

文章编号: 1005-0523(2023)06-0103-07



基于能量法的橡胶浮置板轨道结构弹性波分析

孙 彰¹, 洪 显², 张 洪²

(1. 深圳铁路投资建设集团有限公司, 广东 深圳 518006; 2. 华东交通大学交通运输工程学院, 江西 南昌 330013)

摘要:针对城市轨道交通日益严重的环境振动问题,以橡胶浮置板这一城市轨道交通中常用隔振措施为研究对象,从弹性波的角度研究并提升其低频调控的性能。采用平面波级数模拟钢轨的周期性边界条件,用能量法计算了满铺式、条铺式和点铺式橡胶浮置板轨道结构的能量泛函,扫描波数变分得到橡胶浮置板的带隙特性,采用有限元法验证了提出方法的准确性。结果表明:满铺式第一阶带隙截止频率最大;条铺式与点铺式具有更低的截止频率和更宽的通带带宽,且第一阶带隙截止频率随着橡胶垫刚度的增大而提高;浮置板动力吸振器对弹性波的精准调控,为橡胶浮置板轨道低频振动控制的应用提供新的思路和方法。

关键词:橡胶浮置板轨道结构;周期结构;带隙特性;弹性波;振动控制

中图分类号: U239.5

文献标志码: A

本文引用格式: 孙彰, 洪显, 张洪. 基于能量法的橡胶浮置板轨道结构弹性波分析[J]. 华东交通大学学报, 2023, 40(6): 103-109.

DOI: 10.16749/j.cnki.jecjtu.2023.06.009

Analysis of Elastic Waves in Rubber Floating Plate Track Structures Based on the Energy Method

Sun Zhang¹, Hong Xian², Zhang Hong²

(1. Shenzhen Railway Investment and Construction Group Company Limited, Shenzhen 518006, China;

2. School of Transportation Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In view of the increasingly serious environmental vibration problem of urban rail transit, this paper takes the rubber floating slab, a commonly used vibration isolation measure in urban rail transit, as the research object, and studies and improves its low-frequency control performance from the perspective of elastic waves. The periodic boundary conditions of the rails are modelled using plane wave series, and the energy generalisation of full-paved, strip-paved, and point-paved rubber floating plate track structures is calculated using the energy method, the band gap characteristics of the rubber floating plate are finally obtained by scanning the wave number variations. The periodic boundary conditions and positive symmetrical boundary form constraint matrices, and the linear expression method is adopted to process the boundary conditions to obtain the unknown coefficients that can be varied. By scanning the variation, the bandgap characteristics of the rubber floating slab are obtained. The accuracy of the proposed method is verified using the finite element method. The results show that the cut-off frequency of the first order band gap of the full-paved type is the largest, and the strip-paved type and the dot-paved type have lower cut-off frequency and wider passband bandwidth. The cut-off frequency of the first order band gap increases with the increase of the stiffness of the rubber pad. The dynamic vibration absorber for floating slab accurately controls the elastic wave, providing new ideas and methods for the application of low-frequency vibration control of rubber floating slab tracks.

收稿日期: 2023-10-27

基金项目: 国家自然科学基金(52308451)

Key words: rubber floating slab track structure; periodic structure; bandgap characteristics; elastic waves; vibration control

Citation format: SUN Z, HONG X, ZHANG H. Analysis of elastic waves in rubber floating plate track structures based on the energy method[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2023, 40(6): 103–109.

随着城市轨道交通的路线逐渐增多,沿线的环境振动问题日益突出,直接影响轨道结构的健康状况和使用寿命以及列车运行的安全性及舒适性,必要时需要采取隔振措施。

轨道结构通常可以看作一个沿线路延伸方向排列的周期结构,固体物理学研究表明周期结构具有特殊的波动特性,处在特定频率范围内的弹性波无法在结构中传播,称之为带隙特性^[1-2]。带隙特性仅需建立一个单元便能分析出无限尺度下的传播特性,这对于轨道结构和轨道减振措施的快速预测是极其有利的。因此大量学者逐渐从波动的角度研究轨道结构的振动特性。Grassie 等^[3]建立离散点支撑轨道结构模型,利用轨道结构周期特征,结合传递矩阵法推导了周期性轨道结构振动响应的解析方法,并结合试验验证了该模型 50~1 500 Hz 频率范围内的正确性。Metrikine 等根据轨道结构的周期特征,建立三维周期性轨道结构模型,计算移动荷载作用下轨道结构动力响应^[4-5]。代丰等^[6]采用波导有限元方法分析了 CRTS II 型轨道结构中波导特性,对比分析了 Timoshenko 梁模型和波导有限元模型的差异。易强^[7]基于传递矩阵法建立周期性轨道结构弹性波传播模型,计算得到轨道结构中不同类型弹性波带隙范围,并分析了轨道结构参数对弹性波带隙的影响规律。洪显等^[8]将滞变阻尼效应引入钢轨、扣件和道床中,研究了周期性有砟轨道的频散特性随阻尼的变化情况。综上可知,带隙特性也逐渐成为轨道结构减振的重要指标。

为降低轨道结构对沿线的环境振动问题,橡胶浮置板轨道由于其优异的减振性能被广泛运用于轨道交通领域。研究橡胶浮置板的减振性能与隔振机理,有利于更好的使用橡胶浮置板,对城市轨道交通的环境振动控制具有重要意义。橡胶浮置板轨道通过降低轨道刚度隔离耗散轮轨冲击振动,从而实现环境振动的控制^[9]。冯青松等^[10]以橡胶减振垫浮置板轨道作为减振轨道,研究了轨道过渡段对时域

轮轨系统的动力响应,并分析了橡胶减振垫刚度对动力响应的的影响。王启好等^[9]从隔振垫橡胶的超弹性本构出发,对橡胶浮置板轨道进行仿真分析,得到的频域振级接近实测的数据。韦凯等^[11-12]针对减振垫浮置板轨道,从振动分析的角度研究并提出了减振评价指标,有助于指导我国浮置板轨道减振垫设计规范的制定。综上所述,对于橡胶浮置板轨道结构时域频域的振动问题具有大量的研究,但对于橡胶浮置板轨道结构的传递机理缺乏深入的研究,尤其是从波动的角度。因此开展橡胶浮置板轨道的研究具有重要的工程意义。

本文以城市轨道交通中 3 种不同铺设方式的橡胶浮置板轨道结构为研究对象,采用平面波级数和能量法^[13]建立了其能带计算模型,并通过有限元方法对该模型进行了准确性验证。

1 橡胶浮置板轨道结构的能带计算

1.1 橡胶浮置板能带计算模型

橡胶浮置板轨道按橡胶支撑方式可以分为点铺式、条铺式和满铺式。橡胶浮置板轨道系统为层状结构,从上至下主要由钢轨、扣件、浮置板、橡胶层等组成,其中橡胶层提供弹性与阻尼。

能量法能够将边值问题转化为极值问题,能够很好的处理耦合关系。因此本文采用能量作为基本解法求解橡胶浮置板的能带特性。图 1 表示的是一个胞元的橡胶浮置板轨道的计算模型。在钢轨和轨道板上建立独立坐标系,其中 x_r, O_r, y_r 为钢轨坐标系,

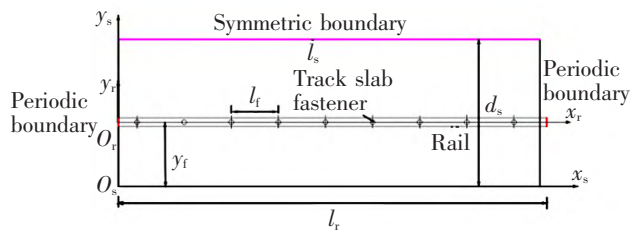


图 1 一个橡胶浮置板轨道胞元计算图
Fig.1 Computational diagram of a rubber floating plate track cell element

x_s, y_s 为浮置板坐标系, l_r 和 l_s 为钢轨和浮置板的长度, d_s 为浮置板的宽度, l_t 为扣件间距, y_t 表示扣件在轨道板上的 y 坐标。

1.2 橡胶浮置板的能量泛函

1) 位移形函数。本文主要考虑橡胶浮置板的低频振动, 因此不考虑钢轨剪切效应, 拟将钢轨考虑为 Euler 梁, 浮置板采用薄板理论建模。钢轨的垂向振动位移 w_r 根据 Bloch 定理及平面波级数展开

$$w_r(x_r, t) = e^{ikx_r} \sum_{n=-p}^p \alpha_{1,n}(t) e^{-i(\frac{2\pi nx_r}{l_r})} = \alpha_1^T \xi = \xi^T \alpha_1 \quad (1)$$

式中: i 为虚数单位; k 为波数; p 为展开项数; $\alpha_1 =$

$$\left\{ \alpha_{1,-p}, \alpha_{1,-p+1}, \alpha_{1,-p+2}, \dots, \alpha_{1,p} \right\}^T; \xi = \left\{ e^{-ikx_r + i\frac{2\pi x_r(-p)}{l_r}}, e^{-ikx_r + i\frac{2\pi x_r(-p+1)}{l_r}}, \dots, e^{-ikx_r + i\frac{2\pi x_r p}{l_r}} \right\}^T$$

浮置板的 w_s 可以由形函数和与时间相关的未知系数表示

$$w_s(x_s, y_s, t) = \sum_{m=1}^{MN} \alpha_{2,m}(t) \gamma_m(x_s, y_s) = \alpha_2^T \gamma = \gamma^T \alpha_2 \quad (2)$$

$$\gamma = \psi(x_s) \otimes \varphi(y_s)$$

式中: $\alpha_2 = \{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \dots\}^T$; N 和 M 为用于模拟钢轨和浮置板的 x 方向和 y 方向形函数个数, 即截断系数; $\otimes$ 为 Kronecker 积; $\psi(x)$ 为用于模拟 x 方向形函数, $\psi(x) = \{\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_N(x)\}^T$; $\varphi(y)$ 为用于模拟 y 方向形函数, $\varphi(y) = \{\varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots, \varphi_M(y)\}^T$ 。本文采用改进傅里叶级数为

$$\begin{cases} \psi_n(x) = \sin n\pi x, n < 5 \\ \psi_n(x) = \cos(n-5)\pi x, n \geq 5 \\ \varphi_m(y) = \sin m\pi y, m < 5 \\ \varphi_m(y) = \cos(m-5)\pi y, m \geq 5 \end{cases} \quad (3)$$

式中: x 和 y 为归一化的坐标, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 。

2) 钢轨和浮置板的能量泛函。根据 Euler 梁理论和 Kirchhoff 板理论, 钢轨与浮置板的动能、应变能可以分别表示为

$$E_{\text{rail}} = \frac{1}{2} \int_0^{l_r} \rho_r A_r \dot{w}_r^2 dx_r = \frac{1}{2} \dot{\alpha}^H M_{\text{rail}} \dot{\alpha} \quad (4)$$

$$U_{\text{rail}} = \frac{1}{2} \int_0^{l_r} E_r I_r \left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial x_r^2} \right)^2 dx_r = \frac{1}{2} \alpha^H K_{\text{rail}} \alpha \quad (5)$$

$$E_{\text{slab}} = \frac{1}{2} \int_0^{l_s} \int_0^{d_s} \rho_s h_s \dot{w}_s^2 dx_s dy_s = \frac{1}{2} \dot{\alpha}^H M_{\text{slab}} \dot{\alpha} \quad (6)$$

$$U_{\text{slab}} = \frac{1}{2} \int_0^{l_s} \int_0^{d_s} D_s \left[\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x_s^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial y_s^2} \right)^2 + 2(1-\mu_s) \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x_s \partial y_s} \right)^2 \right] dx_s dy_s = \frac{1}{2} \alpha^H K_{\text{slab}} \alpha \quad (7)$$

式中: $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]^T$, 上标 H 表示 Hermite 转置; E_{rail} 和 U_{rail} 分别表示钢轨的动能和应变能; E_{slab} 和 U_{slab} 分别表示浮置板的动能和应变能; ρ_r, A_r, E_r 和 I_r 分别表示钢轨的密度、横截面面积、弹性模量和截面惯性矩; ρ_s, h_s, D_s 和 μ_s 分别表示浮置板的密度、厚度、抗弯刚度、泊松比, 其中 $D_s = E_s h_s / (12(1-\mu_s)^2)$, E_s 为浮置板的弹性模量; $M_{\text{rail}}, K_{\text{rail}}$ 和 $M_{\text{slab}}, K_{\text{slab}}$ 分别为钢轨与浮置板的质量矩阵和刚度矩阵。

3) 扣件能量泛函。钢轨和浮置板之间扣件相连, 扣件采用弹簧模拟, 其弹性势能可以表示为

$$U_{\text{fastener}} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^A k_{\text{fastener}} [w_r(x_{r,a}) - w_s(x_{s,a}, y_{s,a})]^2 = \frac{1}{2} \alpha^H K_{\text{fastener}} \alpha \quad (8)$$

式中: $x_{r,a}, x_{s,a}$ 和 $y_{s,a}$ 分别表示第 a 个扣件在钢轨的 x 方向坐标, 浮置板的 x 和 y 方向坐标; A 表示一块轨道板上扣件的个数; k_{fastener} 表示扣件刚度; K_{fastener} 是扣件的刚度矩阵。

4) 橡胶垫层的能量泛函。满铺式橡胶浮置板可以认为在浮置板底部有一层均布弹簧, 橡胶垫层的能量可以表示为

$$U_{\text{full}} = \frac{1}{2} \int_0^{l_s} \int_0^{d_s} k_{\text{rubber}} w_s^2 dx_s dy_s = \frac{1}{2} \alpha^H K_{\text{full}} \alpha \quad (9)$$

式中: k_{rubber} 为橡胶垫层的刚度; K_{full} 为满铺式橡胶的刚度矩阵。条铺式橡胶浮置板可以采用线弹簧进行模拟, 其能量泛函为

$$U_{\text{line}} = \frac{1}{2} \int_0^{l_s} k_{\text{rubber}} w_s(x_{s,b}, y_{s,b})^2 dy_s = \frac{1}{2} \alpha^H K_{\text{line}} \alpha \quad (10)$$

式中: $x_{s,b}$ 为条铺式橡胶在浮置板上的 x 坐标; K_{line} 为条铺式橡胶的刚度矩阵。点铺式橡胶浮置板考虑为点支撑弹簧, 其能量泛函为

$$U_{\text{dot}} = \frac{1}{2} \sum_{c=1}^C k_{\text{rubber}} w_s(x_{s,c}, y_{s,c})^2 = \frac{1}{2} \alpha^H K_{\text{dot}} \alpha \quad (11)$$

式中: $x_{s,c}$ 和 $y_{s,c}$ 分别表示点铺式橡胶在轨道板上 x 坐标和 y 坐标; C 表示铺设橡胶层的个数; K_{dot} 表示点铺式橡胶的刚度矩阵。

5) 总能量泛函。将各部分的能量泛函组合起来, 便形成了总能量泛函, 图 2 所示模型的能量泛函为

$$\Pi = E_{\text{rail}} - E_{\text{slab}} - U_{\text{rail}} - U_{\text{slab}} - U_{\text{fastener}} - U_{\text{full}} = \frac{1}{2} \dot{\alpha}^H M \dot{\alpha} - \frac{1}{2} \alpha^H K \alpha \quad (12)$$

式中: $M = M_{\text{rail}} + M_{\text{slab}}$, $K = K_{\text{rail}} + K_{\text{slab}} + K_{\text{fastener}} + K_{\text{full}}$ 。

1.3 运动特征方程

对总能量泛函 Π 变分求解,即将式(12)带入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = 0 \quad (13)$$

便可得到橡胶浮置板轨道的运动方程为

$$[K(k) - \omega^2 M(k)] \alpha = 0 \quad (14)$$

式中: ω 为振动圆频率。在布里渊区 $[-\pi/l_r, \pi/l_r]$ 扫描波数, 便可得到周期性橡胶板轨道结构的带隙特性。

2 橡胶浮置板轨道模型验证

为验证理论计算结果的准确性,本小节将以橡胶浮置板轨道结构为对象,参数如表 1 所示^[14-15]。选用有限元软件 (COMSOL Multiphysics) 建立周期性橡胶浮置板轨道结构模型,如图 2 所示。

表 1 橡胶浮置板轨道结构参数表

Tab.1 Parameters of rubber floating slab track structure

Component	Item	Value
Rail	Young's modulus/Gpa	206
	Moment of inertia/m ⁴	3.217×10 ⁻⁵
	Density/(kg/m ³)	7 800
	Section area/m ²	7.745×10 ⁻³
	Shear coefficient	0.4
	Poisson's ratio	0.3
Fastener	Vertical stiffness/(N/m)	2.5×10 ⁷
	Spacing/m	0.6
Slab	Length×Width×Height/m ³	4.75×2.3×0.26
	Young's modulus/Gpa	36
	Density/(kg/m ³)	2 500
	Shear coefficient	5/6
	Poisson's ratio	0.25
Rubber pad	Stiffness/(N/m ³)	2×10 ⁷

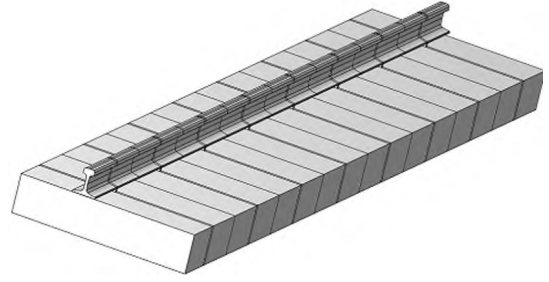


图 2 橡胶浮置板轨道结构有限元模型图

Fig.2 Diagram of finite element model of rubber floating slab track structure

钢轨、浮置板,扣件与橡胶垫层参数取值均参照表 1。利用有限元软件为钢轨边界赋予 Floquet 周期性边界条件,浮置板内侧赋予对称边界条件。计算时,在 COMSOL 中选择物理场控制网格,单元划分大小选择常规,网格数为 89 602。求得带隙特性与本文理论计算结果对比如图 3 所示,其中蓝色散点图即为有限元计算结果。

根据上述参数,基于能量泛函变分和平面波级数的混合方法求得 200 Hz 内橡胶浮置板轨道结构垂向振动的带隙特性如图 3 中红色实线所示。为方便后续的分析,图 3 中引入了无量纲参数 $Q = k/(\pi/l_r)$, 因波数 k 的取值范围在第一布里渊区 $(-\pi/l, \pi/l)$, 故 Q 的取值范围为 $(-1, 1)$ 。为减少后续分析的工作量,本文将忽略带宽不足 5 Hz 及相对带宽小于 5% 的带隙。

通过图 3 对比可以看到,两种方法所求的频散曲线基本吻合,二者均存在 4 阶带隙,二者带隙频段对照结果如表 2 所示。由表可知,二者对应带隙

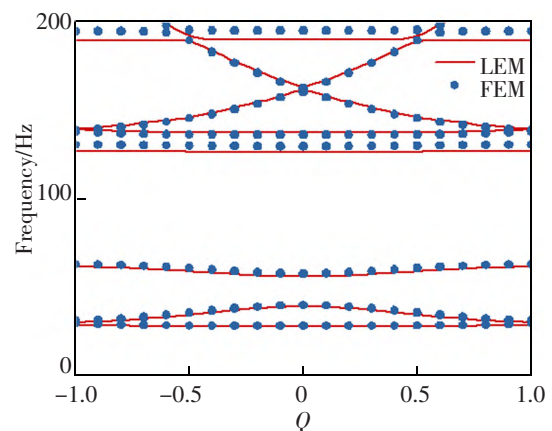


图 3 橡胶浮置板轨道结构带隙特性对比图 (有限元解与理论解)

Fig.3 Comparison of band gap characteristics of rubber floating slab track structure (FEM solution and theoretical solution)

表2 橡胶浮置板轨道带隙频段对比表
Tab.2 Comparison of band gap frequency of rubber floating slab track

Band gap	LEM/Hz	FEM/Hz
1st order	0~26.8	0~27.5
2nd order	27.7~29.8	28.9~30.6
3rd order	38.2~55.5	39.2~57.0
4th order	60.7~136.9	62.4~135.8

频段基本一致,误差皆在5%以内,这也验证了本文方法求解带隙特性的准确性。

3 橡胶浮置板轨道结构参数对带隙特性的影响分析

3.1 不同支撑形式的影响

本小节将分析3种铺设方式对结构内部弹性波传播的影响。条铺式中弹性垫层铺设于钢轨对应的浮置板下方,点铺式铺设位置与之相同,铺设间距为1.2 m,其余均与前文满铺式结构参数相同。分别求得频散曲线如图4所示,由图4可以看到,3种铺设方式下,条铺式的第一阶带隙截止频率最低,

满铺式第一阶截止频率最大。除此之外,100~200 Hz内的曲线几乎无变化,且铺设方式并未改变总带隙阶数。在橡胶垫层的刚度相同时,相较于满铺式而言,条铺式与点铺式铺设工况下的通带带宽更大,这说明能够在轨道结构内传播的弹性波更多,二者抑制低频波向下传播的能力更强。

3.2 橡胶垫层刚度变化的影响

为探究刚度对橡胶浮置板轨道带隙特性的影响,在其他参数保持不变的情况下,将橡胶垫层刚度由 1×10^7 N/m增至 5×10^7 N/m,得到带隙特性变化如图5所示。由图5可得,橡胶垫层刚度的增大对第一阶带隙的影响最为明显,其增幅增长了约1.23倍。这是由于随着刚度的增加,浮置板与下方地基的耦合作用增强,从而使得更多的波无法在钢轨内传播,向下方浮置板传播。此外,值得注意的是,橡胶垫层刚度增加对第四阶带隙截止频率的影响微乎其微。可见,橡胶垫层刚度对50 Hz以下的带隙影响更大,那么对于低频隔振,可以采用适当改变橡胶垫层刚度的方式来调节结构间的耦合强度、设计浮置板轨道的隔振频率,以达到更好的隔振效果。

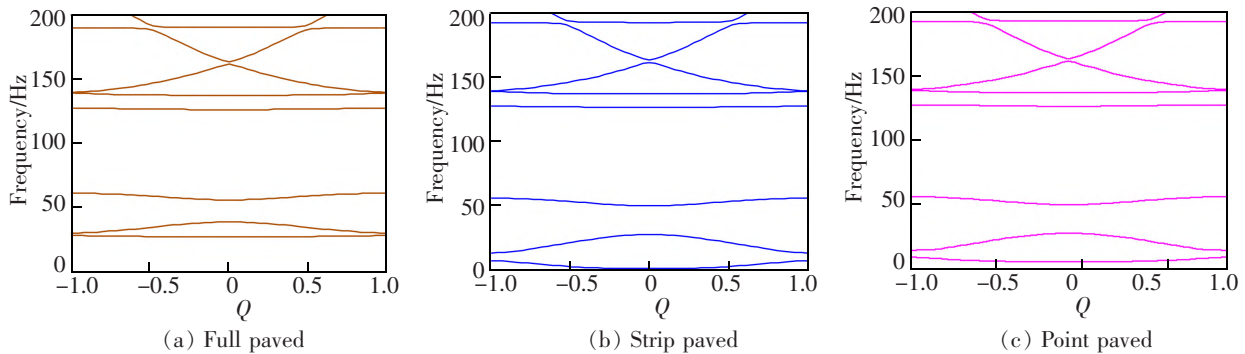
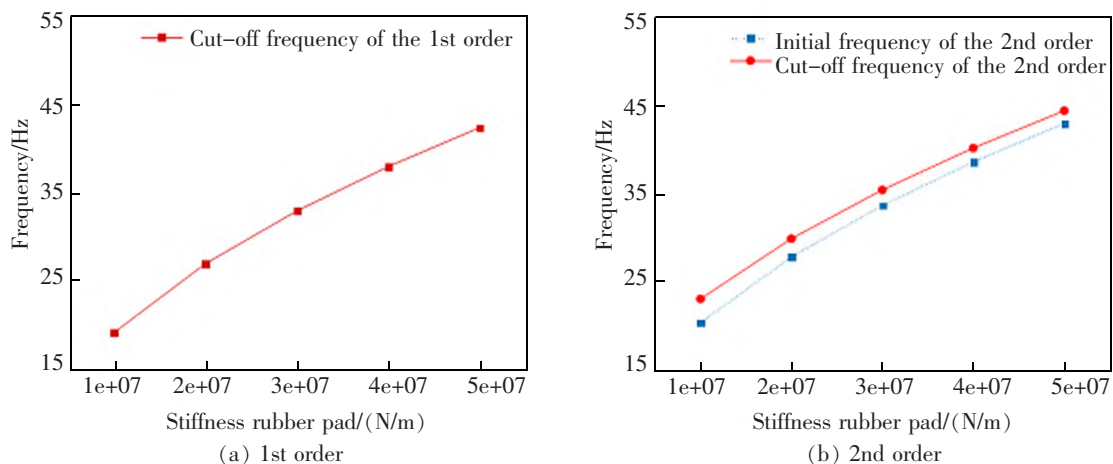


图4 满铺式、条铺式与点铺式橡胶浮置板轨道结构带隙特性对比图

Fig.4 Comparison of band gap characteristics of paved rubber floating slab track structure in full paved, strip paved and point paved



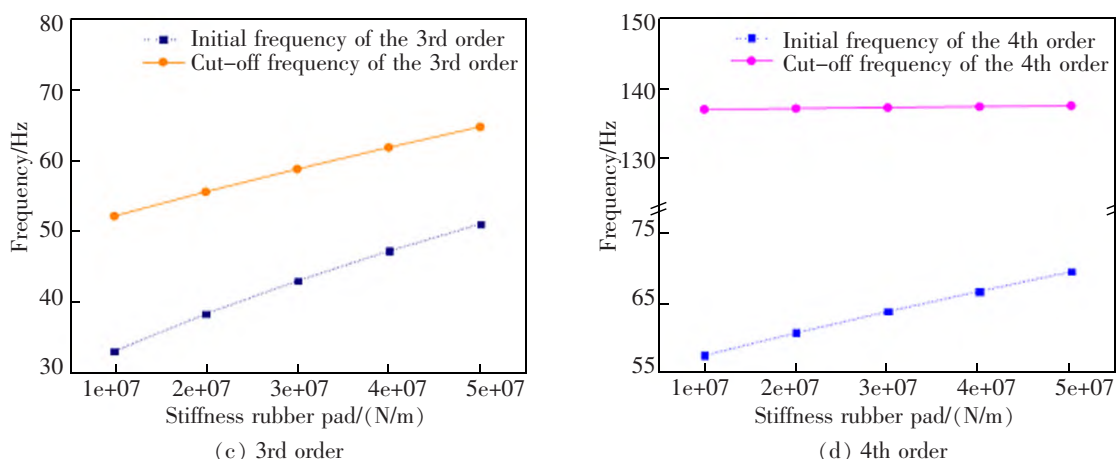


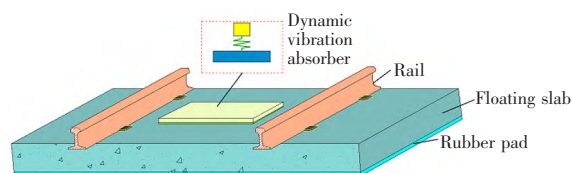
图5 橡胶垫层刚度变化对橡胶浮置板轨道结构带隙特性影响图

Fig.5 Comparison of band gap characteristics of paved rubber floating slab track structure in full paved, strip paved or point paved

4 动力吸振器对橡胶浮置板轨道结构弹性波调控分析

动力吸振器(dynamic vibration absorber,DVA)由弹簧、阻尼与质量块组成,能够在不改变浮置板质量与橡胶垫层刚度的情况下抑制轨道结构的振动。由于本文主要针对低频振动分析,为更进一步降低橡胶浮置板轨道结构的隔振频率,本文将作为减振设计对象,从波动的角度分析浮置板动力吸振器对低频弹性波传播的影响机理。将DVA工作频率设计为第一阶带隙的截止频率,将之置于浮置板之上,如图6所示,每隔1.2 m 布设1个动力吸振器,详细参数参考文献[16]。

满铺式、条铺式及点铺式橡胶浮置板轨道结构铺设DVA后的带隙特性如图7所示,其中实线为初始带隙特性曲线,虚线表示附有DVA后的曲线。首先,观察图7(a)满铺式,可以看到第一阶带隙截止频率由26.8 Hz 升至27.7 Hz,第二阶带隙由27.7 Hz~

图6 附有动力吸振器的橡胶浮置板轨道结构图
Fig.6 Diagram of rubber floating slab track structure with dynamic vibration absorber

29.8 Hz 变为32.7~36.1 Hz。满铺式与另二者有所不同,其第一条带隙曲线变化最为明显,其变化表明在添加DVA后,可在轨道结构内部传播的频段得到了拓宽,意味着向下传播的弹性波减少,轨道结构的隔振能力增强。其次值得注意的是,在添加吸振器后条铺式与点铺式的变化相似,二者的第一、二阶带隙截止频率均有所降低。这表明浮置板DVA的添加使橡胶浮置板轨道结构具有更低隔振频率,在低频处的隔振性能增强。这是由于DVA与浮置板结构产生共振,将其共振频率附近的弹性波吸收

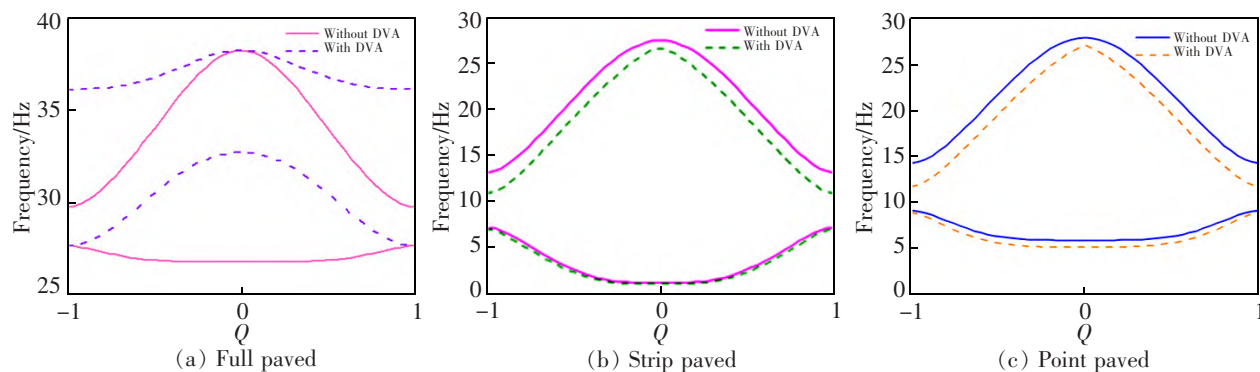


图7 附有DVA的橡胶浮置板轨道带隙特性图

Fig.7 Diagram band gap characteristics of rubber floating slab track structure with DVA

并耗散,使其无法通过橡胶层向下传播,增强了轨道结构的低频减振能力。

5 结论

1) 在轨道结构内部其它参数不变的情况下,相较于条铺式、点铺式,满铺式的第一阶带隙截止频率较高,条铺式与点铺式具有更低的截止频率和更宽的通带带宽。

2) 相较于普通橡胶浮置板轨道而言,附有动力吸振器的橡胶浮置板轨道结构具有更低频的隔振能力,且吸振器对满铺式轨道结构隔振能力影响最为明显。利用该特性可实现对特定频段弹性波的有效调控,增强耗散作用,从而达到降低轨道运行过程中产生振动与噪声的目的。

参考文献:

- [1] RIVA E, RONCO M D, ELABD A, et al. Non-reciprocal wave propagation in discretely modulated spatiotemporal plates[J]. *Sound & Vibration*, 2020, 47(1): 115186.
- [2] LU Y M, CAO D X, SHEN Y J, et al. Study on the bandgaps of defect states and application of energy harvesting of local resonant phononic crystal plate [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53: 1114-1123.
- [3] GRASSIE S L, GREGORY R W, HARRISON D, et al. The dynamic response of railway track to high frequency vertical excitation[J]. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1982, 24(2): 77-90.
- [4] METRIKINE A V, WOLFERT A R, VROUWENVELDER A C. Steady-state response of periodically supported structures to a moving load[J]. *Heron-English Edition*, 1999, 44(2): 91-108.
- [5] VOSTROUKHOV A V, METRIKINE A V. Periodically supported beam on a visco-elastic layer as a model for dynamic analysis of a high-speed railway track[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, 40(21): 5723-5752.
- [6] 代丰, 刘学毅, 朱颖, 等. 基于数值模型和解析模型的钢轨波导特性分析[J]. *西南交通大学学报*, 2018, 53(5): 77-83.
- [7] 易强. 周期性铁路轨道结构弹性波传播特性及调控方法研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2021.
- [8] 洪显, 郭文杰, 戴承欣. 滞变阻尼对周期轨道结构垂向振动带隙特性影响[J]. *华东交通大学学报*, 2023, 40(1): 82-91.
- [9] 王启好, 蔡小培, 常文浩, 等. 基于隔振垫超弹性本构模型的橡胶浮置板轨道动力仿真[J]. *中国铁道科学*, 2023, 44(1): 87-96.
- [10] 冯青松, 孙魁. 市域快线减振垫浮置板轨道过渡段动力学分析[J]. *铁道工程学报*, 2022, 39(3): 40-45.
- [11] 韦凯, 赵泽明, 王显, 等. 浮置板轨道减振垫的刚度测试与评价[J]. *西南交通大学学报*, 2022, 57(4): 848-854.
- [12] 韦凯, 成芳, 赵泽明, 等. 减振垫浮置板轨道减振效果评价方法研究[J]. *铁道科学与工程学报*, 2022, 19(3): 656-664.
- [13] 冯青松, 廖宝亮, 郭文杰, 等. 基于能量泛函变分原理的无砟轨道垂向振动带隙分析[J]. *铁道学报*, 2022, 44(7): 98-106.
- [14] GUO W, YANG Z, FENG Q, et al. Band-gap analysis of vertical vibration of ballastless track based on energy functional variational principle[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2022, 44(7): 98-106.
- [15] 王润丰, 蔡小培, 汤雪扬, 等. 地铁橡胶浮置板与无砟轨道过渡段刚度方案研究[J]. *铁道科学与工程学报*, 2022, 19(10): 2884-2892.
- [16] 朱胜阳, 王建伟, 蔡成标, 等. 应用动力吸振器的浮置板轨道低频振动控制特性的试验研究[J]. *铁道学报*, 2021, 43(4): 142-149.



通信作者: 孙彰(1971—), 男, 高级工程师, 研究方向为城市轨道交通建设管理。E-mail: szmcsz@sohu.com。

(责任编辑: 吴海燕)