

文章编号:1005-0523(2021)04-0081-18



# 奇异性弹性场分析的新型超级奇异单元法综述

王从曼<sup>1,2</sup>, 平学成<sup>1,2</sup>, 王醒醒<sup>1,2</sup>, 陈梦成<sup>3</sup>

(1. 天津科技大学机械工程学院, 天津 300222; 2. 天津市轻工与食品工程机械装备集成设计与  
在线监控重点实验室, 天津 300222; 3. 华东交通大学土木建筑学院, 江西 南昌 330013)

**摘要:**随着城市轨道交通高质量、高效率的发展要求,工程和机械设备的疲劳强度问题越来越受到重视。机械结构破坏起源于各种形式的缺陷,如裂纹、夹杂、孔洞等,而奇异性应力是材料缺陷处裂纹萌生的重要原因。新型超级奇异单元是基于奇异性位移场、应力场的数值特征解和 Hellinger-Reissner 变分原理构造的包含缺陷角部的特殊单元,其能够用于分析多种缺陷角部邻域奇异性弹性场。与其它奇异单元相比,新型超级奇异单元通用性强,无需任何过渡单元即可与常规单元连接,可以应用于任意楔形角和任意材料组合的奇异性应力场分析。文章主要综述了新型超级奇异单元在二维或三维中的裂纹尖端、夹杂角尖端、V型缺口角尖端、孔洞角尖端、多相材料界面角尖端的应用情况,对于如何使用该单元分析奇异性应力场具有一定的指导意义。

**关键词:**奇异单元;疲劳与断裂;有限元;奇异性应力场

**中图分类号:** O346.1

**文献标志码:** A

**本文引用格式:**王从曼,平学成,王醒醒,等. 奇异性弹性场分析的新型超级奇异单元法综述[J]. 华东交通大学学报, 2021, 38(4): 81-98.

**DOI:** 10.16749/j.cnki.jecjtu.2021.04.010

## Review of the Novel Super Singular Element Method for Singular Elastic Field Analysis

Wang Congman<sup>1,2</sup>, Ping Xuecheng<sup>1,2</sup>, Wang Xingxing<sup>1,2</sup>, Chen Mengcheng<sup>3</sup>

(1. College of Mechanical Engineering, Tianjin University of Science and Technology, Tianjin 300222, China; 2. Tianjin Key Laboratory of Integrated Design and On-line Monitoring for Light Industry & Food Machinery and Equipment, Tianjin 300222, China; 3. School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

**Abstract:** With the development of high quality and high efficiency of urban rail transit, the fatigue strength of engineering and mechanical equipment has attracted more and more attention. The failure of mechanical structures arises from various forms of defects, such as cracks, inclusions, holes, etc. The singularity stress is an important cause of crack initiation at material defects. The novel super singular element is based on numerical eigen-solutions of singular displacement and stress fields and the Hellinger-Reissner variational principle. It is a special element that contains the corner of a defect and can analyze the singular elastic field. Compared with other singular elements, it is versatile and has nothing to do with the size of the element. It can be connected with conventional elements without any transition elements. It can be applied to singular stress field analysis of any interface corner and any material combination. The article mainly reviews the application of the novel super

收稿日期: 2021-06-29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51975411); 天津市自然科学基金资助项目(18JCYBJC88500); 天津市高校中青年骨干  
创新人才培养计划(津教委人函[2017]23号); 天津市研究生科研创新项目(2020YJJB072)

作者简介: 王从曼(1987—), 女, 博士研究生, 研究方向为机械强度分析。E-mail: 595289880@qq.com。

通信作者: 平学成(1975—), 男, 教授, 博士, 研究方向为机械结构强度与动力学。E-mail: xcping@tust.edu.cn。

singular elements in the crack tip, inclusion corner tip, notch corner tip, hole corner tip and multiphase materials interface in 2D or 3D, which has a certain guiding significance on how to use this element to analyze singular stress field.

**Key words:** singular element; fatigue and fracture; finite element; singular stress field

**Citation format:** WANG C M, PING X C, WANG X X, et al. Review of the novel super singular element method for singular elastic field analysis[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2021, 38(4): 81-98.

应力奇异性经常发生在几何形状不连续的结构中,典型的例子有裂纹、孔洞和夹杂等。分析奇异性应力场时,只有在简单构型情况下才能获得解析解,对于复杂的情况,通常采用数值方法。有限元法由于其理论的完备性与强大的通用性成为应用最广泛的数值方法之一。常规有限元法求解奇异性应力场时精度普遍不高,即使可以通过加密应力奇异点领域网格的方法进一步减少误差,但却又会导致求解效率大大降低。后来研究人员采用应力/位移外插法求解奇异性应力场,但是越接近裂纹尖端,应力和位移的计算值与实际理论值误差越大,导致应力/位移外插法无法得到高精度的结果。为了提高精度,Nisitani等<sup>[1-2]</sup>和Ping等<sup>[3]</sup>采用奇异点应力法计算缺陷尖端奇异性应力场,这种方法虽然计算精度较高,但在求解时需要先给定一个参考问题的精确解,然后利用待求问题和参考问题的应力比值来求解奇异性应力场,限制了此方法的使用。在对具有双材料界面的界面边进行建模时,Chen等<sup>[4]</sup>开发了一种富集元,可以解释仅受机械载荷影响的双材料界面裂纹尖端处的应力奇异性。与Chen的工作类似,Gadi等<sup>[5]</sup>,Pageau等<sup>[6-7]</sup>也采用富集有限元来求解奇异性应力场,解释了不同材料连接处的奇异性应力行为,但这种方法仍依赖于单元尺寸。为了克服常规有限元的缺点,研究人员提出了一系列专门用来处理缺陷尖端应力奇异性的特殊单元,这类单元通常被称为奇异单元。通过在缺陷尖端使用这类奇异单元,可以对那些含有几何不连续部位的应力场进行有效的数值分析。

在分析二维平面奇异性应力场时,最早使用的裂纹尖端奇异单元是Benzley型单元<sup>[8]</sup>和Barsoum型单元<sup>[9]</sup>,其中Barsoum型单元就是如今使用广泛的四分之一点奇异单元。Abdelaziz等<sup>[10]</sup>提出了一种改进的四分之一点奇异单元,用于对裂纹尖端的奇异点进行建模。Liu<sup>[11]</sup>提出了基于边缘的平滑有限元,

Jiang等<sup>[12]</sup>在他们的基础上开发了一个7节点奇异单元,用来模拟裂纹尖端周围的奇异性应力行为。这些单元通常是通过简单地改变标准单元的节点位置来开发的,不需要重新配制,方便实际使用。其后,Tong等<sup>[13]</sup>在杂交元概念的基础上提出了超级混合裂纹尖端奇异单元,将此超级奇异单元与常规有限元结合起来,可以分析平面裂纹尖端奇异性应力场。Lin等<sup>[14]</sup>开发了一种混合裂纹尖端奇异单元用于双材料界面分析,其中混合单元的假定应力和位移场是基于复势技术推导出来的。Tan等<sup>[15]</sup>开发了一种奇异单元来分析在面内热和耦合载荷下双材料楔形体顶点处的奇异性应力场。扩展Mote<sup>[16]</sup>和Bradford等<sup>[17]</sup>的工作,Madenci等<sup>[18]</sup>开发了一种混合单元,并将其与常规有限元耦合,可以用于分析在机械和均匀热载荷下由材料和几何不连续性引起的奇异性应力行为。Barut等<sup>[19]</sup>基于机械和热载荷下的特征函数展开方法,利用应力和位移场的精确解开发了一种奇异单元,用于分析多相材料的奇异性应力场。Zhang等<sup>[20]</sup>开发了一种带有弹性夹杂物的n边形奇异单元,用于对具有随机分散夹杂物的异质材料进行力学分析。Cai等<sup>[21]</sup>开发了一种用于动态载荷下双材料界面裂纹的新奇异单元。Li等<sup>[22]</sup>基于混合应力函数开发了一种新奇异单元,可以用于各向异性材料中裂纹尖端奇异性应力场分析,且此奇异单元形状和节点的数量可灵活调整。

现有的特殊奇异元大多是针对二维问题,对于三维问题的探究还处于一个不太成熟的阶段。从二维到三维,除了模型自由度的增多,相当一部分二维假设不再适用,需要重新对其定义。与平面断裂问题相比,三维断裂问题的数值分析难度更大,需要解决的问题更多,但与实际工程应用更接近,具有很大的研究价值。在三维裂纹的研究方面,目前也有了一定的研究成果。

Kuna等<sup>[23]</sup>在混合应力模型的基础上,开发了一

种形函数包含裂纹尖端应力的已知奇异行为的特殊裂纹尖端奇异单元,用来分析三维弹性断裂问题。李翠华<sup>[24]</sup>构造了一种新的三维奇异单元,可以用于受远场载荷的圆环形和半椭圆形表面裂纹尖端应力场分析,扩展了 Ingraffea 等<sup>[25]</sup>和 Banks-skill<sup>[26]</sup>的工作。Grummitt 等<sup>[27]</sup>考虑了用于三维断裂问题的拉格朗日奇异单元的细节,并证明了它的准确性和效率。Tracey<sup>[28]</sup>提出了三维奇异单元分析裂纹的几何参数,随后 Joao 等<sup>[29]</sup>使用此奇异单元对一系列断裂力学问题进行建模。结果表明,在使用正确设计的网格时,分析具有一定的准确性。Ariza 等<sup>[30]</sup>提出了一种具有平面几何形状的 9 节点二次奇异单元用于 3D 断裂力学分析。陈伟华<sup>[31]</sup>在三维裂纹的尖端区域采用二维平面和反平面裂纹问题的辛解析本征解作为插值函数,构造出一类三维辛解析奇异单元,将此奇异单元与三维常规有限元相结合可对三维断裂问题进行数值分析。Hu 等<sup>[32]</sup>提出了一种新辛解析奇异单元用于三维裂纹奇异性应力场分析。

目前为止,奇异单元已取得广泛发展与应用,但是随着制造和材料技术的不断进步,奇异单元仍存在需要完善之处,例如数值结果仍然依赖于奇异单元的大小;除混合奇异单元外,由于节点处自由度的不同,奇异单元和常规单元之间的单元相容性无法得到满足,这些奇异单元很难收敛到精确解;多数奇异单元依赖于解析解,通用性不强。针对这些不足,建立了一系列用于奇异性弹性场分析的新型超级奇异单元。新型超级奇异单元是基于奇异性位移场和应力场的数值特征解和 H-R 变分原理构造的包含缺陷角部的特殊单元,能够用于分析奇异性弹性场。与其它奇异单元相比,新型超级奇异单元在保证精度和稳定性的基础上,不依赖于单元尺寸,无需任何过渡单元即可与常规单元连接。由于其处理过程是基于数值解建立的,整个问题的实施过程具有很强的通用性,可以应用于任意楔形角和任意材料组合的奇异性弹性场分析。主要综述了新型超级奇异单元在二维或三维中的裂纹尖端、夹杂角尖端、V 型缺口角尖端、孔洞角尖端、多相材料界面角尖端的应用情况,对新型超级奇异单元的理论推导、单元建立和组装以及分析过程进行了介绍。

### 1 平面楔形角尖端奇异单元

工程结构中,如动力系统中转向架焊接接头,

由于刚度失配导致应力奇点,是产生裂纹的重要原因之一,奇异场分析对结构组件安全要求有重要作用。工程材料中经常存在 V 型孔洞和缺口等非椭圆型微缺陷。在小应变弹性理论的背景下,这些微缺陷中 V 型角尖端引起了奇异应力,继而引起裂纹萌生。要评价含此类缺陷的疲劳强度,必须准确有效地确定 V 型角尖端奇异场。为获得高精度和高效率的奇异弹性场数值解,基于 Yamada 等<sup>[33]</sup>有限元特征法,建立一种新型有限元模型,通过引入陈梦成和 Sze 的非协调元<sup>[34]</sup>,得到楔形角部弹性场数值解。

#### 1.1 V 型角尖端奇异单元

如图 1 所示为 V 型角尖端域。为了得到 V 型角尖端奇异弹性场变化函数,需要依据虚功原理,由特征问题方程来确定特征值和特征向量。位移形函数采用非协调元,而材料界面间则满足协调条件。通过位移与应变关系式、Hooke 定理、材料弹性矩阵,将特征问题方程离散为有限元格式,建立标准特征方程,求解特征值和特征向量<sup>[35]</sup>。如果求解结果为多特征值,依据 Teocaris<sup>[36]</sup>理论,通过曲线拟合和形函数插值得到的奇异弹性场为

$$u_i(r, \theta) = \sum_{n=1}^N \beta_n r^{\lambda_{n+1}} \tilde{u}_{in}(\theta) \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{n=1}^N \beta_n r^{\lambda_n} \tilde{\sigma}_{ijn}(\theta) \quad (2)$$

式中:  $\beta_n$  为与特征值有关的待定系数;  $\tilde{u}_{in}(\theta)$  和  $\tilde{\sigma}_{ijn}(\theta)$  分别为位移和应力的角分布函数;  $N$  为复特征值个数;  $r$  为以 V 型角尖端为原点的邻域半径;  $\lambda_n, \lambda_{n+1}$  为特征值。为使应变能有界,所截取的特征值的范围应为  $-1 < \text{Re}(\lambda) < 0$ 。

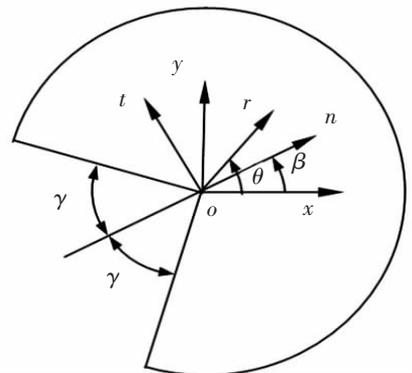


Fig.1 V-shaped corner tip domain and the definition of local coordinate system (n, t)

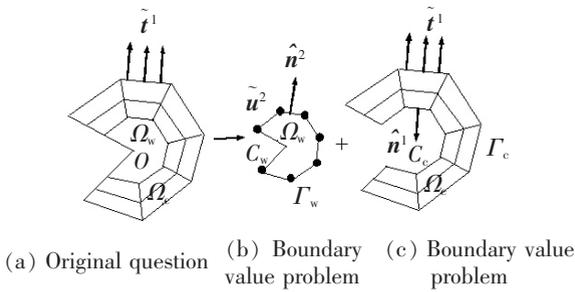


图2 二维角尖端网格划分

Fig.2 Mesh division in a 2D corner-shaped domain

为了准确获得 V 型角尖端奇异性应力场,开发了超级 V 型角尖端单元<sup>[37-38]</sup>。建立新型有限元方法的思想是将原问题图 2(a)分解为两个边值问题,如图 2(b)和图 2(c)所示:①在域  $\Omega_c$  内的混合边界值问题,  $\Gamma_c$  和  $C_c$  为圆周边界条件,该域内应用 Pian 和 Sumihara<sup>[39]</sup>开发的 4 节点四边形混合应力单元;②在楔形域  $\Omega_w$  内的混合边界值问题,  $\Gamma_w$  为圆周边界条件。

用 H-R 原理建立超级 V 型角尖端单元,在  $\Omega_w$  域上的混合泛函形式简化如下

$$\pi_w = \int_{\Omega_w} (-\sigma_w^T S_w \sigma_w / 2 + \sigma_w^T D u_w) d\Omega - \int_{\Gamma_w} t_w^T (u_w - \tilde{u}_w) dS \quad (3)$$

式中:带~的参数为边界上的定义;  $S_w$  为单元柔度矩阵;  $t$  为边界应力向量;  $D$  为材料弹性矩阵;  $\sigma_w$  为 V 型角尖端应力向量;  $u_w$  为 V 型角尖端位移向量;

通过构造位移场和应力场来简化 H-R 泛函,使用散度定理进行降维运算。对泛函  $\pi_w$  进行变分,求解其稳态值,最终得到超级 V 型角尖端单元的单元刚度矩阵。

$$K_w = G^T H^{-1} G \quad (4)$$

式中:  $G$  和  $H$  是沿超级 V 型角尖端单元边界的积分。

$$G = \int_{\Gamma_w} (n_w Z_\sigma \Sigma)^T L dS \quad (5)$$

$$H = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_w} [(n_w Z_\sigma \Sigma)^T Z_u U + (Z_u U)^T (n_w Z_\sigma \Sigma)] dS \quad (6)$$

式中:  $Z_\sigma$  为应力坐标系转换矩阵;  $n_w$  为边界  $\Gamma_w$  上的单位外法向矩阵;  $L$  为线性插值函数;  $U$  和  $\Sigma$  分别为自定义位移和应力矩阵<sup>[38]</sup>。

根据 Chen 和 Nishinani<sup>[40]</sup>的研究, V 型角尖端广义应力强度因子  $K_I$  和  $K_{II}$  可以分别定义为

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} r^{1-\lambda_1} \sigma_{t,r \rightarrow 0} \quad (7)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} r^{1-\lambda_2} \sigma_{m,r \rightarrow 0} \quad (8)$$

式中:  $\sigma_{t,r \rightarrow 0}$ ,  $\sigma_{m,r \rightarrow 0}$  分别为 V 型角部尖端基于局部坐标系原点  $(n, t)$  附近的  $t$  向应力和剪应力;  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  分别为张开型 (I 模型) 和滑开型 (II 模型) 对应的应力奇异阶数。

如图 3 所示,在拉伸载荷下,两个沿  $x$  方向排列的类钻石型孔洞。由于对称,对右半平面进行了建模。超级 V 型角尖端单元可用于计算孔洞的局部奇异性应力。需要指出的是,角尖端单元的节点总数可能随其大小和位置而变化。V 型角尖端  $o$  周围网格的细化如图 4 所示。然而,在传统的有限元分析中,需要采用精细网格来获得 V 型角尖端附近的奇异性弹性场。在 V 型角尖端处,细化后的单元边长最小尺寸约为  $10^{-5}l$ 。新型超级奇异性单元法在网格划分方面具有简捷性<sup>[41]</sup>。

各向异性材料的奇异性弹性场研究与各向同性材料大体相同,不同点在于弹性矩阵不再为定值,会随着高斯点的变化而变化<sup>[42]</sup>。

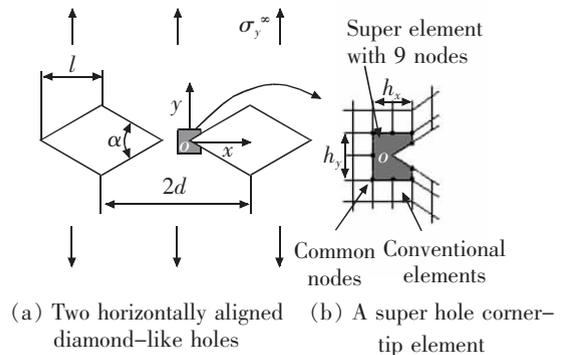


图3 拉伸载荷下两个水平排列的类钻石型孔洞  
Fig.3 Two horizontally arranged diamond-like holes under tensile load

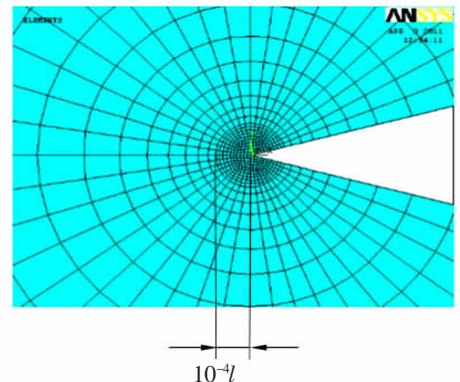


图4 类钻石型孔洞角尖端  $o$  附近的传统有限元网格  
Fig.4 Traditional finite element mesh near the corner tip  $o$  of the diamond-like hole

各向异性双材料楔形问题的广义应力强度因子表达式为<sup>[43]</sup>

$$K_{I1} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r}^{\operatorname{Re}(\lambda_1)} \{ \sigma_y \cos Q + [2W_1 \sigma_{xy} + W_2(\sigma_y + 2W_2 \sigma_{xy}) \sin Q] / W_1 \} \quad (9)$$

$$K_{II1} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r}^{\operatorname{Re}(\lambda_1)} \{ \sigma_{xy} \cos Q - (\sigma_y + 2W_2 \sigma_{xy}) \sin Q / 2W_1 \} \quad (10)$$

式中:  $W_1 = \frac{\sqrt{H_{11}H_{22}-h^2}}{2H_{22}}$ ,  $W_2 = \frac{h}{2H_{22}}$ ,  $Q = I_m(\lambda_1)l_m$

( $\frac{r}{2a}$ ), 其中  $H_{11}, H_{22}, h, 2a$  详细定义参见平学成等<sup>[43]</sup>;

$\sigma_y$  为笛卡尔坐标系下的正应力;  $\sigma_{xy}$  为笛卡尔坐标系下的切应力。

### 1.2 双材料楔形角尖端奇异单元

一般双材料楔形体如图 5 所示, 由两个楔形体组成。两个楔形沿公共边结合在一起, 该边构成一个界面。双材料楔形体尖端的奇异性应力场取决于两方面问题: ① 是双材料楔形体的结构; ② 是双材料之间的属性匹配关系。在求解奇异性应力场过程中, 双材料楔形体尖端的数值特征解与单相材料楔形体是不同的。

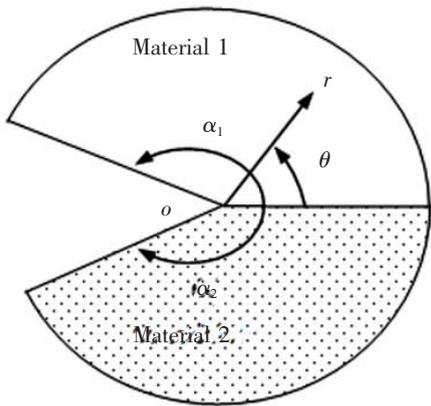


图 5 一般双材料楔形体

Fig.5 Definition of a general bimaterial wedge

值得注意的是, 楔形角尖端单元满足 LBB 准则: 应力参数个数, 也就是待定系数  $\beta_n$  的个数应大于或等于所有节点自由度总数减去混合单元的刚体模式<sup>[44]</sup>, 二维问题的刚体模式为 3。图 6 为建立的 9 节点双材料超级角尖端单元。对图 7 所示的单轴拉伸界面上带有楔形缺口的双材料面板进行处理, 楔形体尖端域采用一个双材料超级角尖端单元, 周围采用常规单元相结合。分析结果精确, 开发

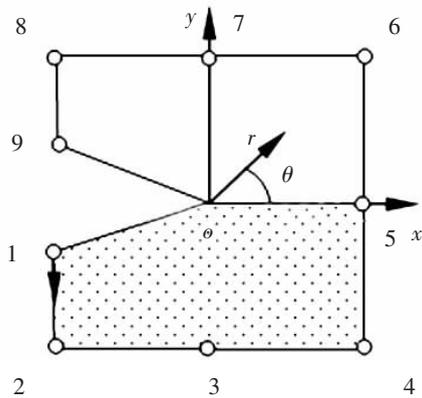


图 6 9 节点双材料超级角尖端单元

Fig.6 Definition of nine-node bimaterial super wedge-tip element

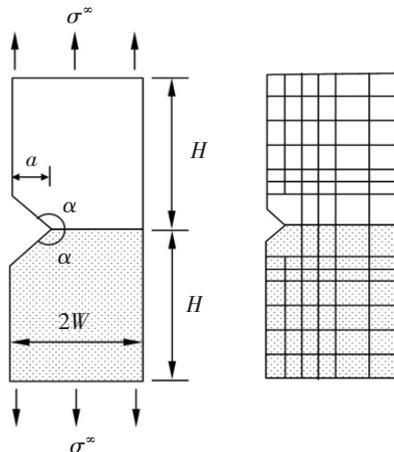


图 7 双材料楔形角问题的几何尺寸和网格划分

Fig.7 Geometry and mesh division for the bimaterial wedge problems

的双材料超级角尖端单元在处理楔形问题方面具有通用性和适用性<sup>[34]</sup>。

### 1.3 压电复合材料奇异单元

压电材料是具有压电特性的智能材料, 例如一般电子监控设备中的传感器材料中就包含压电材料。自 Parton<sup>[45]</sup>以来, 压电断裂力学的理论有一定发展, 然而在这些研究中有一个缺陷: 假定裂纹内部介质的介电常数为零, 而实际情况是电场可以自由导通。Scherzer 和 Kuna<sup>[46]</sup>分析了嵌入式智能复合材料的裂纹结构。在他们的研究中, 裂纹面间的电边界条件仍然局限于非导通条件。一般情况下, 对于裂纹力学与电学不同状态, 主要存在不导通、导通和有限导通三种边界条件。不导通或导通的边界条件可以看作是部分导通的极限情况。对于楔形裂纹, 发现如果开口楔形角大于  $3.5^\circ$ , 则空气的介电

常数可以忽略,也就是说,不导通条件的影响与导通边界条件的影响相同。

根据线弹性理论的应变位移关系和电场电势关系,可得到线性压电材料的本构方程<sup>[47]</sup>

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}(x,y) \\ \mathbf{D}(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & -k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}(x,y) \\ -\mathbf{E}(x,y) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

式中: $\boldsymbol{\sigma}(x,y)$ 为应力张量; $\boldsymbol{\varepsilon}(x,y)$ 为应变张量; $\mathbf{D}(x,y)$ 为电位移张量; $\mathbf{C}$ 为压电材料弹性常数矩阵; $\mathbf{E}(x,y)$ 为电场张量; $\mathbf{e}$ 为材料压电常数矩阵。

通过应力平衡方程、电荷守恒方程、应力自然及本质边界条件、电荷自然及本质边界条件求解平面压电材料的广义 H-R 变分泛函为

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_{V_n} (h_m + \boldsymbol{\sigma}(x,y)^T \nabla_m \mathbf{u}(x,y) + \\ & \mathbf{D}(x,y)^T \nabla_m \phi(x,y)) dV - \\ & \int_{\partial V_n} [(\mathbf{n}_m \boldsymbol{\sigma}(x,y))^T \{\mathbf{u}(x,y) - \bar{\mathbf{u}}(x,y)\}] dS - \\ & \int_{\partial V_n} [(\mathbf{n}_e \mathbf{D}(x,y))^T \{\phi(x,y) - \bar{\phi}(x,y)\}] dS \end{aligned} \quad (12)$$

式中: $\phi(x,y)$ 为电势函数;“—”代表边界上的参数; $h_m$ 为电荷密度; $\mathbf{n}_m$ 和 $\mathbf{n}_e$ 分别为外法线方向相关的矩阵和向量; $V_n$ 表示楔形角尖端附近二维域; $\partial V_n$ 表示二维邻域的边界; $\nabla_m$ 为微分算子。

楔形角尖端附近的渐近奇异电场可近似表示为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}(r,\theta) \\ \phi(r,\theta) \end{Bmatrix} = \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{N+M} \beta_n r^{\lambda_n} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^n(\theta) \\ \tilde{\phi}^n(\theta) \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}(r,\theta) \\ \mathbf{D}(r,\theta) \end{Bmatrix} = \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{N+M} \beta_n r^{\lambda_n} \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^n(\theta) \\ \tilde{\mathbf{D}}^n(\theta) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

式中: $\tilde{\mathbf{u}}^n(\theta)$ , $\tilde{\phi}^n(\theta)$ , $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^n(\theta)$ 和 $\tilde{\mathbf{D}}^n(\theta)$ 分别为对应特征值 $\lambda_n$ 的位移、电势、应力、电位移角分布函数; $N$ 为复特征值个数; $M$ 为实特征值个数; $\beta_n$ 为与特征值有关的待定系数。

针对材料裂纹尖端奇异性,应用超级角尖端混合元模型<sup>[34]</sup>,通过分部积分和散度定理处理 H-R 变分泛函,采用拉格朗日线性插值方法建立相邻节点间的形函数,使单元间位移和电势自动满足相容性。通过泛函 $\Pi$ 的驻值条件,得到压电材料超级角尖端单元的刚度矩阵 $\mathbf{K}_w$ 。建立包含部分角尖端的整个压电域的有限元代数方程,确定整体位移 $\mathbf{U}(x,y)$ 和电势 $\Phi(x,y)$ ,将超级角尖端单元进一

步推广到压电断裂力学中<sup>[48-50]</sup>。

图 8 为一个含 9 节点的超级角尖端单元,用以分析楔形体顶点处的应力场强度和电弹场强度。如图 9 所示为远场拉伸载荷 $\sigma_y^\infty$ 和电位移载荷 $D_y^\infty$ 下含中心裂纹试件,该裂纹为部分导通。由于对称,只考虑右半面板分析。单元划分采用传统单元和超级角尖端单元组合形式。沿正向 $x$ 轴(即 $x>0$ )的节点电势设为 0。通过奇异电场的数值解得到能量释放率,结果精确,并避免了在裂纹尖端划分高密度网格,提高了计算效率;通过裂纹尖端的应力强度因子和电位移强度因子结果发现,裂纹面电边界条件对 $K_I$ 和 $K_{II}$ 影响不大,而对电位移强度因子 $K_{IV}$ 有较大

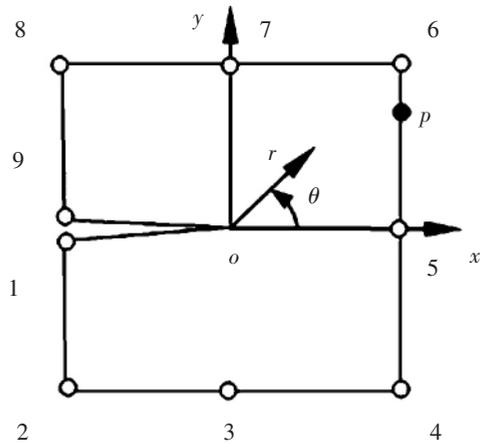


图 8 9 节点超级角尖端单元  
Fig.8 A nine-node super corner-tip element

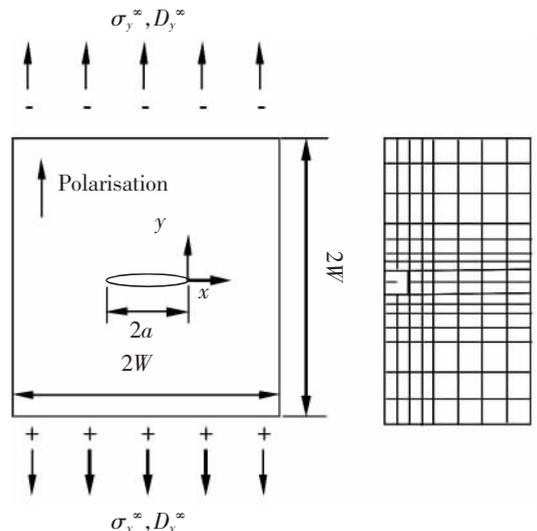


图 9 压电平板中心裂纹问题的几何模型和网格划分  
Fig.9 Geometry and mesh division for the central crack problem in a piezoelectric pane

影响,导通裂纹时,对应于IV型断裂模式的特征值 $\lambda_{IV}$ 不再呈现-0.5奇异性,表明电场奇异性很小<sup>[51]</sup>。

### 1.4 平面夹杂角尖端奇异单元

复合材料中,夹杂物的形状可以是圆形、椭圆形或其它不规则形。在制造或使用过程中,夹杂界面处往往会出现应力集中,裂纹可以在夹杂-基体界面或附近形核,影响耐久性。

为求解弹性材料中夹杂角的奇异弹性场,建立如图 10 所示的含部分夹杂角的超级  $n$  边形单元。将原始问题(图 10(a))分解为:在夹杂域  $\Omega_2$  中的混合边界条件为  $C_2, \Gamma_A$  和  $\Gamma_B$ (图 10(b));在基体域  $\Omega_1$  中的混合边界条件为  $C_1, \Gamma_A$  和  $\Gamma_B$ (图 10(c))。同样,根据 H-R 原理,利用散度定理定义以下两个单独的混合泛函<sup>[52]</sup>

$$\pi_m^e = \frac{1}{2} \int_{C_1} \mathbf{t}_m^T \mathbf{u}_m dS - \int_{C_1} \mathbf{t}_m^T \tilde{\mathbf{u}}^1 dS + \int_{\Gamma_A + \Gamma_B} (\tilde{\mathbf{t}}^1)^T \mathbf{u}_m dS - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_A + \Gamma_B} \mathbf{t}_m^T \mathbf{u}_m dS \quad (15)$$

$$\pi_I^e = \frac{1}{2} \int_{C_2} \mathbf{t}_I^T \mathbf{u}_I dS - \int_{C_2} \mathbf{t}_I^T \tilde{\mathbf{u}}^2 dS + \int_{\Gamma_A + \Gamma_B} (\tilde{\mathbf{t}}^2)^T \mathbf{u}_I dS - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_A + \Gamma_B} \mathbf{t}_I^T \mathbf{u}_I dS \quad (16)$$

式中: $\tilde{\mathbf{u}}^1, \tilde{\mathbf{u}}^2$  分别为从单位位移  $\mathbf{u}$  分离出的边界位移; $\tilde{\mathbf{t}}^1, \tilde{\mathbf{t}}^2$  分别为内部应力边界条件。 $C_1, C_2$  是夹杂角单元的外部边界条件; $\Gamma_A, \Gamma_B$  是夹杂域和基体域之间的内部边界条件; $\mathbf{t}_m$  为边界牵引向量; $\mathbf{u}_m$  为边界位移向量。

为了从两个分解问题的解中恢复原问题的解,需要在边界  $\Gamma_A$  和  $\Gamma_B$  施加牵引交换条件和位移协调条件

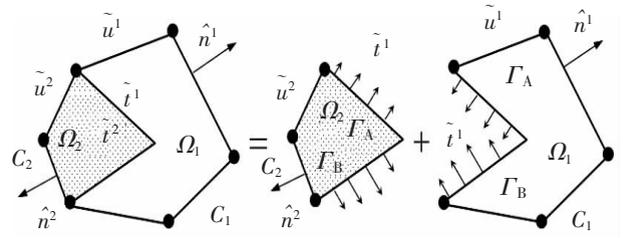
$$\mathbf{u}_I = \mathbf{u}_m, \mathbf{t}^1 = -\mathbf{t}^2, \mathbf{t}_m = -\mathbf{t}_I \quad (17)$$

用  $\mathbf{t}$  代替  $\mathbf{t}_m, \mathbf{t}^1, \mathbf{t}^2, \mathbf{u}$  代替  $\mathbf{u}_m, \mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$ , 令  $C = C_1 + C_2$ , 整理上式得到

$$\pi^e = \frac{1}{2} \int_C \mathbf{t}^T \mathbf{u} dS - \int_C \mathbf{t}^T \tilde{\mathbf{u}} dS \quad (18)$$

利用弹性材料夹杂角附近渐进位移和应力的一般表达式进而得到超级夹杂角尖端单元的刚度矩阵。超级夹杂角尖端单元用于近场区域的建模,并与远场区域的传统 4 节点单元结合,最终得到夹杂角附近的奇异性应力场<sup>[53-54]</sup>。

图 11 为在平面应力条件下,受拉伸和剪切荷载下包含矩形夹杂物的各向同性无限平板。图 12



(a) Original question (b) Inclusion domain (c) Matrix domain

图 10 单元分解

Fig.10 Element decomposition

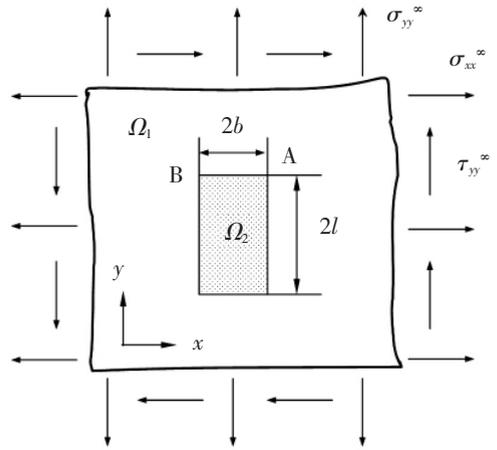


图 11 夹杂物形态

Fig.11 Configuration of inclusions

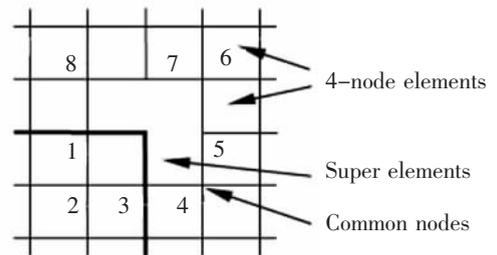


图 12 矩形夹杂角周围的网格划分

Fig.12 Configuration of mesh division around a rectangular corner

为矩形夹杂角附近网格划分的构型。由于几何形状和载荷的对称性,有限元网格划分只需要几何形状的 1/4。在数值计算中,可以结合使用一个超级夹杂角尖端单元和 285 个常规 4 节点四边形单元。相对于传统有限元,超级夹杂角尖端单元法能够节省夹杂尖端的网格数量,方便建立模型,提高计算效率。研究得到的无量纲应力强度因子数值结果具有精确性<sup>[55]</sup>;对于单矩形夹杂物问题,当  $l/b > 10$  时,可以

忽略  $l/b$  对广义强度因子的影响, 将矩形夹杂物视为纤维。

### 1.5 热-机载荷下的奇异单元

热-机载荷下由于材料弹性特性和热膨胀系数不匹配, 在制造或使用期间材料界面处通常会出现高度集中的应力<sup>[56]</sup>。

#### 1.5.1 热载荷下的等效奇异性应力场

对于由于温度变化而引起的奇异热应力场的变化问题, 首先需要从物理角度出发, 分析机械载荷与热载荷的关系, 然后计算机械载荷作用下奇异性应力场, 以及等效热载荷下的奇异热应力场。

如图 13 所示: ① 机械载荷  $\sigma_0$  和温度变化  $\Delta T$  下的无限基体平板与夹杂平板(图 13(a)); ② 切割某形状夹杂, 嵌入去除同形状基体平板的孔洞中, 保持满足力学平衡条件和位移协调条件(图 13(b)); ③ 反向施加载荷  $\sigma_0$ (图 13(c))。

经分析可知, 在边界自由、界面全结合、温度均匀变化的条件下, 夹杂角尖端奇异性应力场为

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta)|_{\Delta T} &= -\frac{K_{I, \lambda_1} |\sigma_0|}{r} f_r^I(\theta) - \frac{K_{II, \lambda_2} |\sigma_0|}{r} f_r^{II}(\theta) + \sigma_0 \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta)|_{\Delta T} &= -\frac{K_{I, \lambda_1} |\sigma_0|}{r} f_{\theta\theta}^I(\theta) - \frac{K_{II, \lambda_2} |\sigma_0|}{r} f_{\theta\theta}^{II}(\theta) + \sigma_0 \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta)|_{\Delta T} &= -\frac{K_{I, \lambda_1} |\sigma_0|}{r} f_{r\theta}^I(\theta) - \frac{K_{II, \lambda_2} |\sigma_0|}{r} f_{r\theta}^{II}(\theta) \end{aligned} \right. \quad (19)$$

式中:  $(r, \theta)$  为以夹杂角顶点  $o$  为原点的极坐标;  $\sigma_0$  为机械载荷;  $K_{I, \lambda_1} |\sigma_0|$  和  $K_{II, \lambda_2} |\sigma_0|$  为  $\sigma_0$  产生的 I 型和 II 型奇异性应力场强度因子;  $f_r^I(\theta)$ ,  $f_r^{II}(\theta)$  等分别为对应的 I 型和 II 型应力角分布函数;  $\lambda_1, \lambda_2$  分别为对应的 I 型和 II 型应力奇异指数。

由温度变化带来的奇异热应力场变化值等于远场机械载荷  $\sigma_0$  导致的奇异性应力和非奇异性项相加,  $\sigma_{r\theta}$  没有附加常数项。温度变化产生热应力场的等效远场机械载荷为<sup>[57]</sup>

$$\sigma_0^e = \frac{4\mu_1\mu_2(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T}{\mu_1(k_2 - 1) - \mu_2(k_1 - 1)} \quad (20)$$

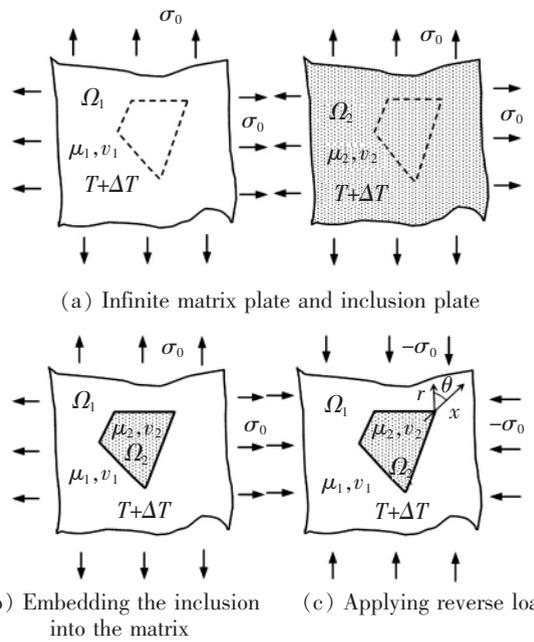


图 13  $\Delta T$  下的热应力场变化

Fig.13 Change of thermal stress field under  $\Delta T$

式中:  $\mu_1, \alpha_1, k_1$  为基体材料参数, 包括剪切模量, 热膨胀系数, 杨氏弹性模量;  $\mu_2, \alpha_2, k_2$  为夹杂材料参数;  $\Delta T$  为变化温度。

对于夹杂尖端部奇异性热应力场分析, 可以直接利用超级夹杂角尖端奇异单元法分析的机械载荷作用下奇异性应力场数值结果, 计算奇异性热应力场数值解<sup>[57]</sup>。

#### 1.5.2 热-机载荷下的超级楔形角尖端单元

在线性弹性理论中, 温度变化下的本构方程与纯机械载荷下的本构方程不同。在热机械载荷下, 双材料楔形体中的应力和位移场可以写为

$$\sigma_p^k = {}^m\sigma_p^k + {}^\lambda\sigma_p^k + {}^t\sigma_p^k \quad (21)$$

$$u_p^k = {}^m u_p^k + {}^\lambda u_p^k + {}^c u_p^k \quad (22)$$

式中:  $m$  和  $t$  分别为机械载荷和热载荷;  ${}^\lambda\sigma_p^k$ ,  ${}^\lambda u_p^k$  和  ${}^\lambda u_p^k$  分别是与奇异性特征值相关的应力场和位移场;  ${}^c\sigma_p^k$ ,  ${}^c u_p^k$  分别是与非奇异性特征值相关的应力场和位移场。

机械和热载荷下不同材料的超级楔形角尖端单元的刚度矩阵由以下势能函数<sup>[58]</sup>推导出

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{A_k} (\boldsymbol{\varepsilon}^k)^T \mathbf{C}^k \boldsymbol{\varepsilon}^k dA - \int_{A_k} (\boldsymbol{\varepsilon}^k)^T \mathbf{C}^k \boldsymbol{\varepsilon}^k dA - \int_{\hat{V}_k} (\mathbf{t}^k)^T (\mathbf{u}^k - \hat{\mathbf{u}}^k) dS \quad (23)$$

式中:  $\mathbf{C}^k$  为笛卡尔坐标系中的弹性矩阵;  $\mathbf{t}^k$  和  $\hat{\mathbf{u}}^k$  分

别为沿公共边界线  $\hat{F}_k$  的牵引向量和位移向量;  $(\boldsymbol{\varepsilon}^k)^T$  为均匀温度变化下的自由应变矢量。

均匀温度变化  $\Delta T$  下的自由应变矢量  $\boldsymbol{\varepsilon}^k$  定义为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^k = \alpha_k \Delta T \boldsymbol{\delta} \quad (24)$$

式中:  $\boldsymbol{\delta}$  为克罗内克函数;  $\alpha_k$  为热膨胀系数。

笛卡尔坐标中的总位移、应变和牵引分量  $\mathbf{u}^k, \boldsymbol{\varepsilon}^k$  和  $\mathbf{t}^k$  分解为

$$\mathbf{u}^k = {}_m \lambda \mathbf{u}^k + {}_{\lambda+c} \mathbf{u}^k \quad (25)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^k = {}_m \lambda \boldsymbol{\varepsilon}^k + {}_{\lambda+c} \boldsymbol{\varepsilon}^k \quad (26)$$

$$\mathbf{t}^k = n ({}_m \lambda \boldsymbol{\sigma}^k + {}_{\lambda+c} \boldsymbol{\sigma}^k) \quad (27)$$

式中:  ${}_m (\cdot)^k$  为由于机械载荷引起的矢量;  ${}_{\lambda+c} (\cdot)^k$  为由于温度变化引起的矢量;  $\lambda+c$  表示变量的奇异项和非奇异项之和。

利用叠加原理, 泛函  $\Pi$  可以表示为

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \mathbf{q}_s^T \cdot \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{q}_s - \mathbf{q}_s^T \cdot \mathbf{F} + \frac{1}{2} {}_t \mathbf{f}^T \cdot (\mathbf{H}')^{-1} \cdot {}_t \mathbf{f} + \Pi_0 + \\ & \frac{1}{2} \mathbf{q}_c^T \cdot \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{q}_c - \mathbf{q}_c^T \cdot \mathbf{F}_c - \mathbf{q}_c^T \cdot {}_m \mathbf{F}_c \end{aligned} \quad (28)$$

式中:  $\mathbf{q}_s$  和  $\mathbf{q}_c$  分别为超级楔角尖端单元和常规单元的公共节点位移向量;  $\mathbf{K}_s$  和  $\mathbf{K}_c$  分别为超级楔角尖端单元和常规单元的单元刚度矩阵;  $\mathbf{F}_c$  为热载荷引起的节点反作用力向量;  ${}_m \mathbf{F}_c$  为常规单元的边界牵引力向量;  $\mathbf{H}, \mathbf{f}$  为自定义矩阵<sup>[59]</sup>;  $\Pi_0$  为热负荷下的与位移和应力相关的总电势。

为了组装超级楔形角尖端单元和常规单元, 令边界线处的节点对应的位移具有连续性。对泛函  $\Pi$  进行变分导出下式, 进而求解节点位移  $\mathbf{q}_c$  和热-机载荷下的奇异性应力场。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & (\mathbf{K}_{jj} + \mathbf{K}_c) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{ci} \\ \mathbf{F}_{cs} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} {}_m \mathbf{F}_{ci} \\ {}_m \mathbf{F}_{cs} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

式中:  $\mathbf{q}_i$  为除边界之外传统单元的节点位移矢量;  $\mathbf{F}_{ci}$  和  $\mathbf{F}_{cs}$  分别为  $\mathbf{F}_c$  的分量;  ${}_m \mathbf{F}_{ci}$  和  ${}_m \mathbf{F}_{cs}$  分别为  ${}_m \mathbf{F}_c$  的分量;  $\mathbf{K}_{ii}, \mathbf{K}_{ij}, \mathbf{K}_{ji}$  分别为  $\mathbf{K}_{jj}$  常规单元的单元刚度矩阵  $\mathbf{K}_c$  的分量。

图 14 为超级楔形角尖端单元,  $\hat{\mathbf{t}}^1$  和  $\hat{\mathbf{t}}^2$  为边界牵引量,  $\hat{\mathbf{u}}^1$  和  $\hat{\mathbf{u}}^2$  为边界位移量。图 15 为温度变化  $\Delta T$  下的  $90^\circ \sim 150^\circ$  双材料楔形体, 以及奇点  $o$  周围网格划分的情况。如图 15 所示, 在楔形角尖端采用一个超级单元, 周围采用传统单元。图中列出了两种类型具有不同节点数和边长的超级楔形角尖端

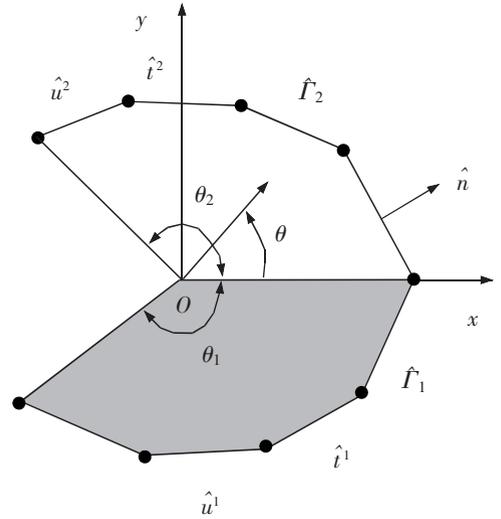


图 14 超级楔形角尖端单元

Fig.14 The super wedge-tip element

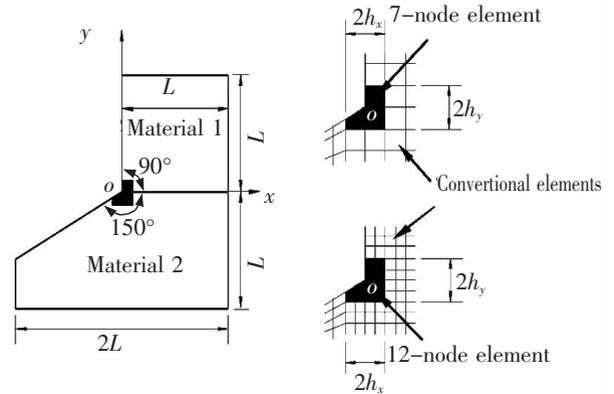


图 15 具有  $90^\circ \sim 150^\circ$  粘合楔形角结构

Fig.15 The structure with a  $90^\circ \sim 150^\circ$  bonded wedge

单元: 7 节点单元和 12 节点单元。奇异性应力场分析结果对超级楔形角尖端单元节点的数量或大小不敏感, 数值结果具有稳定性和收敛性<sup>[59]</sup>。

### 1.5.3 热-机载荷下的超级夹杂角尖端单元

热-机械载荷作用下夹杂角尖端附近的奇异性应力场可以通过使用超级夹杂角尖端单元和混合应力单元来获得。如图 16 为夹杂附近的局部坐标系,  $x$  轴位于夹杂角分线上,  $\Omega_1$  为基体域,  $\Omega_2$  为夹杂域。热-机载荷下夹杂角尖端附近奇异性应力场的特征解与应力平衡条件、牵引交换条件和相容条件有关。

应力平衡条件为

$$\frac{\partial r \sigma_r^k}{\partial r} + \frac{\partial r \tau_{r\theta}^k}{\partial \theta} - \sigma_\theta^k = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial \sigma_\theta^k}{\partial \theta} + \frac{\partial r \tau_{r\theta}^k}{\partial r} - \tau_{r\theta}^k = 0 \quad (31)$$

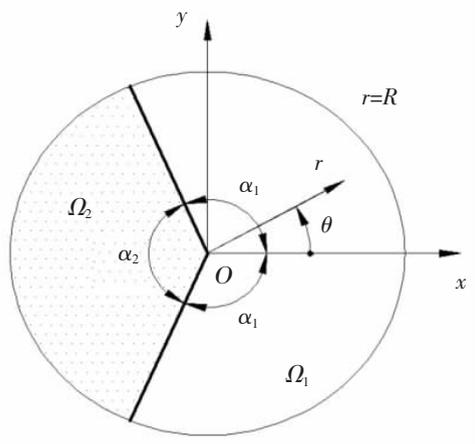


图 16 夹杂附近的局部坐标系

Fig.16 Local coordinate system near the inclusion

牵引交换条件为

$$\begin{aligned} (\sigma_\theta^1 - \sigma_\theta^2)|_{\theta=\alpha_1+\alpha_2} &= (\sigma_\theta^1 - \sigma_\theta^2)|_{\theta=\alpha_1} \\ &= (\tau_{r\theta}^1 - \tau_{r\theta}^2)|_{\theta=\alpha_1+\alpha_2} = (\tau_{r\theta}^1 - \tau_{r\theta}^2)|_{\theta=\alpha_1} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

相容条件为

$$(u_p^1 - u_p^2)|_{\theta=\alpha_1+\alpha_2} = (u_p^1 - u_p^2)|_{\theta=\alpha_1} = 0 \quad (33)$$

根据以上条件，热-机载荷下夹杂尖端附近的控制方程表达为

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^k)^T \boldsymbol{\sigma}_p^k d\Omega - R \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \left[ (\delta \mathbf{u}_p^1)^T \begin{Bmatrix} \sigma_r^1 \\ \tau_{r\theta}^1 \end{Bmatrix} \right]_{|r=R} d\theta \\ - R \int_{\alpha_1}^{\alpha_1+\alpha_2} \left[ (\delta \mathbf{u}_p^2)^T \begin{Bmatrix} \sigma_r^2 \\ \tau_{r\theta}^2 \end{Bmatrix} \right]_{|r=R} d\theta = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

式中： $\boldsymbol{\varepsilon}_p^k, \boldsymbol{\sigma}_p^k$  分别为局部坐标系中应变矢量和应力矢量； $\mathbf{u}_p^1, \mathbf{u}_p^2$  分别为夹杂域和基体域的位移矢量； $\alpha_1, \alpha_2, \theta, R$  的代表意义如图 16 所示。

从某种意义上说，上式中第 2 项和第 3 项是由位移而不是规定的牵引边界条件导出，它与传统的虚功原理是不同的。如图 17 为一个  $n$  边型超级夹杂角尖端单元。根据热-机载荷下夹杂角特征解建立插值函数。建立的超级夹杂角尖端单元，能够保证超级单元和常规单元间公共节点的位移连续性。图 18 为热载荷下含矩形夹杂物的矩形单胞，均匀变化的温度为  $\Delta T=100\text{ }^\circ\text{C}$ 。在夹杂角尖端采用一个超级夹杂角尖端单元，周围采用传统单元。如图所示利用 2 种超级单元来分析奇异性应力场：8 节点单元和 16 节点单元。2 种超级单元尺寸  $h_x=h_y=0.05l_1$ ； $h_x=h_y=0.1l_1$ ，分析的奇异性应力场对超级夹杂角尖端单元的节点数量和单元尺寸不敏感，并且在粗网格的情况下能够提供令人满意的结果<sup>[60-62]</sup>。

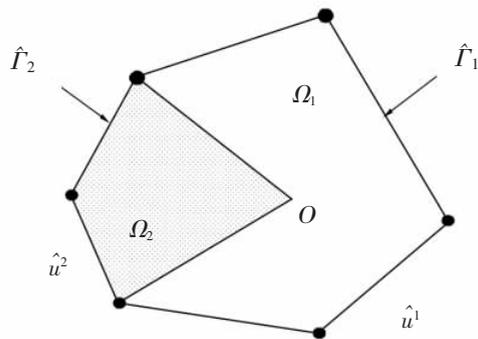


图 17  $n$  边型超级夹杂角尖端单元

Fig.17 Super  $n$ -sided polygonal inclusion corner-tip element

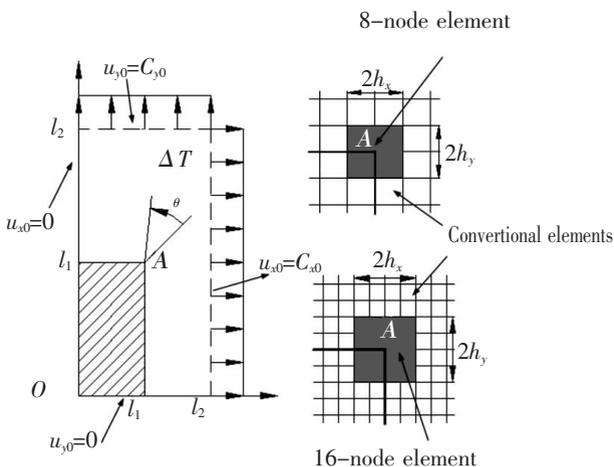


图 18 热载荷下含矩形夹杂物的矩形单胞

Fig.18 Rectangular unit cell containing a rectangular inclusion for pure thermal loads

## 2 三维楔形角尖端奇异单元

三维角部尖端问题所带来的数学困难远远大于二维角部尖端问题。与二维问题不同的是，三维角部尖端附近的渐近场包含了 3 种断裂模式。目前三维问题研究的目标之一是解决角部前沿奇异性应力场。为此，基于 H-R 变分原理，提出一种新的包含部分角尖端的超级奇异三维单元。由于解析本征解通常应用于简单构型，数学推导过程较复杂，可以采用广义平面应变问题的一维有限元公式求解三维位移场和应力场强度。

### 2.1 包含直线角线的三维角构型奇异单元

如图 19(a)所示为包含恒定二面角直边的三维均匀线弹性实体。在这种情况下，一个沿直线角前沿的特定直线坐标  $z$  轴可以代替一般曲线角问题的曲线坐标。依据 Sze 和 Wang<sup>[63]</sup>，任何法向平面的渐近位移和应力场可以由二维广义平面应变解推

导而得。根据控制方程的弱形式,由有限元特征分析方法来确定特征值<sup>[64]</sup>。

$$\mathbf{u}(r, \theta) = \Re e \left\{ \sum_{n=1}^{N+M} r^{\lambda_{n+1}} \bar{\mathbf{u}}^n(\theta) \beta_n \right\} = \Re e \left\{ \sum_{n=1}^{N+M} \mathbf{U}_n \beta_n \right\} \quad (35)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(r, \theta) = \Re e \left\{ \sum_{n=1}^{N+M} r^{\lambda_n} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^n(\theta) \beta_n \right\} = \Re e \left\{ \sum_{n=1}^{N+M} \boldsymbol{\sigma}_n \beta_n \right\} \quad (36)$$

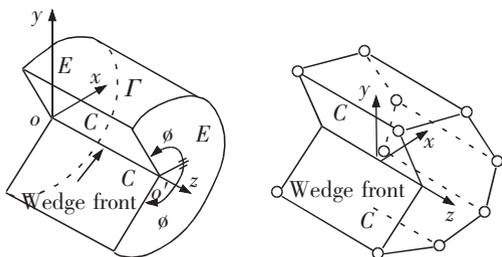
式中:  $\mathbf{u}(r, \theta)$  包含的位移分量为  $u_r, u_\theta, u_z$ ;  $\boldsymbol{\sigma}(r, \theta)$  包含的应力分量为  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}, \sigma_{\theta z}$ ;  $\Re e \{ \}$  表示取复数的实部;  $\lambda_n$  为特征值;  $N$  为复数特征值个数,  $M$  为实数特征值个数;  $\beta_n$  为未知应力强度系数, 其与远场边界和载荷条件有关;  $\bar{\mathbf{u}}^n(\theta), \bar{\boldsymbol{\sigma}}^n(\theta)$  分别为位移和应力角分布函数;  $\mathbf{U}_n$  是位移级数向量表达式的第  $n$  项。

如图 19(b) 所示, 为确定弹性材料中未知系数  $\beta_n$  和计算围绕角尖端奇异弹性场, 在笛卡尔坐标系中采用包含部分角尖端域的超级  $n$  边单元。根据 Zhang 和 Katsube<sup>[20]</sup> 定义角尖端单元域问题的混合泛函形式

$$\begin{aligned} \pi = & \int_{\Omega} (-\boldsymbol{\sigma}(x, y, z)^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}(x, y, z) / 2 + \\ & \boldsymbol{\sigma}(x, y, z)^T \Delta \mathbf{u}(x, y, z)) d\Omega - \\ & \int_{\Gamma} \mathbf{t}^n(\mathbf{u}(x, y, z) - \tilde{\mathbf{u}}(x, y, z)) dA \end{aligned} \quad (37)$$

式中:  $\mathbf{u}(x, y, z), \boldsymbol{\sigma}(x, y, z), \mathbf{t}(x, y, z)$  为位移向量, 应力向量, 边界牵引矢量;  $\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z)$  为边界位移向量;  $\mathbf{S}$  为弹性柔度矩阵;  $\Delta$  为连系应力和位移的微分算子;  $\Omega$  为角部前沿单元域。

为求解泛函的驻值, 构造应力和位移场, 通过散度定理进行泛函简化<sup>[64]</sup>。在三维问题中,  $\beta_n$  随  $z$  值的变化而变化。引入新的自然坐标建立三维角尖端



(a) 3D corner front domain (b) Definition of a 3D super corner-tip element

图 19 包含直线条线的三维角构型奇异单元  
Fig.19 Three-dimensional angular configuration singular element containing straight corners

等参单元。通过极坐标和笛卡尔坐标的位移和应力转换, 利用  $\delta\pi=0$  得到公式

$$\pi = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\delta}}^T \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \bar{\boldsymbol{\delta}} \quad (38)$$

式中:  $\bar{\boldsymbol{\delta}}$  为边界上的节点位移矢量;  $\mathbf{G}, \mathbf{H}$  为三维角构型奇异单元外边界面上的积分

$$\mathbf{G} = \int_{\Gamma} (\mathbf{nZ}_o \boldsymbol{\Sigma}_c)^T \mathbf{N} dA \quad (39)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [(\mathbf{nZ}_o \boldsymbol{\Sigma}_c)^T \mathbf{U}_c + \mathbf{U}_c^T (\mathbf{nZ}_o \boldsymbol{\Sigma}_c)] dA \quad (40)$$

式中:  $\mathbf{N}$  为 4 节点单元形函数矩阵;  $\mathbf{Z}_o$  为极坐标和笛卡尔坐标之间的应力转换矩阵;  $\boldsymbol{\Sigma}_c, \mathbf{U}_c$  分别为自定义插值位移和应力矩阵<sup>[64]</sup>;  $\mathbf{n}$  为单元边界面上的外法线向量矩阵。

三维角构型奇异单元的刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \quad (41)$$

图 20 所示为沿厚度方向有阶跃变化的复合材料层压板。图 21 展示了两种具有不同三维角构型奇异单元的网格划分形式。图 21(a) 和图 21(b) 分别包含一个 14 节点和一个 26 节点的奇异单元。两种模式的单元尺寸不同, 但分析结果令人满意, 而相同区域内, Pageau 和 Biggers<sup>[7]</sup> 则需要一个包含 182 个集中单元才能获得满意的结果。三维角构型奇异单元比集中单元的数量要少, 具有高效性。应用建立的三维角构型奇异单元, 还可以分析三维贯穿中心裂纹问题、三维单边裂纹问题和三维对接接头问题的奇异性应力场<sup>[64]</sup>。

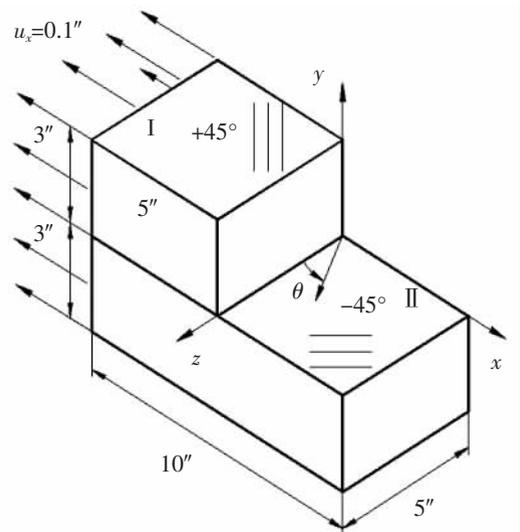


图 20 厚度有阶梯变化的复合材料层压板  
Fig.20 Composite laminate with step change in thickness

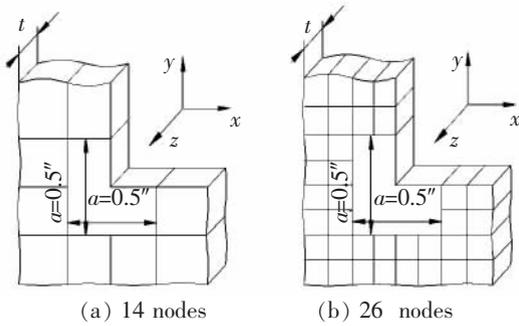


图 21 两种不同的超级三维角尖端单元网格

Fig.21 Meshes with two difference kinds of 3D corner-tip elements

2.2 三维曲线裂纹前沿奇异单元

在疲劳裂纹扩展过程中,裂纹前沿通常为曲线形状(如圆形裂纹或椭圆裂纹),必须考虑裂纹问题的三维特征<sup>[65]</sup>。Ayhan 等<sup>[66]</sup>采用三维富集有限元计算了曲线裂纹的应力强度因子,模拟了疲劳裂纹扩展,而利用富集有限元必须面临 3 个困难:①数值结果仍然取决于特殊单元的大小;②由于节点处的自由度不同,不能满足特殊单元与常规单元之间的单元间兼容性,通常需要过渡单元将特殊元素与常规单元结合起来;③级数解的阶项不包含刚体运动模式,在常规有限元方法中必须与位移插值一起使用。

基于奇异性位移场和应力场的数值特征解和 H-R 变分原理,建立包含部分三维曲线裂纹前沿的奇异单元,可以求解包括应力奇点阶数、位移角和应力角变化在内的数值系列特征解,用于三维实体中的硬币形裂纹、圆柱体中的周向裂纹和无限体中的椭圆裂纹等问题分析<sup>[67]</sup>。在曲线裂纹前沿附加的笛卡尔  $(x, y, z)$  和圆柱坐标  $(r, \theta, z)$  中建立局部曲线坐标系  $(\rho, \phi, \theta)$ ,可以方便地描述裂纹前沿附近的局部变形行为。对于裂纹尖端的弹性渐近场可表示为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(\rho, \phi, \theta) &= \Re e \left\{ \sum_{n=1}^{N+M} \rho^{\lambda_{n+1}} \mathbf{u}^n(\phi) \beta_n \right\} \\
 &= \Re e \left\{ \sum_{n=1}^{N+M} \mathbf{u}^n(\rho, \phi) \beta_n \right\} \quad (42)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}(\rho, \phi, \theta) &= \Re e \left\{ \sum_{n=1}^{N+M} \rho^{\lambda_n} \overline{\boldsymbol{\sigma}}^n(\theta) \beta_n \right\} \\
 &= \Re e \left\{ \sum_{n=1}^{N+M} \boldsymbol{\sigma}^n(\rho, \phi) \beta_n \right\} \quad (43)
 \end{aligned}$$

式中:  $\mathbf{u}(\rho, \phi, \theta)$  包含的位移分量为  $u_\rho, u_\phi, u_\theta$ ;  $\boldsymbol{\sigma}(\rho, \phi, \theta)$  包含的应力分量为  $\sigma_\rho, \sigma_\phi, \sigma_\theta, \sigma_{\rho\phi}, \sigma_{\rho\theta}, \sigma_{\phi\theta}$ 。 $\overline{\mathbf{u}}^n(\phi)$ ,  $\overline{\boldsymbol{\sigma}}^n(\theta)$  分别为位移和应力角分布函数;  $\mathbf{u}^n(\rho, \phi)$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^n(\rho, \phi)$  分别是位移级数向量表达式和应力级数向量表达式的第  $n$  项。

一般来说,沿任意曲线裂纹前沿不同法向面上的奇异性位移场和应力场的强度不是恒定的。为了解决三维效应的影响,建立如图 22 所示的三维曲线裂纹前沿奇异单元。单元域由两个端面  $\Gamma_c$  和一定数量的周向面  $\Gamma_\theta$  包围。在三维曲线裂纹前沿奇异单元中,需要引入另一个自然坐标  $\eta$  来表示裂纹前沿法平面  $\rho-\theta$ 。此外,还需定义用于离散化裂纹前沿位移和应力角变化的自然坐标  $\xi$ 。因而系数向量  $\boldsymbol{\beta}$  可以被认为  $\eta$  的线性函数。在局部三维坐标系  $(\rho, \phi, \theta)$  定义位移和应力函数

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(\rho, \phi, \theta) &= \mathbf{u}_1(\rho, \phi, \theta) + \mathbf{u}_2(\rho, \phi, \theta) \\
 &= (1-\eta)/2 \cdot \mathbf{U}\boldsymbol{\beta}_1 + (1+\eta)/2 \cdot \mathbf{U}\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{U}_c \boldsymbol{\beta}_c \quad (44)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}(\rho, \phi, \theta) &= \boldsymbol{\sigma}_1(\rho, \phi, \theta) + \boldsymbol{\sigma}_2(\rho, \phi, \theta) \\
 &= (1-\eta)/2 \cdot \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\beta}_1 + (1+\eta)/2 \cdot \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\Sigma}_c \boldsymbol{\beta}_c \quad (45)
 \end{aligned}$$

式中:  $\boldsymbol{\beta}_1, \mathbf{u}_1(\rho, \phi, \theta), \boldsymbol{\sigma}_1(\rho, \phi, \theta)$  是  $\eta=-1$  对应的分量;  $\boldsymbol{\beta}_2, \mathbf{u}_2(\rho, \phi, \theta), \boldsymbol{\sigma}_2(\rho, \phi, \theta)$  是  $\eta=1$  对应的分量。

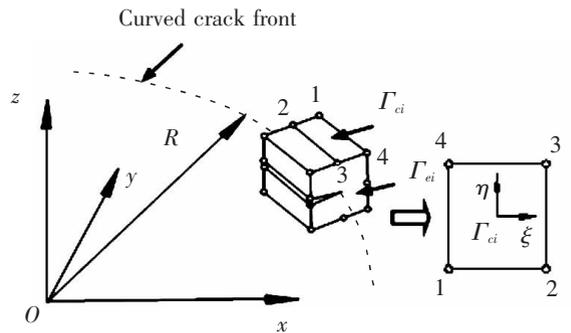


图 22 包含部分曲线裂纹前沿的超级单元

Fig.22 A super element containing a part of the curved crack front

为了获得三维曲线裂纹前沿奇异单元的刚度矩阵,需要利用 H-R 变分的驻值和散度定理,通过位移边界条件求解<sup>[67]</sup>。图 23 为承受扭转载荷下的含硬币形裂纹。为了清楚地说明裂纹前沿附近的网格划分,图 24 中绘制了模型的四分之一,在这种情况下,沿裂纹前沿分布一定数量的超级 18 节点三维曲线裂纹前沿奇异单元,其周围是传统的三维 8 节点单元。当单元尺寸小于或等于  $0.02a \times 0.02a$  且单元数大于 30 时,数值结果可以趋于收敛。分析周向

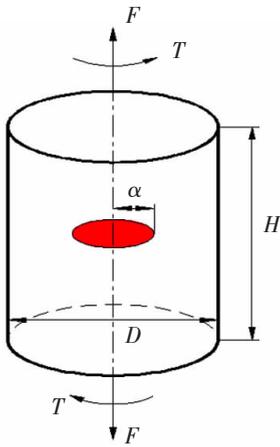


图 23 扭转作用下的币状裂纹

Fig.23 A penny-shaped crack problem subjected to torsion loading

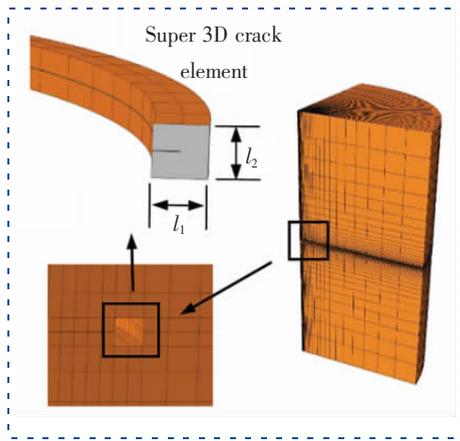


图 24 币状裂纹的网格划分

Fig.24 Mesh division for the penny-shaped crack problem

裂纹问题的应力强度因子表明,当使用超过 30 个单元时,即使应用尺寸为  $0.1a \times 0.1a$  的奇异单元也足以得到收敛解<sup>[67]</sup>。

### 2.3 三维 V 型缺口前沿奇异单元

大多数情况下,缺陷端部通常不是圆形或椭圆形。在孔边可能出现 V 型角引起的局部奇异应力导致严重的损伤或疲劳断裂。三维 V 型角前沿奇异场的研究与三维裂纹奇异场研究原理相似,但与 Griffith 裂纹问题不同的是,V 型角的应力奇点数值特征解一般不等于 -0.5,奇异性应力场也随夹角的变化而变化。如图 25(a)为三维类钻石型缺陷。为了求解三维 V 型角附近的三维奇异性应力场和相应的高阶项级数解,采用广义平面应变问题的特殊有限元方法<sup>[63]</sup>,在局部坐标系中确定数值特征解。通过

该方法可以得到应力奇异性的阶数  $\lambda_n$ ,以及位移和应变的角变函数  $u^n(\phi, \theta)$  和  $\epsilon^n(\phi, \theta)$ 。

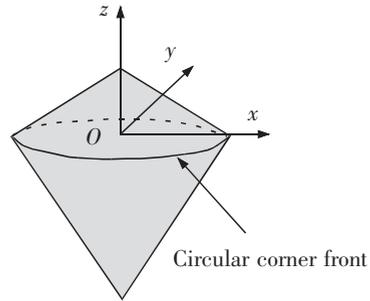
局部坐标系中 V 型角前沿的位移场  $u(\rho, \phi, \theta)$  和应力场  $\sigma(\rho, \phi, \theta)$  的一般表达式为

$$\begin{aligned} u(\rho, \phi, \theta) &= \Re e \left\{ \sum_{n=1}^{N+M} \rho^{\lambda_{n+1}-} u^n(\phi, \theta) \beta_n \right\} \\ &= \Re e \left\{ \sum_{n=1}^{N+M} u^n(\rho, \phi, \theta) \beta_n \right\} \end{aligned} \quad (46)$$

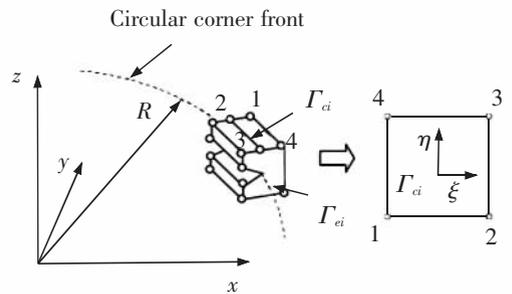
$$\begin{aligned} \sigma(\rho, \phi, \theta) &= D \Re e \left\{ \sum_{n=1}^{N+M} \rho^{\lambda_{n+1}-} \epsilon^n(\phi, \theta) \beta_n \right\} \\ &= D \Re e \left\{ \sum_{n=1}^{N+M} \epsilon^n(\rho, \phi, \theta) \beta_n \right\} \end{aligned} \quad (47)$$

式中  $\beta_n$  为应力强度参数;  $D$  为线弹性材料的弹性常数矩阵;  $\bar{u}^n(\phi, \theta)$ ,  $\bar{\epsilon}^n(\phi, \theta)$  分别为位移和应变角分布函数;  $u^n(\rho, \phi, \theta)$ ,  $\epsilon^n(\rho, \phi, \theta)$  是位移级数向量和应变级数向量的第  $n$  项。

在任意外载荷作用下,V 型角前沿的应力强度不是恒定的。如图 25(b)所示可以建立三维 V 型缺口前沿奇异单元来解决目前的三维 V 型缺口问题。利用局部坐标系下的位移和应力函数,得到 H-R 变分泛函和三维 V 型缺口前沿奇异单元的刚度矩阵<sup>[68]</sup>。



(a) A 3D diamond-like defect



(b) Definition of a 3D V notch front singular element

图 25 三维 V 型缺口问题  
Fig.25 Three-dimensional V-notch problem

为了将传统单元与三维 V 型缺口前沿奇异单元组合起来,在公共节点上使传统单元与奇异单元的刚度矩阵进行组合。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_i + \mathbf{K}_s & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i(x,y,z) \\ \mathbf{u}_j(x,y,z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_f \end{Bmatrix} \quad (48)$$

式中:下标  $i$  和  $j$  分别表示公共节点域和非公共节点域; $\mathbf{u}_i(x,y,z)$  和  $\mathbf{u}_j(x,y,z)$  分别表示公共节点和非公共节点的位移; $\mathbf{F}_f$  是等效节点力向量; $\mathbf{K}_s$  为奇异单元的刚度矩阵; $\mathbf{K}_{ii}, \mathbf{K}_{ij}, \mathbf{K}_{ji}, \mathbf{K}_{jj}$  分别是传统单元刚度矩阵的分量。

采用新型有限元法计算圆杆中 V 型缺口广义应力强度因子,如图 26 所示,沿四分之一周角前沿分布 40 个超级单元,周围采用传统单元。在向量  $\beta$  维数小于 24 时,数值结果的计算精度令人满意,这意味着三维 V 型缺口前沿奇异单元的收敛结果很容易得到。应用此方法可以进一步分析嵌入类金刚石缺陷、接近自由表面缺陷、表面缺陷、缺陷干涉等模型的应力强度问题<sup>[68]</sup>。

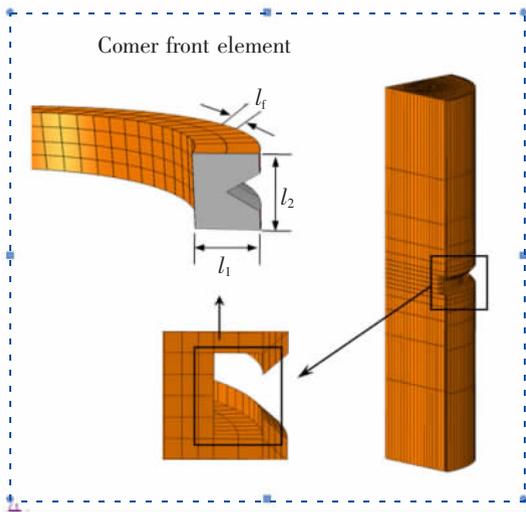


图 26 含周向 V 型缺口的圆形杆件网格划分  
Fig.26 Mesh division for a round bar with a circumferential a V-shaped notch

### 2.4 三维曲线型界面角前沿奇异单元

孔洞周围的应力集中可能导致双材料界面的退化和损伤,这是双材料界面结合强度减弱的重要原因,有必要建立相应的方法求解孔洞与界面交线附近的力学行为,以确定界面角尖端处的应力奇异强度。双材料界面与三维轴对称孔洞的相互作用将形成一个周向的界面角,界面角可以是尖角或不同角度的钝角。三维孔洞几何形式的复杂性增加了求解渐近应力场和边值问题的难度。如图 27,以双材

料圆周界面线上点  $O$  为中心建立局部曲线坐标系  $(\rho, \phi, \theta)$ ,孔洞与  $\rho-\phi$  平面交点的曲率半径记为  $r_1$ 。基于局部曲线坐标系建立三维曲线型界面角前沿奇异单元,单元包含部分圆周界面角线,由两种不同体积的弹性材料  $V^1$  和  $V^2$  组成。为了建立奇异单元的有限元方程,用界面边缘奇异性应力场的渐近解来离散位移和应力,引入一个自然坐标  $\eta$  来描述角坐标  $\theta$  的位置。

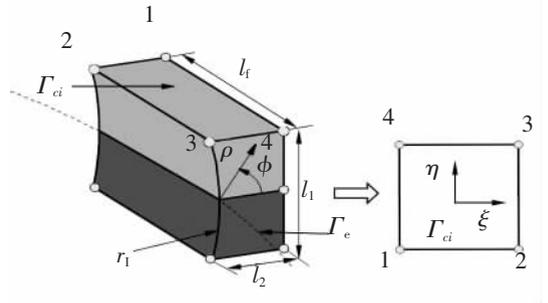


图 27 包含部分周向界面交线的奇异界面单元  
Fig.27 A singular interface edge element containing a part of the circumferential interface intersection line

三维曲线型界面角前沿奇异单元域的泛函形式为

$$\begin{aligned} \Pi_{H-R} = & -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \int_{S^m} (\mathbf{n} \mathbf{E}_c^m \boldsymbol{\beta}_c)^T \mathbf{U}_c^m \boldsymbol{\beta}_c dS + \\ & \sum_{m=1}^2 \int_{S^m} (\mathbf{n} \mathbf{E}_c^m \boldsymbol{\beta}_c)^T \mathbf{N} \bar{\mathbf{d}}_c dS \end{aligned} \quad (49)$$

式中: $\mathbf{N}$  为 4 节点四边形单元的形状函数矩阵; $\mathbf{n}$  为边界  $S^m$  外法线向量矩阵; $\boldsymbol{\beta}_c$  为应力强度参数; $\mathbf{E}_c^m$  和  $\mathbf{U}_c^m$  分别为自定义应力和位移矩阵<sup>[69]</sup>; $\bar{\mathbf{d}}_c$  为含 4 节点四边形单元所有节点分量的位移向量。

应用泛函驻值条件  $\delta \Pi_{H-R} = 0$ , 导出奇异单元的刚度矩阵

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \quad (50)$$

式中:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \int_{\Gamma_c} [(\mathbf{n} \mathbf{E}_c^m)^T \mathbf{U}_c^m + (\mathbf{U}_c^m)^T \mathbf{n} \mathbf{E}_c^m] dA \quad (51)$$

$$\mathbf{G} = \sum_{m=1}^2 \int_{\Gamma_c} (\mathbf{n} \mathbf{E}_c^m)^T \mathbf{N} dA \quad (52)$$

式中: $\Gamma_c$  为奇异界面单元的周向界面,如图 27 所示。

对于图 28 所示的界面孔洞问题,几何模型可以看作是包含有限界面孔洞缺陷的无限固体问题。为了避免当前双材料界面与三维轴对称孔洞交线附近的网格细化问题,在三维曲线型界面角前沿采

用奇异单元,周围使用传统三维单元。图 29 显示了新型有限元法与传统有限元法在界面角尖端附近的网格划分区别。如图 29(a)所示,传统有限元在圆周线附近,使用高度细化的网格。如图 29(b)所示,沿双材料界面和孔洞的周向交线上使用了 30 个奇异单元,新型有限元方法数值分析结果具有精确性<sup>[69]</sup>。

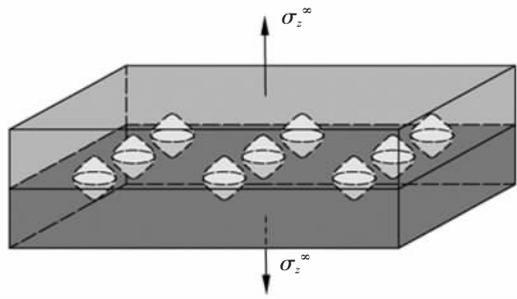
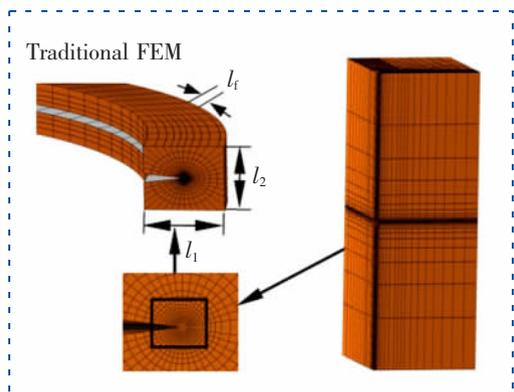
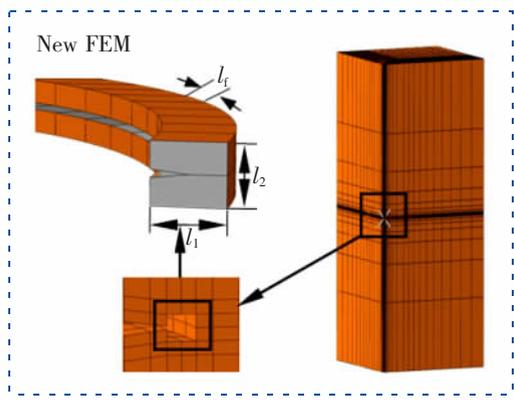


图 28 双材料界面三维孔洞

Fig.28 3D defects at the interface of a bimaterial



(a) Traditional 8-node brick elements are used



(b) Super 3D interface front singular elements are used

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.

图 29 含三维孔洞问题的网络划分

Fig.29 Mesh division for problems with 3D voids

### 3 结束语

本文主要综述了新型超级奇异单元在二维或三维中的裂纹尖端、夹杂角尖端、V 型缺口角尖端、孔洞角尖端、多相材料界面角尖端的应用情况。与其它奇异单元相比,新型超级奇异单元具有以下特点:

1) 奇异单元和常规单元之间节点处自由度一致,无需任何过渡单元即可与常规单元连接,单元相容性好。

2) 超级奇异单元在相对较低的计算成本下可以获得优异的结果,是分析二维或三维中的裂纹尖端、夹杂角尖端、V 型缺口角尖端、孔洞角尖端、多相材料界面角尖端的奇异性应力场的有效方法,适用性广。

3) 可应用于任意楔形角和任意材料组合的奇异场问题,具有良好的通用性和工程应用前景。

4) 新型超级奇异单元分析结果与单元尺寸无关,具有较高的稳定性。

5) 可以用于分析各向同性、各向异性和压电材料奇异电弹性场,可以解决热-机耦合载荷和机-电耦合载荷作用下的奇异性应力场。

6) 在三维应用领域,新型超级奇异单元只能对角部尖端线为光滑连续曲线或直线的奇异性应力场进行计算,对几何不连续角前沿线奇异性应力场的分析目前还有一定的局限性,需要进一步研究发展。

### 参考文献:

[1] NISITANI H, TERANISHI T. KI of a circumferential crack emanating from an ellipsoidal cavity obtained by the crack tip stress method in FEM[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2004, 71(4/6): 579-585.

[2] NISITANI H, KAWAMURA T, FUJISAKI W, et al. Determination of highly accurate values of stress intensity factor or stress concentration factor of plate specimen by FEM [J]. Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, 1999, 65(629): 26-31.

[3] PING X C, CHEN M C, NODA N A, et al. Analysis of generalized stress intensity factors of V-shaped notch problems by FEM[J]. International Journal of Computational Methods, 2013, 10(6): 1350068.

- [4] CHEN E P. Finite element analysis of a bi-material interface crack[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 1985, 3: 257–262.
- [5] GADI K S, JOSEPH P F, KAYA A C. Enriched finite elements for a crack tip touching an interface[J]. *Proceedings of the ASME Materials Division*, 1995, 69(1): 257–263.
- [6] PAGEAU S S, BIGGERS S B. Enriched finite elements for regions with multiple interacting singular fields[J]. *AIAA Journal*, 1996, 34: 1927–1933.
- [7] PAGEAU S S, BIGGERS S B. Enrichment of finite elements with numerical solutions for singular stress fields[J]. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1997, 40: 2693–2713.
- [8] BENZLY S E. Representation of singularities with isoparametric finite element[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1974, 8: 537–545.
- [9] BARSOUM R S. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1976, 10(1): 25–37.
- [10] ABDELAZIZ Y, BENKHEIRA S, RIKIOUI T, et al. A double degenerated finite element for modeling the crack tip singularity[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2010, 34(12): 4031–4039.
- [11] LIU G R. A generalized gradient smoothing technique and the smoothed bilinear form for Galerkin formulation of a wide class of computational methods[J]. *International Journal of Computational Methods*, 2008, 5(2): 199–236.
- [12] JIANG Y, LIU G R, ZHANG Y W. A singular ES-FEM for plastic fracture mechanics[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(45/46): 2943–2955.
- [13] TONG P, PIAN T H H, LASARY S J. A hybrid-element approach to crack problems in plane elasticity[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1973, 7: 297–308.
- [14] LIN K N, MAR J W. Finite element analysis of stress intensity factors for cracks at a bi-material interface[J]. *International Journal of Fracture*, 1976, 12: 521–531.
- [15] TAN M A, MEGUID S A. Analysis of bi-material wedges using a new singular finite element[J]. *International Journal of Fracture*, 1997, 88: 373–391.
- [16] MOTE C D. Global-local finite element[J]. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1971, 3: 565–574.
- [17] BRADFORD L G, DONG S B, NICOL D A C, et al. A central crack element in fracture mechanics[J]. *International Journal of Fracture*, 1984, 24: 197–207.
- [18] MADENCI E, SHKARAYEV S, SERGEEV B. Thermomechanical stresses for a triple junction of dissimilar materials: global-local finite element analysis[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 1998, 30: 103–117.
- [19] BARUT A, GUVEN I, MADENCI E. Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38(50/51): 9077–9109.
- [20] ZHANG J, KATSUBE N. A hybrid finite element method for heterogeneous materials with randomly dispersed elastic inclusions[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1995, 19(1/2): 45–55.
- [21] CAI Z Y, HU X F, YAO W A. Numerical study on bi-material interface crack using symplectic analytical singular element[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2018, 199: 308–326.
- [22] LI Y B, ZHOU M J, SHANG Y, et al. A singular element of shape-free hybrid stress-function finite elements in anisotropic materials[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2019, 101: 103–112.
- [23] KUNA M. Hybrid crack tip elements for three dimensional fracture problems[C]//*Application of Fracture Mechanics to Materials and Structures*, Freiburg, F. R. G., 1984.
- [24] 李翠华. 计算应力强度因子的奇异单元法[J]. *西安交通大学学报*, 1991(6): 23–28.  
LI C H. Computing stress-intensity factors with the singular element method[J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 1991(6): 23–28.
- [25] INGRAFFEA A R, MANU C. Stress intensity factor computation in three dimensions with quarter point elements[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1980, 15(10): 1427–1445.
- [26] BANKS-SKILL L. Application of the finite element method to linear elastic fracture mechanics[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1991, 44(10): 447–461.
- [27] GRUMMITT C A, BAKER G. Collapsed 27 node Lagrangian element for three-dimensional stress intensity computations [J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 1999, 12(3): 189–201.
- [28] TRACEY D M. Finite elements for three-dimensional elastic crack analysis[J]. *Nuclear Engineering and Design*, 1974, 26(2): 282–290.
- [29] JOAO E, ABDALLA F, JOSE M F, et al. An assessment of the capabilities of Tracey's singularity element [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1994, 49(3): 465–472.
- [30] ARIZA M P, SAEZ A, DOMINGUEZ J. A singular element

- for three-dimensional fracture mechanics analysis[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1997, 20(4): 275-285.
- [31] 陈伟华. 基于辛解析奇异单元的三维断裂问题分析[D]. 大连:大连理工大学, 2020.  
CHEN W H. Analysis of 3D crack problems based on a symplectic analytic singular element[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2020.
- [32] HU X F, CHEN W H, ZHANG P, et al. A new crack-tip singular element for cracks in three-dimensional elastic bodies[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2020, 235: 107-148.
- [33] YAMADA Y, OKUMURA H. Finite Element Analysis of Stress and Strain Singularity Eigenstate in Homogenous Media or Composite Materials[M]. New York: John Wiley, 1983.
- [34] CHEN M C, SZE Y K. A novel hybrid finite element analysis of bimaterial wedge problem[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2001, 68: 1463-1476.
- [35] 平学成, 陈梦成. 楔形体尖端近似场的非协调有限元特征法[J]. 华东交通大学学报, 2001, 18(4): 6-11.  
PING X C, CHEN M C. A non-conforming FE method for asymptotic fields of wedge tips[J]. *Journal of East China Jiaotong University*, 2001, 18(4): 6-11.
- [36] TEOCARIS P S. The order of singularity at a multi-wedge corner of a composite plate[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1974, 12(2): 107-120.
- [37] PING X C, CHEN M C, LENG L, et al. Singular stress analysis of an anisotropic elastic medium containing polygonal holes using a novel hybrid finite element method [J]. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2012, 8(3): 219-236.
- [38] CHEN M C, PING X C, LIU W H, et al. A novel hybrid finite element analysis of two polygonal holes in an infinite elastic plate[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2012, 83(1): 26-39.
- [39] PIAN T H H, SUMIHARA K. Rational approach for assumed stress finite elements[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1984, 20: 1685-1695.
- [40] CHEN D H, NISHINANI H. Stress intensity factors for V-notched strip under tension on in-plane bending[J]. *International Journal of Fracture*, 1995, 70: 81-97.
- [41] 陈梦成, 平学成, 刘万辉, 等. 多边形孔奇异性应力干涉问题的研究[J]. 华东交通大学学报, 2011, 28(3): 26-30.  
CHEN M C, PING X C, LIU W H, et al. On interference of singularity stress of the polygonal holes[J]. *Journal of East China Jiaotong University*, 2011, 28(3): 26-30.
- [42] 陈梦成, 梁平英, 平学成, 等. 各向异性结合材料缺口端部反平面奇异性问题研究[J]. 华东交通大学学报, 2004, 21(2): 6-9.  
CHEN M C, LIANG P Y, PING X C, et al. Antiplane singularities near a notch in jointed anisotropic materials[J]. *Journal of East China Jiaotong University*, 2004, 21(2): 6-9.
- [43] PING X C, CHEN M C, XIE J L. Singular stress analyses of V-notched anisotropic plates based on a novel finite element method[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, 75(13): 3819-3838.
- [44] TONG P, PIAN T H H. A variational principle and the convergence of a finite element method based on the assumed stress distribution[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1969, 5: 463-72.
- [45] PARTON V Z. Fracture mechanics of piezoelectric materials[J]. *Acta Astronaut*, 1976, 3(9/10): 671-683.
- [46] SCHERZER M, KUNA M. Combined analytical and numerical solution of 2D interface corner configurations between dissimilar piezoelectric materials[J]. *International Journal of Fracture*, 2004, 127: 61-99.
- [47] CHEN M C, PING X C. Finite element analysis of piezoelectric corner configurations and cracks accounting for different electrical permeabilities[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2007, 74: 1511-1524.
- [48] 陈梦成, 平学成, 朱剑军. 压电材料中切口/接头端部平面电弹性场奇异性有限元分析[J]. 固体力学学报, 2005, 26(2): 157-162.  
CHEN M C, PING X C, ZHU J J. Finite element analysis of singular electroelastic fields near piezoelectric wedges [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2005, 26(2): 157-162.
- [49] CHEN M C, PING X C. A novel hybrid element analysis for piezoelectric-parent material wedges[J]. *Computational Mechanics*, 2007, 40(1): 13-24.
- [50] CHEN M C, PING X C, XIE H M, et al. Numerical and experimental analyses of singular electro-elastic fields around a V-shaped notch tip in piezoelectric materials[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, 75(18): 5029-5041.
- [51] 平学成, 陈梦成, 谢基龙, 等. 基于新型裂尖杂交单元的压电材料断裂力学研究[J]. 力学学报, 2006, 38(3): 407-413.  
PING X C, CHEN M C, XIE J L, et al. Fracture mechanics researches on piezoelectric materials based on a novel crack-tip hybrid finite element method[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006, 38(3): 407-413.
- [52] CHEN M C, PING X C. A novel hybrid finite element

- analysis of inplane singular elastic field around inclusion corners in elastic media[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, 46: 2527–2538.
- [53] CHEN M C, PING X C. Analysis of the interaction within a rectangular array of rectangular inclusions using a new hybrid finite element method[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2009, 76(4): 580–593.
- [54] PING X C, CHEN M C. Effective elastic properties of solids with irregularly shaped inclusions[J]. *International Journal of Mechanics and Material in Design*, 2009, 5(3): 231–242.
- [55] 平学成, 陈梦成. 异形夹杂角端部局部奇异场杂交有限元分析[J]. *华东交通大学学报*, 2009, 26(5): 1–6.  
PING X C, CHEN M C. A hybrid finite element analysis of singular stress fields around an irregular inclusion corner [J]. *Journal of East China Jiaotong University*, 2009, 26(5): 1–6.
- [56] PING X C, CHEN M C, YING S J. Effects of thermomechanical properties on interface edge singular thermal stresses of quad flat package solder joints[J]. *Sensor Letters*, 2013, 11(6/7): 1326–1331.
- [57] 陈梦成, 平学成, 陈玳珩. 夹杂角端部奇异热应力场分析[J]. *固体力学学报*, 2011, 32(3): 313–318.  
CHEN M C, PING X C, CHEN D H. Analyses of singular thermal stress fields around corner tips of inclusions[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2011, 32(3): 313–318.
- [58] BARUT A, GUVEN I, MADENCI E. Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38(50/51): 9077–9109.
- [59] PING X C, CHEN M C, ZHENG B B, et al. An effective numerical analysis of singular stress fields in dissimilar material wedges under thermo-mechanical loads[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2013, 106: 22–37.
- [60] PING X C, CHEN M C, XIAO Y H, et al. Field intensity factors around inclusion corners in 0–3 and 1–3 composites subjected to thermo-mechanical loads[J]. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2016, 12(1): 121–139.
- [61] 平学成, 陈梦成, 徐小翔. 热-机载荷下不规则夹杂的奇异性应力场分析[J]. *计算力学学报*, 2014, 31(6): 749–754.  
PING X C, CHEN M C, XU X X. Singular stress analysis of an irregular shaped inclusion under thermo-mechanical loads[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2014, 31(6): 749–754.
- [62] 平学成, 陈梦成, 徐小翔. 热机载荷下多边形夹杂角端部应力场的杂交元分析[J]. *力学季刊*, 2014, 35(2): 283–292.  
PING X C, CHEN M C, XU X X. Singular stress analysis near corner of polygonal inclusion under thermo mechanical loads[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2014, 35(2): 283–292.
- [63] SZE K Y, WANG H T. A simple finite element formulation for computing stress singularities at bimaterial interfaces[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2000, 35(2): 97–118.
- [64] PING X C, CHEN M C, ZHU W, et al. Computations of singular stresses along three-dimensional corner fronts by a super singular element method[J]. *International Journal of Computational Methods*, 2017, 14(4): 1750065.
- [65] NEWMAN J C, KOTA K, LACY T E. Fatigue and crack-growth behavior in a titanium alloy under constant-amplitude and spectrum loading[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2018, 187: 211–24.
- [66] AYHAN A O. Simulation of three-dimensional fatigue crack propagation using enriched finite elements[J]. *Computers and Structures*, 2011, 89(9): 801–812.
- [67] PING X C, WANG C G, CHENG L P, et al. A super crack front element for three-dimensional fracture mechanics analysis[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2018, 196: 1–27.
- [68] PING X C, ZHANG Y X, GUO Y B, et al. Intensity of stress singularity for the circumferential V-shape corner front of a three-dimensional diamond-like defect[J]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2020, 43: 802–817.
- [69] ZHANG Y X, PING X C, WANG C M, et al. A new computational approach for three-dimensional singular stress analysis of interface voids[J]. *Acta Mechanica*, 2021, 232: 639–660.

(责任编辑: 吴海燕 姜红贵)



特约专家徐长节:男,二级教授,博士生导师。现任华东交通大学党委副书记、副校长(主持行政工作),教育部“长江学者”特聘教授,国家杰出青年基金获得者,“万人计划”科技领军人才,国家百千万人才工程入选者,国务院特殊津贴获得者。主持及参与国家及省部级科研项目 10 余项、工程项目 100 余项。获国家科技进步二等奖等。



特约专家陈梦成:男,二级教授,博士生导师。现任华东交通大学党委委员、副校长,江西省先进工作者,中国优秀留学回归人员,赣鄱英才 555 工程领军人才,江西省优势科技创新团队学术带头人。主持完成及在研国家 973、国家自然科学基金江西省等各类科研项目 30 余项;发表学术论文 400 余篇。获省部级奖项 5 项等。



特约专家刘林芽:男,二级教授,博士生导师。现任华东交通大学副校长,国家百千万人才工程国家级人选,教育部新世纪优秀人才,享受国务院特殊津贴专家,赣鄱英才 555 工程领军人才,主持国家自然科学基金、教育部等各类科研项目 50 余项。获国家科技进步二等奖,江西省自然科学一等奖等奖项 11 项。



特约专家杨辉:男,二级教授,博士生导师。新世纪百千万人才工程国家级人选,赣鄱英才 555 工程领军人才,江西省优势科技创新团队领军人才,获国务院特殊津贴、江西省突出贡献人才等荣誉,现任华东交通大学副校长,江西省人大常委。获江西省自然科学奖一等奖、江西省技术发明一等奖等省部级奖项 7 项。



特约专家罗文俊:女,教授,博士生导师。现任华东交通大学副校长,防灾减灾研究所所长。教育部青年长江学者,江西省主要学科学术及技术带头人,首批江西省青年井岗学者,享受国务院特殊津贴专家。主持国家自然科学基金 4 项,省部级科研课题 10 余项。获教育部科技进步二等奖 2 项,江西省科技进步一等奖等。



特约专家刘燕德:女,二级教授,博士生导师。现任华东交通大学首席教授,华东交通大学首批天佑学者,智能机电装备创新研究院院长,第三批国家“万人计划”领军人才,科技部重点领域创新团队负责人,江西省光电检测工程技术中心主任等。获江西省科技进步一等奖、江西省自然科学二等奖等省部级奖项 8 项。



特约专家宋立军:男,教授,博士生导师,智能激光制造湖南省重点实验室主任。研究方向:激光智能制造(3D 打印、超快激光微纳制造)、激光光谱学、激光制造材料科学、传感及控制。主持及参与多项国家自然科学基金、湖南省等各类科研项目。获中国机械工业联合会和中国机械工程学会一等奖等。



特约专家肖乾:男,教授,博士生导师。现任华东交通大学机电与车辆工程学院院长,华东交通大学天佑拔尖人才,江西省百千万人才工程人选,获全国詹天佑铁道科学技术奖青年奖、茅以升铁道科学技术奖、江西省科技进步一等奖等。近 5 年来,主持国家自然科学基金 3 项,省部级科研课题多项以及企业横向课题等近 20 项。