

文章编号: 1005-0523(2023)06-0110-05



稳态非线性热传导问题的比例边界有限元法

李庆华¹, 冯子超¹, 陈莘莘¹, 孔祥禄²

(1. 华东交通大学土木建筑学院, 江西 南昌 330013; 2. 中国铁路哈尔滨局集团有限公司, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要:提出一种基于比例边界有限元法和 Kirchhoff 变换求解稳态非线性热传导问题的数值方法。为了消除导热系数随温度变化引起的非线性, 引入 Kirchhoff 变换将非线性的偏微分控制方程简化为 Laplace 方程, 因而可消除迭代计算。作为一种兼顾了有限元法和边界元法优势的半解析数值方法, 比例边界有限元法只需在计算域的边界上划分网格且不需基本解。在变换空间采用比例边界有限元法求得高精度的数值解之后, 借助 Kirchhoff 反变换可求得温度场。数值结果表明, 所提的稳态非线性热传导问题分析方法是行之有效的。

关键词:比例边界有限元法; 热传导; 非线性; Kirchhoff 变换

中图分类号: O343; [U8]

文献标志码: A

本文引用格式: 李庆华, 冯子超, 陈莘莘, 等. 稳态非线性热传导问题的比例边界有限元法[J]. 华东交通大学学报, 2023, 40(6): 110-114.

DOI: 10.16749/j.cnki.jecjtu.2023.06.007

Scaled Boundary Finite Element Method for Steady-State Nonlinear Heat Conduction Problem

Li Qinghua¹, Feng Zichao¹, Chen Shenshen¹, Kong Xianglu²

(1. School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China;

2. China Railway Harbin Group Co., Ltd., Harbin 150001, China)

Abstract: A new numerical algorithm is presented to solve steady-state nonlinear heat conduction problems by combining the scaled boundary finite element method and the Kirchhoff transformation. In order to eliminate the nonlinearity related to the temperature dependence of the thermal conductivity, the Kirchhoff transformation is utilized to convert the nonlinear partial differential governing equation into the Laplace equation, and therefore iterative computation can be avoided. As a semi-analytical numerical method that combines the advantages of finite element method and boundary element method, the scaled boundary finite element method only requires the boundary without fundamental solution to be discretized. After the numerical solutions with high precision in the transformation space are calculated by the scaled boundary finite element method, the inverse transformation is required to derive the temperature field. Several numerical examples are presented to verify that the proposed method is effective for steady-state nonlinear heat conduction problem.

Key words: scaled boundary finite element method; heat conduction; nonlinear; Kirchhoff transformation

Citation format: LI Q H, FENG Z C, CHEN S S, et al. Scaled boundary finite element method for steady-state nonlinear heat conduction problem[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2023, 40(6): 110-114.

收稿日期: 2023-09-14

基金项目: 国家自然科学基金项目(12162014, 12172131); 江西省主要学科学术和技术带头人培养计划(20225BCJ22010)

材料参数随温度变化引起的非线性热传导问题广泛存在于航空航天、生物医学工程和冶金工程等诸多实际工程领域^[1-3]。由于非线性热传导问题的复杂性,很难得到解析解,因而研究其数值解十分必要。Thakur 等^[4]求解了二维非线性瞬态热传导问题。王峰等^[5]采用基于 Kriging 插值的 MLPG 法分析了二维非线性稳态和瞬态热传导问题。Yang 等^[6]采用径向积分边界元法分析导热系数随温度变化的瞬态非线性热传导问题。Cui 等^[7]采用单元微分法分析多维瞬态非线性热传导问题。朱强华等^[8]提出了一种基于特征正交分解(POD)和有限元法的瞬态非线性热传导问题的模型降阶快速分析方法。Mierzwiczak 等^[9]采用 Kirchhoff 变换对导热系数随温度变化的稳态非线性热传导问题进行线性化,并采用奇异边界法进行分析。

作为一种半解析的数值方法,比例边界有限元法^[10]只需对计算域的环向边界离散为单元,并且在未离散的径向可以解析求解。相对于边界元法,这种方法不需要基本解,也不涉及奇异积分的数值困难。目前,比例边界有限元法已被用于求解断裂力学问题^[11-12]、弹性动力学问题^[13-14]、波导本征问题^[15]、土-结构动力相互作用分析^[16]和热传导问题^[17]。但目前尚未见到采用比例边界有限元法进行非线性热传导问题的研究。

鉴于比例边界有限元法的显著优势,本文将其与 Kirchhoff 变换^[18-19]相结合,提出了求解稳态非线性热传导问题的一种新方法。利用 Kirchhoff 变换,将非线性的偏微分控制方程转化为线性方程,然后采用比例边界有限元法求解,并借助 Kirchhoff 反变换求得温度场。最后,通过两个典型算例验证了本文所提方法的有效性。

1 稳态非线性热传导问题

考虑一个二维稳态热传导问题,其计算域为 Ω , 边界为 Γ 。当热传导问题的导热系数随温度变化,且无内热源,则相应的控制方程和边界条件可写为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0 \text{ in } \Omega \quad (1)$$

$$T = \bar{T} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (2)$$

$$k(T) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \bar{q} \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (3)$$

式中: $k(T)$ 为随温度变化的热传导系数; T 为温度;

\mathbf{n} 为边界外法向向量; Γ_1 为 Dirichlet 边界; \bar{T} 为其上给定的温度; Γ_2 为 Neumann 边界; \bar{q} 为其上给定的热流密度。

为了消除式(1)的非线性,本文采用 Kirchhoff 变换^[18-19]。引入下式定义与温度相关的新变量

$$\theta = \Psi(T) = \int_0^T k(\xi) d\xi \quad (4)$$

则

$$\frac{d\theta}{dT} = k(T) \quad (5)$$

式(4)对应的 Kirchhoff 反变换可写为

$$T = \Psi^{-1}(\theta) \quad (6)$$

将式(5)代入式(1),得到新的控制方程如下

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

即将原非线性热传导方程变换成了用变量 θ 表示的线性方程。

根据式(5),边界条件式(2)和式(3)可变换成

$$\theta = \bar{\theta} = \Psi(\bar{T}) \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = \bar{q} \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (9)$$

2 比例边界有限元法

考虑如图 1 所示的比例边界坐标系,相似中心为点 O ,要求从该点可以看到边界上任意一点。对于有限域问题,径向坐标 ξ 的变化范围从 0 到 1,即 $0 \leq \xi \leq 1$ 。当相似中心点与直角坐标系原点一致时,计算域内任意点的笛卡尔坐标 (\hat{x}, \hat{y}) 可写为

$$\hat{x} = \xi x(s) \quad (10)$$

$$\hat{y} = \xi y(s) \quad (11)$$

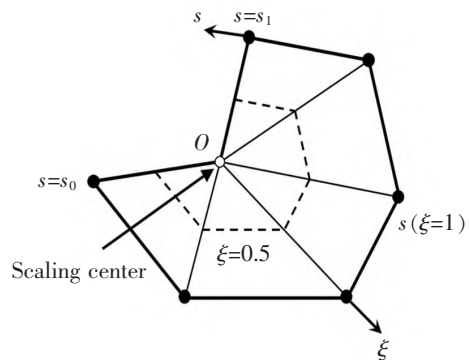


图 1 比例边界坐标系

Fig.1 The scaled boundary coordinate system

式中: $(x(s), y(s))$ 分别为边界上任意点的笛卡尔坐标。

在比例边界坐标系下, 梯度算子可表示为^[14-15]

$$\begin{aligned} \nabla &= \mathbf{b}_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{b}_2 \frac{\partial}{\partial s} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{Bmatrix} y(s)_{,s} \\ -x(s)_{,s} \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{Bmatrix} -y(s) \\ x(s) \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \end{aligned} \quad (12)$$

式中:

$$|\mathbf{J}| = x(s)y(s)_{,s} - y(s)x(s)_{,s} \quad (13)$$

式(7)、式(8)和式(9)等效的泛函问题可表达为

$$\delta \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right) d\Omega \right] = 0 \quad (14)$$

计算域内任意点的变量 $\theta(\xi, s)$ 可半解析地表示为

$$\theta(\xi, s) = \mathbf{N}(s) \boldsymbol{\theta}(\xi) \quad (15)$$

式中: $\mathbf{N}(s)$ 为边界结点形函数。

将式(12)和式(15)代入式(14), 然后对含 $\delta \boldsymbol{\theta}(\xi)_{,\xi}$ 项做分部积分, 并考虑 $\delta \boldsymbol{\theta}(\xi)^T$ 任意性整理可得

$$\mathbf{E}_0 \xi^2 \boldsymbol{\theta}(\xi)_{,\xi\xi} + (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_1) \xi \boldsymbol{\theta}(\xi)_{,\xi} - \mathbf{E}_2 \boldsymbol{\theta}(\xi) = 0 \quad (16)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}_0 \boldsymbol{\theta}(\xi)_{,\xi} + \mathbf{E}_1^T \boldsymbol{\theta}(\xi) |_{\xi=1} \quad (17)$$

$$\mathbf{P} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{N}(s)^T \bar{q} d\Gamma \quad (18)$$

式中:

$$\mathbf{E}_0 = \int_{\Gamma} \mathbf{B}_1(s)^T \mathbf{B}_1(s) |\mathbf{J}| ds \quad (19)$$

$$\mathbf{E}_1 = \int_{\Gamma} \mathbf{B}_2(s)^T \mathbf{B}_1(s) |\mathbf{J}| ds \quad (20)$$

$$\mathbf{E}_2 = \int_{\Gamma} \mathbf{B}_2(s)^T \mathbf{B}_2(s) |\mathbf{J}| ds \quad (21)$$

式中:

$$\mathbf{B}_1(s) = \mathbf{b}_1(s) \mathbf{N}(s) \quad (22)$$

$$\mathbf{B}_2(s) = \mathbf{b}_2(s) \mathbf{N}(s)_{,s} \quad (23)$$

式(16)为二阶常微分方程组, 采用矩阵函数^[20]法可将其解表示为

$$\boldsymbol{\theta}(\xi) = \boldsymbol{\Psi}_\theta \xi^{-\mathbf{S}_n} \mathbf{c} \quad (24)$$

式中: \mathbf{S}_n 为与负特征值对应的 Schur 标准型; $\boldsymbol{\Psi}_\theta$ 为 Schur 分解中与 $\boldsymbol{\theta}$ 变量相关的模态; \mathbf{c} 为可由边界条件确定的积分常数。

将式(24)代入式(15)可求得域内各点的变量 $\theta(\xi, s)$ 值后, 由 Kirchhoff 反变换式(6)可进一步求得相应各点的温度 $T(\xi, s)$ 。

3 数值算例

为了验证所提方法的有效性, 本文对一些典型的稳态非线性热传导问题进行分析求解, 并与相应的解析解进行了对比。

3.1 算例 1

考虑一个边长为 1 的方板的稳态非线性热传导问题, 如图 2 所示。板的上端和下端为绝热边界, 板左端的温度保持为 $T_l=300$ K, 右端的温度保持为 $T_r=400$ K。

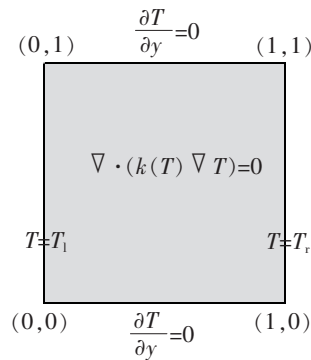


图 2 算例 1 和算例 2 的模型

Fig.2 The model of example 1 and example 2

导热系数与温度的关系为

$$k(T) = (k_1 + k_2 T)^m \quad (25)$$

式中: k_1, k_2 和 m 均为常数。

将式(25)代入 Kirchhoff 变换式(4), 可得

$$\theta = (k_1 + k_2 T)^{m+1} / k_2 (m+1) \quad (26)$$

经从 θ 到 T 的 Kirchhoff 逆变换得

$$T_{\text{num}} = \Psi^{-1}(\theta) = \frac{[k_2(m+1)\theta]^{\frac{1}{m+1}} - k_1}{k_2} \quad (27)$$

为了研究数值解与解析解之间的误差, 给出该问题的解析解^[9]为

$$T_{\text{exact}} = \frac{[(A_r - A_l)x + A_l]^{\frac{1}{m+1}} - k_1}{k_2} \quad (28)$$

式中:

$$A_r = (k_1 + k_2 T_r)^{m+1} \quad (29)$$

$$A_l = (k_1 + k_2 T_l)^{m+1} \quad (30)$$

计算时取 $k_1 = -2$ 和 $k_2 = 0.01$, 将相似中心取在方板中心, 并将边界离散成 16 个二次单元。采用本文方法, 可以计算得到 m 取不同值时 $y=0.5$ 处的温度分布, 如图 3 所示。为了方便比较, 图 3 还给出了相应的解析解。由图 3 可知, 本文方法计算精度很高, 与解析解之间的最大相对误差只有 $2.02 \times 10^{-10}\%$ 。

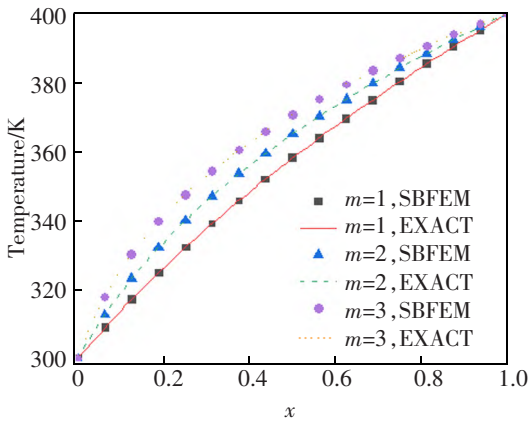


图 3 算例 1 中 $y=0.5$ 处的温度分布

Fig.3 Temperature distributions at $y=0.5$ for example 1

3.2 算例 2

算例 2 同算例 1 一样,只是导热系数与温度的关系假设为

$$k(T)=\exp(k_1+k_2T) \quad (31)$$

式中: k_1 和 k_2 为常数。该问题的解析解^[9]为

$$T_{\text{exact}}=\frac{\ln[(C_r-C_l)x+C_l]-k_1}{k_2} \quad (32)$$

式中:

$$C_r=\exp(k_1+k_2T_r) \quad (33)$$

$$C_l=\exp(k_1+k_2T_l) \quad (34)$$

将式(31)代入 Kirchhoff 变换式(4),可得

$$\theta=\exp(k_1+k_2T)/k_2 \quad (35)$$

经从 θ 到 T 的 Kirchhoff 逆变换得

$$T_{\text{num}}=\Psi^{-1}(\theta)=\frac{\ln(k_2\theta)-k_1}{k_2} \quad (36)$$

计算时取 $k_1=-2$,将相似中心取在方板中心,并将边界离散成 16 个二次单元。图 4 给出了 k_2 取不

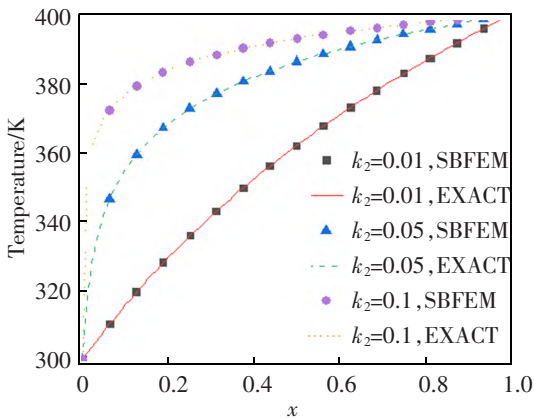


图 4 算例 2 中 $y=0.5$ 处的温度分布

Fig.4 Temperature distributions at $y=0.5$ for example 2

同值时 $y=0.5$ 处温度分布的数值解和解析解的比较。显然,本文数值解与解析解吻合非常好(最大相对误差为 $2.32 \times 10^{-10}\%$),这进一步验证了本文所提方法的有效性。

4 结论

本文首次采用比例边界有限元法,建立了稳态非线性热传导问题分析的整套求解算法。由本文分析和算例求解结果可以看出。

1) 不同于迭代解法,对于导热系数随温度变化的稳态非线性热传导问题应用 Kirchhoff 变换可转化为线性热传导问题进行求解,进而可以避免迭代计算。

2) 作为一种半解析的数值方法,比例边界有限元法具有精度高、计算量小和数学处理方便等优点,在拉普拉斯边值问题的求解中同有限元和边界元相比更具优势。

3) 数值算例验证了本文方法在求解稳态非线性热传导问题时具有较高的计算精度和计算效率。

参考文献:

[1] FENG S Z, CUI X Y, LI A M. Fast and efficient analysis of transient nonlinear heat conduction problems using combined approximations method[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2016, 97: 638-644.

[2] TANAKA M, MATSUMOTO T, TAKAKUWA S. Dual reciprocity BEM for time-stepping approach to the transient heat conduction problem in nonlinear materials[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195: 4953-4961.

[3] YANG J, HUANG X L. Nonlinear transient response of functionally graded plates with general imperfections in thermal environments[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 196: 2619-2630.

[4] THAKUR H, SINGH K M, SAHOO P K. Meshless local Petrov-Galerkin method for nonlinear heat conduction problems[J]. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 2010, 56(5): 393-410.

[5] 王峰, 林皋, 郑保敬, 等. 非线性热传导问题的基于滑动 Kriging 插值的 MLPG 法[J]. 大连理工大学学报, 2014, 54(3): 339-344.

WANG F, LIN G, ZHENG B J, et al. MLPG method based on moving Kriging interpolation for solving nonlinear heat

- conduction problems[J]. Journal of Dalian University of Technology, 2014, 54(3):339-344.
- [6] YANG K, PENG H F, WANG J, et al. Radial integration BEM for solving transient nonlinear heat conduction with temperature-dependent conductivity[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2017, 108:1551-1559.
- [7] CUI M, XU B B, LYU J, et al. Numerical solution of multi-dimensional transient nonlinear heat conduction problems with heat sources by an extended element differential method[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2018, 126:1111-1119.
- [8] 朱强华, 杨恺, 梁钰, 等. 基于特征正交分解的一类瞬态非线性热传导问题的新型快速分析方法[J]. 力学学报, 2020, 52(1):124-138.
- ZHU Q H, YANG K, LIANG Y, et al. A novel fast algorithm based on model order reduction for one class of transient nonlinear heat conduction problem[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2020, 52(1):124-138.
- [9] MIERZWCZAK M, CHEN W, FU Z J. The singular boundary method for steady-state nonlinear heat conduction problem with temperature-dependent thermal conductivity[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2015, 91:205-217.
- [10] WOLF J P, SONG C. Consistent infinitesimal finite element cell method: three-dimensional vector wave equation[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996, 39(13):2189-2208.
- [11] SONG C, VRCELJ Z. Evaluation of dynamic stress intensity factors and T-stress using the scaled boundary finite element method[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2008, 75:1960-1980.
- [12] IQBAL M D, BIRK C, OOI E T, et al. Thermoelastic fracture analysis of functionally graded materials using the scaled boundary finite element method[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2022, 264:108365.
- [13] 陈灯红, 杜成斌. 基于SBFE和改进连分式的有限域动力分析[J]. 力学学报, 2013, 45(2):297-301.
- CHEN D H, DU C B. Dynamic analysis of bounded domains by SBFE and the improved continued-fraction expansion[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2013, 45(2):297-301.
- [14] SONG C. The scaled boundary finite element method in structural dynamics[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, 77(8):1139-1171.
- [15] 林皋, 刘俊. 波导本征问题分析的比例边界有限元法[J]. 计算力学学报, 2013, 30(1):1-9.
- LIN G, LIU J. Scaled boundary finite element method for the eigen analysis of waveguide[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2013, 30(1):1-9.
- [16] 林皋, 李志远, 李建波. 复杂地基条件下土-结构动力相互作用分析[J]. 岩土工程学报, 2021, 43(9):1573-1580.
- LIN G, LI Z Y, LI J B. Dynamic soil-structure interaction under complex soil environment[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2021, 43(9):1573-1580.
- [17] YU B, HU P M, SAPUTRA A A, et al. The scaled boundary finite element method based on the hybrid quadtree mesh for solving transient heat conduction problems[J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 89:541-571.
- [18] FU Z J, CHEN W, QIN Q H. Boundary knot method for heat conduction in nonlinear functionally graded material [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2011, 35:729-734.
- [19] BAGNALL K R, MUZYCHKA Y S, WANG E N. Application of the Kirchhoff transform to thermal spreading problems with convection boundary conditions[J]. IEEE Transactions on Components Packaging & Manufacturing Technology, 2014, 4(3):408-420.
- [20] SONG C M. A matrix function solution for the scaled boundary finite element equation in statics[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193(23):2325-2356.



通信作者:李庆华(1976—),女,副教授,研究方向为数值传热学及其应用。E-mail:jessylqh@126.com。

(责任编辑:吴海燕)