

文章编号: 1005-0523(2023)06-0115-06



单一 4-边形环己烷类分子图的 l_1 -嵌入性

熊志坤^{1,2}, 王广富³

(1. 华东交通大学理学院, 江西 南昌 330013; 2. 东莞市第七高级中学, 广东 东莞 523500;
3. 烟台大学数学与信息科学学院, 山东 烟台 264005)

摘要: 图的度量空间与 l_1 -空间的某个子空间同构的图称为 l_1 -嵌入的。单一 4-边形环己烷类分子图是指嵌入到平面上恰有 1 个四边形面, 其他都是六边形面, 且内点度为 3, 边界点度为 2 或 3 的 2 连通平面图。证明了当 4-边形上只有 2 个相邻 3 度点时, 单一 4-边形环己烷类图是 l_1 -嵌入的, 其他的都不是。

关键词: 环己烷类图; l_1 -嵌入; l_1 -图

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

本文引用格式: 熊志坤, 王广富. 单一 4-边形环己烷类分子图的 l_1 -嵌入性[J]. 华东交通大学学报, 2023, 40(6): 115-120.

DOI: 10.16749/j.cnki.jecjtu.2023.06.008

l_1 -Embeddability of Mono-4-gons Cyclohexane Molecular Graphs

Xiong Zhikun, Wang Guangfu

(1. School of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 2. The Seventh Senior High School of Dongguan, Dongguan 523500, China; 3. School of Mathematics and Information Sciences, Yantai University, Yantai 264005, China)

Abstract: A graph whose graphic metric space is isomorphic to some subspace of an l_1 -space is called l_1 -embeddable. A mono-4-gons cyclohexane molecular graph refers to a 2-connected planar graph embedded in a plane with exactly one quadrilateral face, the rest are hexagonal faces, and the inner vertices degree are 3 and the boundary vertices degree are 2 or 3. It is proved that when there are only two adjacent 3-degree vertices on the quadrilateral, the mono-4-gons cyclohexane graph is l_1 -embeddable, and the others are not.

Key words: the cyclohexane graph; l_1 -embeddability; l_1 -graph

Citation format: XIONG Z K, WANG G F. l_1 -Embeddability of mono-4-gons cyclohexane molecular graphs[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2023, 40(6): 115-120.

化学图论早在 18 世纪下半叶被引入^[1], 在 1758 年 Cullen 和 Black 绘制的第一个化学分子的示例图就代表了化学物质之间的相互作用。Cullen 用化学图解释分子之间的化学反应, 但可惜作为课堂笔记没有发表^[2]。在接下来的 19 世纪 50 年代和 60 年代, 结构理论^[3]和化合价理论^[4]逐渐成为化学图论研究的主流。在 20 世纪 30 年代, 化学图论发展还包括同分异构体计数^[5]、拓扑指标^[6-9]等关键领域。在化学图论中, 常把原子看作一个顶点, 原子之间的化

学键看作一条边。只考虑分子图中的碳原子, 不考虑氢原子和复杂的化学键。拓扑指标实际上就是考虑化学图上顶点之间的距离, 在化学图上计算任意两点之间的距离十分复杂。而在超立方体中的两点间距离就是 Hamming 距离, 可以极大地简化拓扑指标的计算^[10]。Assouad 和 Deza 证明了 l_1 -图是可以按距离成倍数嵌入某个超立方体的图^[11]。因此, 研究图的 l_1 -嵌入具有重要意义。

能够嵌入欧式平面使得不同边只在顶点处相

收稿日期: 2022-11-26

基金项目: 国家自然科学基金项目(11861032, 11961026); 江西省自然科学基金项目(20202BABL201010)

交的图,称为平面图。Deza 和 Shtogrin^[12]研究了平面上的若干化学分子图的 l_1 -嵌入性,例如:苯、萘、联苯等可以 l_1 -嵌入。Deza 和 Laurent^[13]得到了一些可以 l_1 -嵌入的图类,例如:鸡尾酒会图,半立方体,皮特森图等。Deza 和 Laurent^[13]还得出 2 个 l_1 -图通过 1 个顶点相粘后得到的新图也是 l_1 -图。Deza 和 Grishuklin^[14]证明了每个平面上的 l_1 -图都可以 2 规模地嵌入某个超立方体。能够等距离地嵌入某个超立方体的图,称为部分立方体。Klavzar 和 Gutman^[15]证明了所有苯环系统都是部分立方体。张和平和徐守军^[16]证明了带冠状的苯环系统都不是部分立方体。张和平和王广富^[17]研究了开口纳米管的 l_1 -嵌入性,在所有的开口纳米管中只有三类退化的情况才是部分立方体。王广富和张和平^[18]研究了莫比乌斯面上的六边形堆砌图中只有 $H_{2,2}$ 和 $H_{3,3}$ 是 l_1 -图,莫比乌斯面上的四边形堆砌图中只有 $Q_{1,2}$ 是 l_1 -图。王广富和 Shpectorov^[19]证明了一般的莫比乌斯面上的四边形堆砌图包含唯一的非零伦圈,同时刻画了可以 l_1 -嵌入的莫比乌斯面上的四边形堆砌图的结构特征。李晨阳和王广富^[20]证明了树、单圈图以及它们的线图都是 l_1 -图。王广富、李晨阳和王凤灵^[21]得到了 2 个 l_1 -图的门和图还是 l_1 -图。

环己烷类图上所有的点都是 2 度或 3 度,只有 1 个 4-边形面,其他面都是 6-边形。Deza 和 Shtogrin^[12]证明了 4-边形上都是 3 度点的环己烷类图不是 l_1 -图。本文对环己烷类图 4-边形上点的度进行分类:对于环己烷类图 4-边形上只有 2 个 3 度点的情况,如果这 2 个 3 度点是相邻的,则称为第一型环己烷类图;如果这 2 个 3 度点是相对的,则称为第二型环己烷类图。如果环己烷类图 4-边形上有 3 个 3 度点,称为第三型环己烷类图。证明了第一型环己烷类图是 l_1 -图,第二型和第三型环己烷类图都不是 l_1 -图。

1 预备知识

文中涉及的所有图都是有限的、简单的、没有自环的连通图。对于 1 个图 G ,用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集。2 个点 u 和 v 之间连边,也称 u 和 v 相邻。对于 2 个图 H 和 G ,如果 $V(H) \subseteq V(G)$ 且 $E(H) \subseteq E(G)$,那么称图 H 是图 G 的子图。如果 $V' \subseteq V(G)$ 且 E' 是由图 G 上两端点都在 V' 中边所组成的边集,称其为图 G 的由 V' 导出的子图,记

为 $G[V']$ 。路是指 1 个点不重复的点边交错序列,通常用 P 表示。起点和终点重合的路称为闭路,也叫做圈,通常用 C 表示。设 u 是图 G 上的任一顶点,所有与 u 相关联的点组成的集合称为点 u 的邻域,记为 $N(u)$ 。在 $N(u)$ 中包含的顶点数称为点 u 的度。设 u 和 v 是 $V(G)$ 中的 2 个点, u 和 v 之间最短路的长度称为 u 和 v 之间的距离,用 $d_G(u, v)$ 表示。在不引起歧义时,简记为 $d(u, v)$ 。则 $(V(G), d)$ 构成 1 个度量空间,称为图 G 的伴随度量空间。如果图 G 的任意 2 个点之间都存在 1 条路,那么 G 为连通图。对于 H 图上的任意 2 个点 u 和 v 都有 $d_G(u, v) = d_H(u, v)$,那么图 H 是图 G 的等距离子图。

n 维超立方体 Q_n 的点集是由所有 n 元有序数组 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 组成,其中 $a_i \in \{1, 0\}$, $(1 \leq i \leq n)$ 。于是 Q_n 有 2^n 个顶点,2 个顶点相邻当且仅当它们对应的 n 元有序数组恰有 1 个位置的元素不同。

设 X 是由所有实向量 $x = (x_1, x_2, \cdots)$ 组成的集合,使得 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$,其中 $k \in \mathbb{Z}^+$ 。对于任意 2 个实向

量 $x, y \in X$,定义 X 上的度量 d_1 如下: $d_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|$,称这样的度量空间 (X, d_1) 为 l_1 -空间。如果 Y 是 1 个线性空间且 $Y \subseteq X$,则称 (Y, d_1) 为 l_1 -空间的子空间。

1 个图 G 称为 l_1 -图(或 l_1 -嵌入的),如果它的伴随度量空间与 l_1 -空间的某个子空间同构。也就是说存在从 $(V(G), d_G)$ 到 (X, d_1) 的 1 个距离保持映射 φ ,对 G 的任意 2 个顶点 x 和 y ,满足 $d_G(x, y) = d_1(\varphi(x), \varphi(y))$ 。Assouad 和 Deza^[11]证明了 1 个图 G 是 l_1 -图当且仅当存在 2 个正整数 λ 和 n ,图 G 可以 λ 倍地嵌入到某个超立方体 Q_n 中。即对任意的顶点 $x, y \in V(G)$,存在 1 个映射 $\varphi: V(G) \rightarrow V(Q_n)$,满足 $\lambda d_G(x, y) = d_{Q_n}(\varphi(x), \varphi(y))$ 。

2 个简单图 G 和 H 同构,也就是说,它们的顶点集之间存在 1 个双射,使得对于图 G 的任意 2 个点 u 和 v ,存在图 H 中的 2 个点 x 和 y 与之对应,满足 u 和 v 在图 G 中相邻当且仅当 x 和 y 在图 H 中相邻,记作 $G \cong H$ 。

2 个图 G 和 H 的卡式积图 $G \square H$ 的点集是 $V(G) \times V(H)$,2 个顶点 (u_1, u_2) 和 (v_1, v_2) 相邻要么 $u_1 = v_1$ 且 u_2 和 v_2 在图 H 中相邻,要么 $u_2 = v_2$ 且 u_1 和

v_1 在图 G 中相邻。

1 个具有 k 条边的面,称为 k -边形。至少包含 1 个边界顶点的面,称为边界面。反之,所有点都是内点的面,称为内面。

定义 1.1 单一 4-边形环己烷类分子图是指嵌入到平面上的 2 连通图,其中恰有 1 个四边形面,其他都是六边形面,四边形面上的顶点度为 2 或 3,其余内点度为 3,边界点度为 2 或 3。

下面引入几个常用的定理来判断图的 l_1 -嵌入性。

定理 1.2^[13] 如果 2 个简单连通图 G 和 H 都是 l_1 -图,那么它们的卡式积图 $G \square H$ 也是 l_1 -图。

外可平面图 G 是指其存在一种嵌入欧式平面的方式,使得所有边只在顶点处相交且所有顶点都在外平面上。常见的外可平面图有:路,圈等。

定理 1.3^[14] 任意一个外可平面图都是可以 l_1 -嵌入的。

对于 l_1 -图,有一个非常重要的必要条件是:

定理 1.4^[21] 对于 1 个连通图 G ,如果它是 l_1 -图,对于图 G 上任意 5 个点 x, y, a, b, c ,那么 d_G 一定满足下面的 5-边形不等式: $d(x, y) + d(a, b) + d(b, c) + d(a, c) \leq d(x, a) + d(x, b) + d(x, c) + d(y, a) + d(y, b) + d(y, c)$ 。

从定理 1.4 可以容易看出,若能够在图 G 中找出 5 个顶点,它们违反了 5-边形不等式,则说明这个图不是 l_1 -嵌入的。

2 单一 4-边形环己烷类分子图的 l_1 -嵌入性

单一 4-边形环己烷类分子图上恰有 1 个 4-边形,其上的顶点度为 2 或 3,本小节研究单一 4-边形环己烷类分子图的 l_1 -嵌入性,下面对其 4-边形上顶点的度进行分析。

定理 2.1 单一 4-边形环己烷类分子图的 4-边形上至少有 2 个 3 度点。

证明

1) 如果单一 4-边形环己烷类分子图的 4-边形上都是 2 度点,则该 4-边形是孤立的,单一 4-边形环己烷类分子图上不存在从 4-边形到 6-边形的路,与图的连通性相矛盾,故环己烷类图的 4-边形上至少有 1 个 3 度点。

2) 如果单一 4-边形环己烷类分子图的 4-边形上只有 1 个 3 度点,不妨记为 u ,如图 1 所示,则 4-边形上另外 3 个顶点都是 2 度点。通过 u 向外发出一条边记为 uu_1 ,要使得 4-边形上的边被 6-

边形覆盖,则由顶点 u 出发的路经过若干个点后必须回到 4-边形上异于 u 的顶点。则与单一 4-边形环己烷类分子图的 4-边形上只有 1 个 3 度点相矛盾,故单一 4-边形环己烷类分子图的 4-边形上至少有 2 个 3 度点。

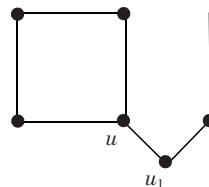


图 1 环己烷类图的 4-边形上只有一个 3 度点

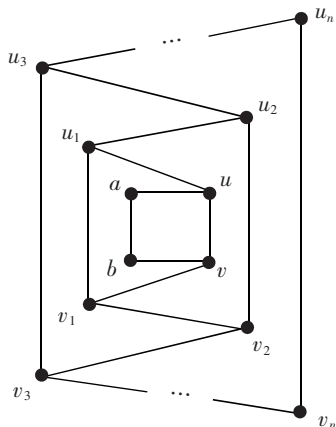
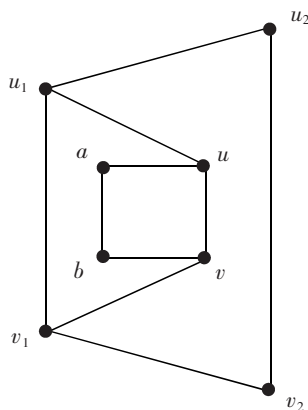
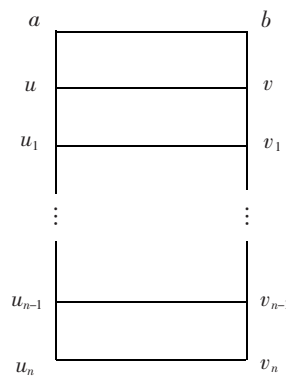
Fig.1 Only one 3-degree vertex on the 4-cycles of the cyclohexane graph

单一 4-边形环己烷类分子图的 4-边形上至少有 2 个 3 度点,那么其 4-边形有可能是 2 个 3 度点,这 2 个 3 度点有两种位置关系,当这 2 个 3 度点相邻时,则称其为第一型环己烷类图,当这 2 个 3 度点相对时,则称其为第二型环己烷类图;4-边形上也可能有 3 个 3 度点,当 4-边形上有 3 个 3 度点,称其为第三型环己烷类图;4-边形上也可能 4 个都是 3 度点。下面开始证明当 4-边形上有 2 个相邻 3 度点的情况下,单一 4-边形环己烷类分子图的 l_1 -嵌入性。

引理 2.2^[21] 如果单一 4-边形环己烷类分子图的 4-边形上都是 3 度点,那么该图不是 l_1 -图。

定理 2.3 第一型环己烷类图是可以 l_1 -嵌入的。

证明 设第一型环己烷类图 G 的 4-边形上任意 2 个相邻的 3 度点为 u 和 v ,如图 2 所示,4-边形上与 u 和 v 相关联的点分别记为 a 和 b 。通过 u 和 v 分别向外发出 1 条边,产生 2 个点分别记为 u_1 和 v_1 ,再把 u_1 和 v_1 连边。得到由 $V' = (a, b, u, v, u_1, v_1)$ 导出的子图,记为 $G[V']$ 。此时 $G[V']$ 上除了 uv 以外的边都被 6-边形 auu_1v_1vba 所覆盖一次。通过 u_1 和 v_1 分别向外发出 1 条边,产生的 2 个点分别记为 u_2 和 v_2 ,再把 u_2 和 v_2 连边。如图 3 所示,得到由 $V(G_0) = \{a, b, u, v, u_1, v_1, u_2, v_2\}$ 导出的子图,记为 G_0 。此时图 G_0 上所有的边可以被 6-边形 auu_1v_1vba 和 $uu_1u_2v_2v_1vu$ 覆盖 1 次或 2 次。在基图 G_0 上通过 u_2 和 v_2 分别向外发出 1 条边,产生 2 个点分别记为 u_3 和 v_3 ,再把 u_3 和 v_3 连边,依次类推把 u_n 和 v_n 连边,得到第一型环己烷类图 G 。不难看出第一型环己烷类图 G 与梯子图(如图 4 所示)同构。而梯子图 $H = P_{n+1} \square P_2$ 且由定理 1.3 知任意路都是 l_1 -图,通过定理 1.2

图2 第一型环己烷类图 G Fig.2 The type I cyclohexane graph G 图3 G 图的导出子图 G_0 Fig.3 The induced subgraph G_0 of the graph G 图4 梯子图 H Fig.4 The ladder graph H

知梯子图 H 是 l_1 -图, 故第一型环己烷类图 G 是可以 l_1 -嵌入的。

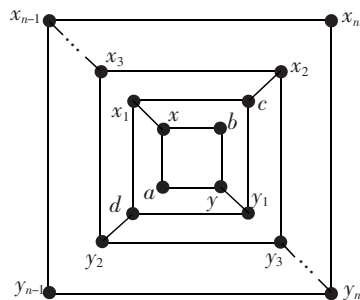
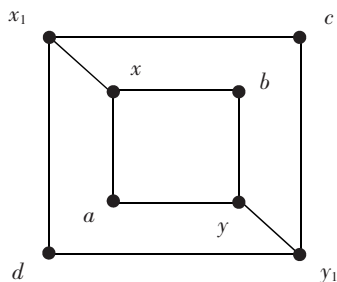
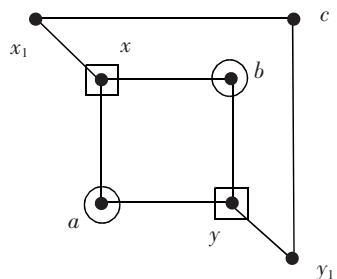
此时, 证明了当单一 4-边形环己烷类分子图的 4-边形上有 2 个相邻的 3 度点时, 那么该图是 l_1 -图。下面证明 4-边形上有 2 个相对的 3 度点时, 单一 4-边形环己烷类分子图的 l_1 -嵌入性。

定理 2.4 第二型环己烷类图不是 l_1 -图。

证明: 设第二型环己烷类图 M 的 4-边形上任意 2 个相对的 3 度点为 x 和 y , 如图 5 所示 4-边形上剩下的 2 个 2 度点不妨记为 a 和 b 。通过 x 和 y 分别向外发出 1 条边, 产生的 2 个点分别记为 x_1 和 y_1 , 再由 x_1 和 y_1 分别向外发出两条边, 产生 2 个点记为 c 和 d 。如图 6 所示, 得到由 $V(M_0)=\{a, b, c, d, x, y, x_1, y_1\}$ 导出的子图, 记为 M_0 。此时, 图 M_0 上所有的边可以被 6-边形 xx_1cy_1ybx 和 xx_1dy_2yax 覆盖 1 次或 2 次。在图 M_0 上通过 c 和 d 分别向外发出 1 条边, 产生的 2 个点分别记为 x_2 和 y_2 , 再由 x_2 和 y_2 分别向外发出 2 条边, 产生 2 个点记为 x_3 和 y_3 , 依次类推, 得到第二型环己烷类图 M 。接下来考虑由 $V(H)=\{a, b, c, x, y, x_1, y_1\}$ 产生的导出子图 H , 不难验证在图 H 中任取 2 个点 u 和 v , 都有 $d_M(u, v)=d_H(u, v)$ 。因此, 图 H 是图 M 的等距离子图。如图 7 所示, 取图 H 上的 5 个顶点 x, y, a, b, c , 易得 $d(x, y)=2$, $d(a, b)=2$; $d(a, c)=3$, $d(b, c)=3$; 而 $d(x, a)=1$, $d(x, b)=1$, $d(x, c)=2$, $d(y, a)=1$, $d(y, b)=1$, $d(y, c)=2$ 。则 $d(x, y)+d(a, b)+d(a, c)+d(b, c)=10$, 而 $d(x, a)+d(x, b)+d(x, c)+d(y, a)+d(y, b)+d(y, c)=8$ 。

即在第二型环己烷类图 M 上找到了 5 个点 x, y, a, b, c 违反 5-边形不等式, 使得: $d(x, y)+d(a, b)+d(a, c)+d(b, c)>d(x, a)+d(x, b)+d(x, c)+d(y, a)+$

$d(y, b)+d(y, c)$ 。由定理 1.4 知第二型环己烷类图 M 不是 l_1 -图。

图5 第二型环己烷类图 M Fig.5 The type II cyclohexane graph M 图6 图 M 的导出子图 M_0 Fig.6 The induced subgraph M_0 of the graph M 图7 图 M_0 的导出子图 H Fig.7 The induced subgraph H of the graph M_0

此时,证明了当单一4-边形环己烷类分子图的4-边形上有2个相对的3度点时,那么该图不是 l_1 -图,下面证明当4-边形上有3个3度点时,单一4-边形环己烷类分子图的 l_1 -嵌入性。

定理 2.5 第三型环己烷类图不是 l_1 -图。

证明: 设第三型环己烷类图 N 的4-边形上唯一的2度点为 w ,如图8所示,4-边形上与 w 相对的3度点为 y ,4-边形上剩下的两个3度点不妨设为 u 和 v 。由 u, v, y 3个点分别向外发出1条边,产生的3个点分别记为 u_1, v_1 和 y_1 ,再由 u_1, v_1 和 y_1 分别向外发出2条边,产生同时与 u_1 和 v_1 相关联的点记为 z ,与 u_1 相关联的点记为 a ,同时与 y_1 和 a 相关联的点记为 b ,与 v_1 相关联的点记为 d ,同时与 y_1 和 d 相关联的点记为 c 。此时,由 $V(N_0)=\{a, b, c, d, u, v, w, y, z, u_1, v_1, y_1\}$ 导出的子图,记为 N_0 。如图9所示,图 N_0 上所有的边可以被6-边形 aby_1yuu_1a , cdv_1vyy_1c 和 vv_1zu_1uww 覆盖1次或2次。接下来考虑由 $V(H)=\{u, v, w, y, z, u_1, v_1\}$ 产生导出的子图 H ,不难验证在图 H 中任取2个点 m 和 n ,都有 $d_N(m, n)=d_H(m, n)$ 。因此,图 H 是图 N 的等距离子图。如图10所示,取图 H 上的5个顶点 u, v, w, y, z ,不难得到 $d(u, v)=2, d(w, y)=2, d(w, z)=3; d(y, z)=3$,而 $d(u, y)=1, d(u, w)=1, d(u, z)=2, d(v, y)=1, d(v, w)=1, d(v, z)=2$ 。则 $d(u, v)+d(w, y)+d(w, z)+d(y, z)=10$,而 $d(u, y)+d(u, w)+d(u, z)+d(v, y)+d(v, w)+d(v, z)=8$ 。

即在第三型环己烷类图 N 上找到了5个点 u, v, w, y, z 违反5-边形不等式,使得: $d(u, v)+d(w, y)+d(w, z)+d(y, z)>d(u, y)+d(u, w)+d(u, z)+d(v, y)+d(v, w)+d(v, z)$ 。由定理1.4知第三型环己烷类图 N 不是 l_1 -图。

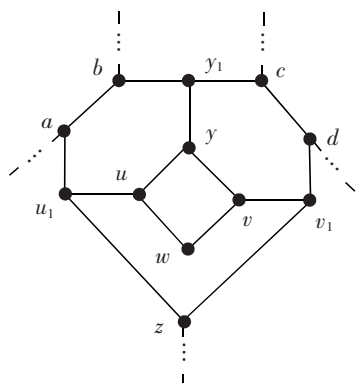


图8 第三型环己烷类图 N
Fig.8 The type III cyclohexane graph N

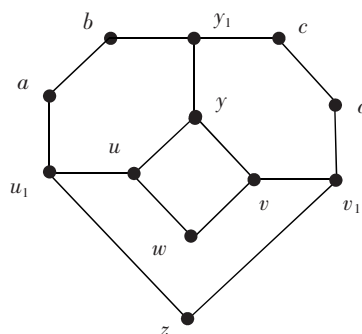


图9 图 N 的导出子图 N_0
Fig.9 The induced subgraph N_0 of the graph N

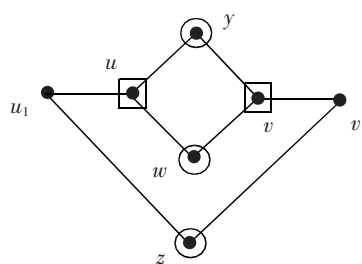


图10 图 N_0 的导出子图 H
Fig.10 The induced subgraph H of the graph N_0

到此,本文证明了单一4-边形环己烷类分子图的4-边形上有2个相邻的3度点时,那么该图是 l_1 -图;其4-边形上有2个相对的3度点时,不是 l_1 -图;其4-边形上有3个3度点时,也不是 l_1 -图。即单一4-边形环己烷类分子图中,除了第一型环己烷类图是 l_1 -图,其他的都不是 l_1 -图。

参考文献:

- [1] BONCHEV D. Chemical graph theory: Introduction and fundamentals[M]. Florida: CRC Press, 1991.
- [2] THACKRAY A. Atoms and powers: an essay on Newtonian matter-theory and the development of chemistry[M]. Cambridge: Harvard University Press, 1970.
- [3] DALTON J. A new system of chemical philosophy[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [4] PALMER W G. A History of the concept of valency to 1930 [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [5] SNELDERS H A M. The new chemistry in the netherlands [J]. Osiris, 1988, 4(1): 121-145.
- [6] WIENER H. Structural determination of paraffin boiling points[J]. Journal of the American chemical society, 1947, 69(1): 17-20.
- [7] GUTMAN I. A formula for the wiener number of trees and its extension to graphs containing cycles[J]. Graph Theory

- Notes NY, 1994, 27(9): 9–15.
- [8] KHADIKAR P V, KARMARKAR S, AGRAWAL V K. A novel PI index and its applications to QSPR/QSAR studies [J]. Journal of chemical information and computer sciences, 2001, 41(4): 934–949.
- [9] 涂淑玲, 王广富. 两类交叉四角链的拉普拉斯谱及其应用 [J]. 华东交通大学学报, 2021, 38(5): 119–125.
- TU S L, WANG G F. Laplacian spectrum of two classes of linear crossed polyomino chains and its applications [J]. Journal of East China Jiaotong University, 2021, 38(5): 119–125.
- [10] KLAUZAR S. On the canonical metric representation, average distance and partial hamming graphs [J]. European Journal of Combinatorics, 2006, 27(1): 68–73.
- [11] ASSOUD P, DEZA M. Espaces métriques plongeables dans un hypercube: aspects combinatoires [J]. Annals of Discrete Mathematics, 1980, 8: 197–210.
- [12] DEZA M, SHTOGRIN M I. Embeddings of chemical graphs in hypercubes [J]. Mathematical Notes, 2000, 68(3): 295–305.
- [13] DEZA M, LAURENT M. l_1 -rigid graphs [J]. Journal of Algebraic Combinatorics, 1994, 3(2): 153–175.
- [14] CHEPOI V, DEZA M, GRISHUKHIN V. Clin d'oeil on n -embeddable planar graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 1997, 80(1): 3–19.
- [15] KLAUZAR S, GUTMAN I, MOHAR B. Labeling of benzenoid systems which reflects the vertex-distance relations [J]. Journal of chemical information and computer sciences, 1995, 35(3): 590–593.
- [16] ZHANG H P, XU S J. None of the coronoid systems can be isometrically embedded into a hypercube [J]. Discrete applied mathematics, 2008, 156(14): 2817–2822.
- [17] ZHANG H P, WANG G F. Embeddability of open-ended carbon nanotubes in hypercubes [J]. Computational Geometry, 2010, 43(5): 524–534.
- [18] WANG G F, ZHANG H P. l_1 -Embeddability of hexagonal and quadrilateral mobius graphs [J]. Ars Combinatoria, 2011, 102: 269–287.
- [19] WANG G F, SHPECTOROV S. l_1 -embeddability of generic quadrilateral Mobius maps [J]. European Journal of Combinatorics, 2019, 80: 373–389.
- [20] 李晨阳, 王广富. 树, 单圈图及其线图之嵌入性 [J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(19): 305–311.
- LI C Y, WANG G F. The l_1 -embeddability of trees, unicyclic graphs and their line graphs [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2020, 50(19): 305–311.
- [21] WANG G F, LI C Y, WANG F L. l_1 -Embeddability under gate-sum operation of two l_1 -graphs [J]. Frontiers in Physics, 2020, 8: 146.
- [22] TYLKIN M E. On Hamming geometry of unitary cubes [J]. Doklady Akademii Nauk SSSR, 1960, 134(5): 1037–1040.



第一作者: 熊志坤(1997—), 男, 研究方向为图论及其应用。2020年毕业于萍乡学院数学与应用数学专业, 获学士学位, 2023年毕业于华东交通大学, 获硕士学位。E-mail: 1104756532@qq.com。



通信作者: 王广富(1976—), 男, 烟台大学数学与信息学院教授, 硕士生导师, 研究方向为图论及其应用。2001年、2004年和2010年分别于兰州大学获得应用数学专业学士学位、硕士学位和博士学位。E-mail: gfwang@ytu.edu.cn。

(责任编辑: 李 根)