHI M R, AKBARDOOST J. Size effects on fracture toughness of quasi-brittle materials—A new approach [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2012, 92: 89–100.
- [19] 罗林, 王启智. 用 U 形切槽梁同时测定准脆性材料的拉伸强度和断裂韧性: 理论分析[J]. 工程力学, 2009, 26(9): 244–250.

## Research on Fracture Performance of Mortar Beam Based on Theory of Critical Distance

Tong Gusheng, Sheng Jiehui

(School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

**Abstract:** The study of the mechanical properties of engineering materials such as cement paste and cement mortar has become increasingly important with the needs of engineering applications. In this paper, the three-point bending beam test for the U-shaped notched beam specimens with three types of strengths, groove depths and groove root radii were carried out with a new fracture criterion—the theory of critical distance, which consist of 27 combinations in total. Theoretical parameters were obtained and verified by formula calculation and finite element simulation, and a new formula for calculating the maximum load of the notched beam was derived. The observation shows that for the maximum load, the calculated value of the new formula has good precision. The strength of mortar increases, while the theoretical parameter  $L$  value increases.

**Key words:** the theory of critical distance; the three-point bending beam test; finite element simulation; maximum load