

文章编号: 1005-0523(2024)06-0019-09



开裂简支梁动力特性的两种解析方法对比研究

桂水荣, 谭铭军, 桂智升, 曾宏伟

(华东交通大学土木建筑学院, 江西南昌 330013)

摘要:【目的】为开展桥梁结构损伤识别和状态评估等工作,进行了开裂简支梁动力特性两种解析方法的对比研究。【方法】根据传递矩阵法和分段振型函数法基本思想,采用无质量扭转弹簧模拟裂缝引起的局部柔度,分别借助递推方法和Heaviside函数,推导了带任意数量裂缝简支梁动力特性的两种求解方法,并与ANSYS有限元结果对比分析。【结果】无论是单裂缝、双裂缝还是三裂缝梁,两种方法计算结果与有限元结果吻合较好,均具有较高的计算精度;与传递矩阵法相比,分段振型函数法在计算多裂缝梁固有频率时具有更高的计算效率,尤其是对于高阶频率,三裂缝下最大计算时间差值为16.51 s;裂缝数量增加,传递矩阵法固有频率计算时间分别增大到2.85倍,13.30倍,分段振型函数法分别增大到1.10倍,5.43倍,传递矩阵法计算时间显著增加且呈指数增长趋势;裂缝深度的变化对计算效率的影响较小。【结论】探讨裂缝深度及数量对两种方法计算效率的影响,对于提升桥梁结构损伤识别的效率和准确性具有显著的实际意义。

关键词:传递矩阵法;分段振型函数法;简支梁;裂缝;解析方法

中图分类号:TU311.3;U446

文献标志码:A

本文引用格式:桂水荣,谭铭军,桂智升,等.开裂简支梁动力特性的两种解析方法对比研究[J].华东交通大学学报,2024,41(6):19-27.

Comparative Study on Two Analytical Methods for Dynamic Characteristics of Cracked Simply Supported Beams

Gui Shuirong, Tan MingJun, Gui Zhisheng, Zeng Hongwei

(School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: 【Objective】To carry out research on damage identification and state assessment of bridge structures, this paper makes a comparative study on two analytical methods for dynamic characteristics of cracked simply supported beams. 【Method】Based on the basic ideas of transfer matrix method and segmented mode function method, a massless torsion spring was used to simulate the local flexibility caused by cracks. Two solving methods for the dynamic characteristics of simply supported beams with arbitrary numbers of cracks were derived using recursive method and Heaviside function, and compared and analyzed with the finite element results of ANSYS. 【Result】For single-crack, double-crack, and triple-crack beams, both methods yielded results that are well matched with the finite element results, demonstrating high computational accuracy. Compared to the transfer matrix method, the segmented mode shape function method exhibits higher computational efficiency in calculating the natural frequencies of beams with multiple cracks, especially for higher-order frequencies. The maximum difference in computation time under triple cracking is 16.51 seconds. As the number of cracks increased, the

收稿日期: 2024-03-09

基金项目: 国家自然科学基金项目(52268026)

computation time for natural frequencies using the transfer matrix method increases to 2.85 times and 13.30 times, while for the segmented mode shape function method is increasing to 1.10 times and 5.43 times. The computation time using the transfer matrix method significantly increases and shows an exponential growth trend. The variation in crack depth has a minor impact on computational efficiency. **【Conclusion】** Exploring the impact of crack depth and quantity on the computational efficiency of two methods has significant practical significance for improving the efficiency and accuracy of bridge structural damage identification.

Key words: transfer matrix method; segmented mode function method; simply supported beam; cracks; analytical method

Citation format: GUI S R, TAN M J, GUI Z S, et al. Comparative study on two analytical methods for dynamic characteristics of cracked simply supported beams[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2024, 41 (6): 19-27.

【研究意义】随着桥梁使用年限的不断增加,桥梁结构不可避免地会遭受一定程度的损伤。裂缝作为桥梁结构损伤的主要表现形式之一,严重影响结构的正常性能和使用寿命^[1]。因此,研究裂缝梁的动力特性具有重要的工程意义。

【研究进展】目前,在带裂缝梁式桥的研究领域内,现有文献多将裂缝梁划分为若干个子梁,这些子梁段由裂缝所分隔,裂缝通常采用无质量扭转弹簧模拟,其扭转弹簧刚度取决于裂缝深度^[2-3]。Ostachowicz等^[4]提出了一种双裂缝梁固有频率求解方法,在此方法中,每个子梁段都包含4个未知量,导致具有 n 条裂缝的梁式结构的特征方程成为 $4(n+1)$ 阶行列式。然而,当裂缝数量较多时,采用这种方法求解通常较为困难。为了降低求解难度,众多学者致力于减少特征方程行列式的阶次^[5],其中,Li^[6]采用无质量扭转弹簧模拟裂缝引起刚度损失,提出了一种具有任意数量裂缝和集中质量的变截面梁的自由振动解析方法(以下简称分段振型函数法),该方法显著优点在于对任意边界条件下的此类梁式结构,均可通过二阶行列式求得其特征方程。在此基础上,Aydin^[7]提出了一种分析方法,用于确定具有任意数量裂缝的轴向力Timoshenko梁的振动频率和振型函数,并考虑了4种不同边界条件。董磊^[8]进行了基于动力特性的裂缝损伤识别研究,形成了基于自振频率和低阶动力参数的裂缝位置和深度识别算法。Tan等^[9]针对弹簧-质量系统下的连续梁,研究了裂缝参数和弹簧质量系统参数对梁固有频率的影响,并提出了一种损伤识别方法。此外,传递矩阵法也是一种有效的裂缝梁自由振动

分析工具,这种方法是由Pestel等^[10]首次提出的,通过裂缝位置处两端子梁段的相容条件建立振型函数待定系数间的协调关系,进而求解整个梁段的待定系数。Lin等^[11]基于传递矩阵方法,提出了一种带任意裂缝数量的梁式结构动力特性计算方法,始终只需4个待定系数,极大地提高了计算效率。Attar^[12]同样利用传递矩阵法,分析了具有任意数量裂缝的阶梯梁的自振频率和振型,其方法适用于多种边界条件。马一江等^[13]基于传递矩阵方法,提出了一种求解含多条裂纹变截面简支梁固有频率的新方法,该方法降低了裂缝梁特征方程的行列式阶数,提高了动力特性的计算效率。尽管国内外学者广泛运用这两种方法对带裂缝梁结构进行了深入研究^[14],但目前还未有学者对这两种解析方法在裂缝梁动力特性计算效率方面进行过比较研究。

【创新特色】本文基于Euler-Bernoulli梁基本理论,采用无质量扭转弹簧模拟裂缝,分别借助递推方法和Heaviside函数,使用传递矩阵法和分段振型函数法推导带裂缝简支梁的频率方程,求解带裂缝结构的固有频率。**【关键问题】**研究多种裂缝特征下两种解析方法求解各阶固有频率计算时间,探讨裂缝深度及数量对两种方法计算效率的影响,对于提升桥梁结构损伤识别的效率和准确性具有显著的实际意义。

1 开裂梁局部柔度模型

图1为具有 n 条裂缝的Euler-Bernoulli简支梁,梁长为 L ,宽为 b ,高为 h ,其中 l_i 为被裂缝分割开的各区段长度, x_i 为第 i 条裂缝的坐标, a_i 为第 i 条

裂缝的深度。

根据Dimarogonas等^[2]提出的裂缝局部柔度模型,单侧开口裂缝局部柔度 θ_i 可以表示为

$$\theta_i = 5.346hf(\zeta_i) \quad (1)$$

式中: $\zeta_i = a_i/h$ 为第*i*条裂缝的相对裂缝深度; $f(\zeta_i)$ 为第*i*条裂缝的局部柔度函数,由应变能密度函数求得

$$f(\zeta_i) = 1.8624\zeta_i^2 - 3.95\zeta_i^3 + 16.375\zeta_i^4 - 37.226\zeta_i^5 + 76.81\zeta_i^6 - 126.9\zeta_i^7 + 172\zeta_i^8 - 143.97\zeta_i^9 - 66.56\zeta_i^{10} \quad (2)$$

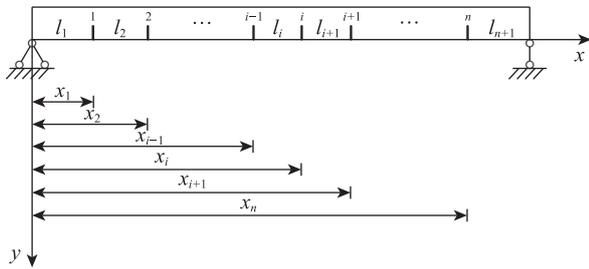


图1 n条裂缝简支梁

Fig. 1 n-crack simply supported beam

2 开裂简支梁动力特性求解原理

等截面 Euler-Bernoulli 梁自由振动方程为

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

式中: E 为材料弹性模量; I 为横截面抗弯惯性矩; m 为单位长度的质量; $y(x,t)$ 为*t*时刻*x*处的竖向位移。

假设梁在平衡位置附近做简谐振动,则有

$$y(x,t) = \varphi(x)e^{j\omega t} \quad (4)$$

式中: $\varphi(x)$ 为梁的振型函数; ω 为梁的角频率。

将式(4)代入式(3)中,则梁段振型函数可表示为

$$\varphi_i(x) = A_i \sin \beta x + B_i \cos \beta x + C_i \sinh \beta x + D_i \cosh \beta x \quad (5)$$

式中: $\beta^4 = \omega^2 m/(EI)$, A_i , B_i , C_i , D_i 均为待定系数。

2.1 传递矩阵法

根据梁体在第*i*条裂缝处满足位移、弯矩和剪力平衡条件,可得

$$\begin{cases} \varphi_i(x_i) = \varphi_{i+1}(0) \\ \varphi_i'(x_i) = \varphi_{i+1}'(0) \\ \varphi_i''(x_i) = \varphi_{i+1}''(0) \end{cases} \quad (6)$$

采用无质量扭转弹簧来模拟裂缝,梁体裂缝处的转角应满足以下关系^[11]

$$\varphi_i'(x_i) + \theta_i \varphi_i''(x_i) = \varphi_{i+1}'(0) \quad (7)$$

由式(5),式(6),式(7),可得

$$U_{i+1} = T_i U_i \quad (8)$$

式中: $U_i = \{A_i, B_i, C_i, D_i\}^T$; T_i 为梁段第*i*小段与第*i+1*小段之间的待定系数传递矩阵,

$$T_i = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix},$$

$$t_{11} = \cos \beta l_i - \frac{1}{2} \theta_i \beta \sin \beta l_i,$$

$$t_{12} = -\sin \beta l_i - \frac{1}{2} \theta_i \beta \cos \beta l_i,$$

$$t_{13} = \frac{1}{2} \theta_i \beta \sinh \beta l_i, \quad t_{14} = \frac{1}{2} \theta_i \beta \cosh \beta l_i;$$

$$t_{21} = \sin \beta l_i, \quad t_{22} = \cos \beta l_i, \quad t_{23} = 0, \quad t_{24} = 0;$$

$$t_{31} = -\frac{1}{2} \theta_i \beta \sin \beta l_i, \quad t_{32} = -\frac{1}{2} \theta_i \beta \cos \beta l_i,$$

$$t_{33} = \cosh \beta l_i + \frac{1}{2} \theta_i \beta \sinh \beta l_i,$$

$$t_{34} = \sinh \beta l_i + \frac{1}{2} \theta_i \beta \cosh \beta l_i;$$

$$t_{41} = 0, \quad t_{42} = 0, \quad t_{43} = \sinh \beta l_i, \quad t_{44} = \cosh \beta l_i。$$

采用递推方法,建立简支梁第1小段与最后1小段的待定系数传递关系

$$U_{n+1} = T_n T_{n-1} \cdots T_1 U_1 = F_n U_1 \quad (9)$$

式中:传递矩阵 F_n 可以写成

$$F_n = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \quad (10)$$

根据材料力学弯矩-曲率关系,推导出如下关系式

$$M_i = EI \frac{d^2 \varphi_i}{dx_i^2}, \quad Q_i = EI \frac{d^3 \varphi_i}{dx_i^3} \quad (11)$$

由简支梁左端的边界条件 $\varphi_1(0) = 0, M_1(0) = 0$, 可得

$$\begin{cases} B_1 + D_1 = 0 \\ -B_1 + D_1 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

即 $B_1 = D_1 = 0$ 。

则式(9)可简化为

$$\begin{cases} A_{n+1} = f_{11} A_1 + f_{13} C_1 \\ B_{n+1} = f_{21} A_1 + f_{23} C_1 \\ C_{n+1} = f_{31} A_1 + f_{33} C_1 \\ D_{n+1} = f_{41} A_1 + f_{43} C_1 \end{cases} \quad (13)$$

由简支梁右端的边界条件 $\varphi_{n+1}(l_{n+1})=0, M_{n+1}(l_{n+1})=0$, 可得

$$\begin{cases} A_{n+1} \sin \beta l_{n+1} + B_{n+1} \cos \beta l_{n+1} + \\ C_{n+1} \sinh \beta l_{n+1} + D_{n+1} \cosh \beta l_{n+1} = 0 \\ -A_{n+1} \sin \beta l_{n+1} - B_{n+1} \cos \beta l_{n+1} + \\ C_{n+1} \sinh \beta l_{n+1} + D_{n+1} \cosh \beta l_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

将式(13)代入式(14)中, 可得

$$\mathbf{H}_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (15)$$

式中: A_1, C_1 不全为零, $\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$,

$$r_{11} = f_{11} \sin \beta l_{n+1} + f_{21} \cos \beta l_{n+1} + f_{31} \sinh \beta l_{n+1} + f_{41} \cosh \beta l_{n+1},$$

$$r_{12} = f_{13} \sin \beta l_{n+1} + f_{23} \cos \beta l_{n+1} + f_{33} \sinh \beta l_{n+1} + f_{43} \cosh \beta l_{n+1},$$

$$r_{21} = -f_{11} \sin \beta l_{n+1} - f_{21} \cos \beta l_{n+1} + f_{31} \sinh \beta l_{n+1} + f_{41} \cosh \beta l_{n+1},$$

$$r_{22} = -f_{13} \sin \beta l_{n+1} - f_{23} \cos \beta l_{n+1} + f_{33} \sinh \beta l_{n+1} + f_{43} \cosh \beta l_{n+1} \circ$$

可得该裂缝梁的频率方程为

$$|\mathbf{H}_1| = 0 \quad (16)$$

2.2 分段振型函数法

可将梁段振型函数式(5)改写成

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^4 A_i S_i(x) \quad (17)$$

式中: $S_1(x) = \sinh \beta x$, $S_2(x) = \cosh \beta x$, $S_3(x) = \sin \beta x$, $S_4(x) = \cos \beta x$ 。

引进一组函数 $\bar{S}_i(x), i=1,2,3,4$, 使得这组函数满足以下关系

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1(0) & \bar{S}'_1(0) & \bar{S}''_1(0) & \bar{S}'''_1(0) \\ \bar{S}_2(0) & \bar{S}'_2(0) & \bar{S}''_2(0) & \bar{S}'''_2(0) \\ \bar{S}_3(0) & \bar{S}'_3(0) & \bar{S}''_3(0) & \bar{S}'''_3(0) \\ \bar{S}_4(0) & \bar{S}'_4(0) & \bar{S}''_4(0) & \bar{S}'''_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

由式(17), 式(18)可构造 $\bar{S}_i(x)$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1(x) \\ \bar{S}_2(x) \\ \bar{S}_3(x) \\ \bar{S}_4(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1(0) & S'_1(0) & S''_1(0) & S'''_1(0) \\ S_2(0) & S'_2(0) & S''_2(0) & S'''_2(0) \\ S_3(0) & S'_3(0) & S''_3(0) & S'''_3(0) \\ S_4(0) & S'_4(0) & S''_4(0) & S'''_4(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_1(x) \\ S_2(x) \\ S_3(x) \\ S_4(x) \end{bmatrix} \quad (19)$$

将式(17)代入式(18)中, 可得^[12]

$$\begin{cases} \bar{S}_1(x) = \frac{1}{2}(\cosh \beta x + \cos \beta x) \\ \bar{S}_2(x) = \frac{1}{2\beta}(\sinh \beta x + \sin \beta x) \\ \bar{S}_3(x) = \frac{1}{2\beta^2}(\cosh \beta x - \cos \beta x) \\ \bar{S}_4(x) = \frac{1}{2\beta^3}(\sinh \beta x - \sin \beta x) \end{cases} \quad (20)$$

采用 $\varphi_i(0), \varphi'_i(0), M_i(0)$ 和 $Q_i(0)$ 分别表示 l_i 梁段左端的竖向位移、转角、弯矩和剪力, 可得

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = A_1 S_1(0) + B_1 S_2(0) + C_1 S_3(0) + D_1 S_4(0) \\ \varphi'_1(0) = A_1 S'_1(0) + B_1 S'_2(0) + C_1 S'_3(0) + D_1 S'_4(0) \\ M_1(0) = -EI(0) \\ (A_1 S''_1(0) + B_1 S''_2(0) + C_1 S''_3(0) + D_1 S''_4(0)) \\ Q_1(0) = -EI(0) \\ (A_1 S'''_1(0) + B_1 S'''_2(0) + C_1 S'''_3(0) + D_1 S'''_4(0)) \end{cases} \quad (21)$$

将式(21), 式(19)代入式(17), 可得

$$\varphi_1(x) = \varphi_1(0) \bar{S}_1(x) + \varphi'_1(0) \bar{S}_2(x) - \frac{M_1(0)}{EI} \bar{S}_3(x) - \frac{Q_1(0)}{EI} \bar{S}_4(x), \quad x \in [0, x_1] \quad (22)$$

由简支梁左端的边界条件可得

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ M_1(0) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

则可得 l_1 梁段的振型函数为

$$\varphi_1(x) = \varphi'_1(0) \bar{S}_2(x) - \frac{Q_1(0)}{EI} \bar{S}_4(x), \quad x \in [0, x_1] \quad (24)$$

采用无质量扭转弹簧来模拟裂缝, 由式(6), 式(7), 式(24)可得

$$\varphi_{i+1}(x) = \varphi_i(x) + \theta_i \varphi''_i(x) \bar{S}_2(x - x_i) H(x - x_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (25)$$

式中: $H(x)$ 为 Heaviside 函数, $H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) dt$, 具体取值如下

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (26)$$

依据式(25), 可得 l_{n+1} 梁段的振型函数为

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) + \sum_{i=1}^n \theta_i \varphi''_i(x) \bar{S}_2(x - x_i) H(x - x_i) \quad (27)$$

对式(27)进行分析可知, 该式可表示为

$$\varphi_{n+1}(x) = \bar{S}_{2n}(x) \varphi'_1(0) - \bar{S}_{4n}(x) \frac{Q_1(0)}{EI} \quad (28)$$

式中^[8]:

$$\bar{S}_{2n}(x) = \bar{S}_2(x) + \sum_{i=1}^n \theta_i \bar{S}''_2(x) \bar{S}_2(x-x_i) + \sum_{j=r}^n \sum_{s=r-1}^{n-1} \cdots \sum_{t=2}^{n-r+2} \sum_{p=1}^{n-r+1} \theta_j \theta_s \cdots \theta_t \theta_p \bar{S}''_2(x_p) \bar{S}''_2(x_j-x_s) \cdots \bar{S}''_2(x_t-x_p) \bar{S}_2(x-x_j),$$

$$\bar{S}_{4n}(x) = \bar{S}_4(x) + \sum_{i=1}^n \theta_i \bar{S}''_4(x) \bar{S}_2(x-x_i) + \sum_{j=r}^n \sum_{s=r-1}^{n-1} \cdots \sum_{t=2}^{n-r+2} \sum_{p=1}^{n-r+1} \theta_j \theta_s \cdots \theta_t \theta_p \bar{S}''_4(x_p) \bar{S}''_2(x_j-x_s) \cdots \bar{S}''_2(x_t-x_p) \bar{S}_2(x-x_j),$$

$j > s > \cdots > t > p, \quad 2 \leq r \leq n。$

由简支梁右端边界条件可得

$$\begin{cases} \varphi_{n+1}(L) = 0 \\ \varphi''_{n+1}(L) = 0 \end{cases} \quad (29)$$

联立式(28),式(29),可得

$$\begin{cases} \varphi'(0) \bar{S}_{2n}(L) - \frac{Q_1(0)}{EI} \bar{S}_{4n}(L) = 0 \\ \varphi'(0) \bar{S}''_{2n}(L) - \frac{Q(0)}{EI} \bar{S}''_{4n}(L) = 0 \end{cases} \quad (30)$$

式中: $\varphi'(0), \frac{Q_1(0)}{EI}$ 不全为零,则可得到该裂缝梁的频率方程为

$$|\mathbf{H}_2| = \begin{vmatrix} \bar{S}_{2n}(L) & -\bar{S}_{4n}(L) \\ \bar{S}''_{2n}(L) & -\bar{S}''_{4n}(L) \end{vmatrix} = 0 \quad (31)$$

2.3 模态求解算法

由2.1节和2.2节推导的裂缝简支梁频率方程,采用半区间迭代法可求得裂缝简支梁的任意阶固有频率,对应固有振型分别回代入式(5)和式(28)中求得,计算流程如下:

- 1) 假定一个固有频率初值 Ω_0 ,求得行列式 $|\mathbf{H}|$ 的值,记 $D_0 = \mathbf{H}(\Omega_0)$;
- 2) 引入一个频率增量 $\Delta\Omega$ (例如 $\Delta\Omega = 0.5 \text{ rad/s}$),令 $\Omega_1 = \Omega_0 + \Delta\Omega$,计算 $D_1 = |\mathbf{H}(\Omega_1)|$ 。若 D_0 和 D_1 异号,则认为 $[\Omega_0, \Omega_1]$ 为第1阶角频率区间;若 D_0 和 D_1 同号,则更新 $\Omega_0 = \Omega_1$,重复上述步骤直至 D_0 和 D_1 异号,这样可确定第1阶角频率区间为 $[\Omega_0, \Omega_1]$;
- 3) 把 Ω_1 作为第2阶角频率区间的下限值,采用步骤2)中的方法确定第2阶角频率区间为 $[\Omega_1, \Omega_2]$ 。重复上述方法,即可得到第 i 阶角频率区间 $[\Omega_{i-1}, \Omega_i]$;
- 4) 令 $\Omega_{i/2} = (\Omega_{i-1} + \Omega_i)/2$, 分别计算 $D_{i-1} =$

$|\mathbf{H}(\Omega_{i-1})|, D_{i/2} = |\mathbf{H}(\Omega_{i/2})|, D_i = |\mathbf{H}(\Omega_i)|$,若 D_{i-1} 和 $D_{i/2}$ 同号,则令 $\Omega_{i-1} = \Omega_{i/2}$;若 D_{i-1} 和 $D_{i/2}$ 异号,则令 $\Omega_{i/2} = \Omega_i$,得到一个新的区间 $[\Omega_{i-1}, \Omega_{i/2}]$;

5) 重复步骤4)直至角频率区间差值足够小,并且角频率区间中值代入矩阵 \mathbf{H} ,使得其行列式接近0 ($|\mathbf{H}| < 10^{-15}$),则认为角频率区间中值为第 i 阶角频率。

3 算例分析

采用ANSYS有限元软件验证以上两种求解裂缝简支梁模态求解方法的正确性。本文以参考文献[15]中等截面带裂缝简支梁为研究对象(图2),简支梁跨径 $L=0.36 \text{ m}$,截面高 $h=0.02 \text{ m}$,宽 $w=0.02 \text{ m}$;材料参数为 $E=210.4 \text{ GPa}$, $\rho=7820 \text{ kg/m}^3$, $\mu=0.3$ 。采用ANSYS有限元软件六面体 Solid 186 单元建立带裂缝简支梁有限元模型,考虑裂缝开口深度,各有限元模型裂缝宽度均取 0.5 mm 。

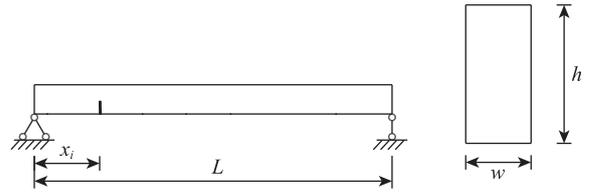


图2 等截面裂缝简支梁(x_i 为裂缝位置)

Fig. 2 Constant section cracked simply supported beam (x_i is crack location)

3.1 计算精度比较

采用传递矩阵法和分段振型函数计算单裂缝、双裂缝、三裂缝下简支梁1阶固有频率,并与文献[15]计算结果对比,如表1,表2和表3所示。从表中可以看出,对于所有裂缝工况,除裂缝深度达 15 mm 外,上述两种方法与有限元方法之间的一阶固有频率误差均小于3%;裂缝深度达 15 mm ,主梁损伤达到75%时,3种裂缝梁一阶频率误差均在3%~6%。简支梁裂缝损伤深度小于50%时,两种求解简支梁动力特性方法具有较高的准确性和可靠性;裂缝深度达75%,此时损伤过大,本文采用的裂缝局部柔度模型经验公式与有限元分析结果差异增大,需进一步优化裂缝模型来评估结构的性能。对比表1~表3分析发现,对于所有裂缝工况,传递矩阵法与分段振型函数法相比,所有结果吻合,两种解析方法适用于求解带裂缝简支梁动力特性。

表1 单裂缝简支梁的1阶固有频率比较

Tab.1 Comparison of the first natural frequency of single-crack simply supported beam

Crack location x_1 /mm	Crack depth /mm	Frequency/Hz			Error 1 /%	Error 2 /%
		Transfer matrix method①	Segmented mode function method②	FEA ③		
100	5	357.06	357.06	354.89	0.61	0.61
	10	334.69	334.69	330.94	1.13	1.13
	15	258.95	258.95	250.97	3.18	3.18
200	5	353.38	353.38	350.95	0.69	0.69
	10	319.91	319.91	314.47	1.73	1.73
	15	228.34	228.34	219.54	4.01	4.01
300	5	360.42	360.42	358.43	0.56	0.56
	10	350.07	350.07	346.82	0.94	0.94
	15	304.73	304.73	300.09	1.55	1.55

Note: Error 1= $(①-③)/③$, Error 2= $(②-③)/③$, the same below.

表2 双裂缝简支梁的1阶固有频率比较

Tab.2 Comparison of the first natural frequency of double-crack simply supported beam

Crack location x_1 /mm	Crack depth /mm	Frequency/Hz			Error 1 /%	Error 2 /%
		Transfer matrix method ①	Segmented mode function method②	FEA③		
100,300	5	347.94	347.94	345.28	0.77	0.77
	10	300.39	300.39	293.66	2.29	2.29
	15	195.91	195.91	185.30	5.73	5.73

表3 三裂缝简支梁的1阶固有频率比较

Tab.3 Comparison of the first natural frequency of three-crack simply supported beam

Crack location x_i /mm	Crack depth /mm	Frequency/Hz			Error 1 /%	Error 2 /%
		Transfer matrix method ①	Segmented mode function method②	FEA ③		
100,200,300	5	345.70	345.70	342.85	0.83	0.83
	10	293.17	293.17	287.17	2.09	2.09
	15	185.93	185.93	180.36	3.09	3.09

3.2 计算效率比较

图2所示为带裂缝简支梁为研究对象,研究不同裂缝位置、深度和数量等参数,采用传递矩阵法和分段函数法计算简支梁各阶固有频率,分别记录两种方法求解前 n 阶固有频率的计算时间(取3次平均值),计算结果如图3~图5所示。

3.2.1 单裂缝比较

由图3可知,传递矩阵法和分段振型函数法对带裂缝简支梁固有频率的计算时间不同。单裂缝下,两种方法计算频率时间 t 均随着频率阶数的增加而增加,且呈指数增长趋势,计算前15阶频率时间均小于2.60 s;传递矩阵法计算时间略小于分段振型函数法计算时间,且随着频率阶数的升高,两种方法的计算时间差逐渐减小,时间差值(传递矩阵法计算时间减去分段振型函数法计算时间)由-0.28 s变化至-0.25 s,时间差较小。裂缝深度增加导致曲线不平滑,但对计算时间影响不明显。结果表明,两种方法在计算单裂缝简支梁固有频率均具有良好的计算效率,传递矩阵法计算效率略高于分段振型函数法,说明传递矩阵法在计算上

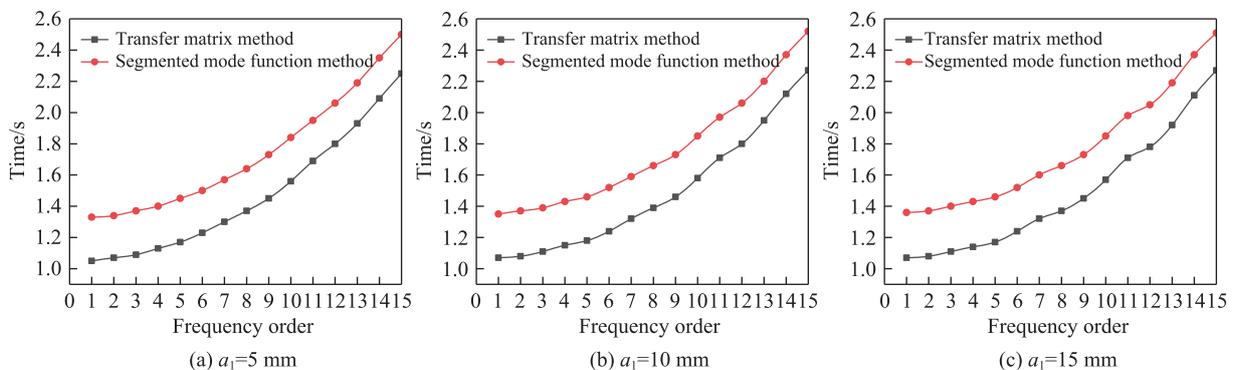


图3 单裂缝简支梁前15阶固有频率计算时间对比($x_1=100$ mm)

Fig. 3 Comparison of calculation time for the first 15 natural frequency of a single-crack simply supported beam ($x_1=100$ mm)

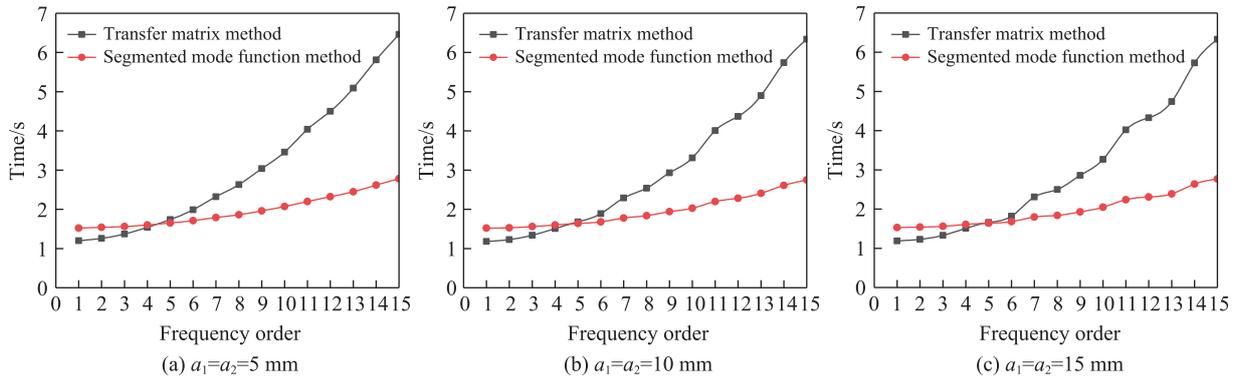


图4 双裂缝简支梁前15阶固有频率计算时间对比 ($x_1=100\text{ mm}, x_2=200\text{ mm}$)

Fig. 4 Comparison of calculation time for the first 15 natural frequency of double-crack simply supported beam ($x_1=100\text{ mm}, x_2=200\text{ mm}$)

具有一定的优势。然而,随着计算频率阶数的升高,这种优势逐渐减少。

3.2.2 双裂缝比较

采用分段振型函数法和传递矩阵法计算双裂缝简支梁前15阶频率,两种方法计算时间如图4所示。从图4中可知,计算双裂缝简支梁前4阶频率,传递矩阵法计算时间略低于分段振型函数法;计算频率大于4阶后,传递矩阵法计算时间高于分段振型函数法,且两种方法计算时间差呈逐渐增大趋势,计算差值由-0.32 s增大至3.61 s。结果表明,分段振型函数法在求解双裂缝简支梁低阶固有频率时,计算效率略低于传递矩阵法,但随着计算频率阶数增加,特别是需计算高阶频率时,分段振型函数法计算效率远大于传递矩阵法。

两种方法的计算时间曲线出现交点,这主要是由于在求解带裂缝梁固有频率时,计算时间 t 包括两部分(表4):① 计算裂缝梁的频率方程 $|H|=0$ 的时间 t_1 ;② 采用半区间迭代法求解频率方程的时间 t_2 。由表4可知,计算频率方程只需计算一次,计算时间 t_1 不随频率阶数增加而增加,且传递矩阵法计算裂缝梁频率方程的时间 t_1 小于分段振型函数法,时间差值为-0.339 s;而求解频率方程需要反复迭代计算行列式 $|H|$,计算时间 t_2 随频率阶数增加而增加,传递矩阵法求解频率方程的时间 t_2 大于分段振型函数法,且时间差呈逐渐增大趋势,时间差由0.015 s增大至4.017 s。故两种方法的计算时间曲线出现交点,在交点之前,传递矩阵法计算时间更小,在交点之后,分段振型函数法计算时间更小。

表4 双裂缝简支梁固有频率计算时间比较

Tab.4 Comparison of calculation time for natural frequency of double-crack simply supported beam s

Frequency order	Transfer matrix method			Segmented mode function method		
	t_1	t_2	$t=t_1+t_2$	t_1	t_2	$t=t_1+t_2$
1	1.175	0.024	1.199	1.514	0.009	1.524
2	1.175	0.082	1.258	1.514	0.023	1.537
3	1.175	0.197	1.372	1.514	0.051	1.565
4	1.175	0.363	1.538	1.514	0.090	1.604
5	1.175	0.562	1.737	1.514	0.136	1.650
6	1.175	0.811	1.986	1.514	0.193	1.708
7	1.175	1.144	2.319	1.514	0.273	1.787
8	1.175	1.456	2.631	1.514	0.345	1.860
9	1.175	1.868	3.043	1.514	0.446	1.961
10	1.175	2.282	3.457	1.514	0.551	2.066
11	1.175	2.861	4.036	1.514	0.690	2.205
12	1.175	3.326	4.501	1.514	0.803	2.318
13	1.175	3.911	5.086	1.514	0.939	2.453
14	1.175	4.639	5.815	1.514	1.105	2.619
15	1.175	5.282	6.457	1.514	1.265	2.779

对 t_2 进一步分析,在求解裂缝梁频率方程时,两种方法均采用半区间迭代法进行求解,而传递矩阵法计算时间 t_2 远大于分段振型函数法,且时间差呈逐渐增大趋势。这是由于采用半区间迭代法求解时,反复迭代计算行列式 $|H|$,而计算式复杂度是影响行列式计算时间的重要因素。传递矩阵法在求解多裂缝梁固有频率时,式(9)使用矩阵乘法,矩

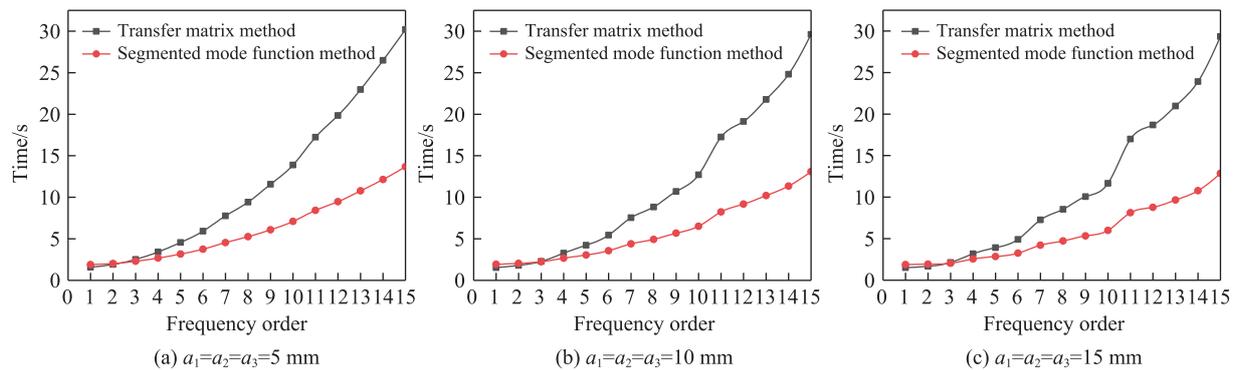


图5 三裂缝简支梁前15阶固有频率计算时间对比($x_1=100$ mm, $x_2=200$ mm, $x_3=300$ mm)

Fig. 5 Comparison of calculation time for the first 15 natural frequency of three-cracks simply supported beam ($x_1=100$ mm, $x_2=200$ mm, $x_3=300$ mm)

阵乘法是计算量较大的运算,在求解时会使计算式数量增大;且2.1节推导过程中均使用符号矩阵,计算多裂缝时,多次使用矩阵乘法,使得传递矩阵 F_n 中 f_{ij} 计算式数量迅速增大,导致推导出的频率方程 $|H|=0$ 计算式数量增大。因而传递矩阵法求解频率方程的时间 t_2 远大于分段振型函数法。

3.2.3 三裂缝比较

采用分段振型函数法和传递矩阵法计算三裂缝简支梁前15阶频率,两种方法计算时间如图5所示。从图5中可知,当简支梁出现三裂缝时,计算前2阶频率,传递矩阵法的计算时间略低于分段振型函数法,计算频率大于2阶之后,传递矩阵法计算时间高于分段振型函数法,且两种方法的计算时间差呈逐渐增大趋势,计算差值由 -0.35 s增大至 16.51 s。与3.2.2节结果一致,分段振型函数法在求解三裂缝简支梁低阶固有频率时的计算效率略低于传递矩阵法,但随着计算频率阶数的增加,特别计算高阶频率时,分段振型函数法的计算效率远大于传递矩阵法。并且计算时间曲线交点的前移,也进一步验证了3.2.2节分析的正确。

从图3~图5中可知,传递矩阵法在单裂缝、双裂缝、三裂缝下求解前15阶频率的最大计算时间分别为 2.27 , 6.46 , 30.20 s,后二者时间分别增大到单裂缝的 2.85 倍, 13.30 倍。分段振型函数法在单裂缝、双裂缝、三裂缝下求解前15阶频率的最大计算时间分别为 2.52 , 2.78 , 13.69 s,后二者时间分别增大到单裂缝的 1.10 倍, 5.43 倍。结果表明,随着裂缝数量的增加,求解固有频率的计算时间显著增加,传递矩阵法计算时间增长速度远大于分段函数法。

4 结论

1) 基于开裂梁局部柔度模型,采用无质量扭转弹簧模拟裂缝,推导了带任意数量开口裂缝的简支梁动力特性两种解析求解方法,并与文献结果对比,验证了传递矩阵法和分段振型函数法求解带裂缝梁桥动力特性的可靠性。

2) 求解单裂缝简支梁固有频率,计算时间均小于 0.26 s,时间差值由 -0.28 s增大至 -0.25 s,两种方法均具有良好的计算效率,传递矩阵法计算效率略高于分段振型函数法,且差值绝对值逐渐减小;求解多裂缝简支梁固有频率,双裂缝下时间差值由 -0.32 s增大至 3.61 s,三裂缝下时间差值由 -0.35 s增大至 16.51 s,分段振型函数法计算效率明显优于传递矩阵法,特别是计算高阶频率。

3) 裂缝参数对求解简支梁固有频率计算效率影响不同,随着裂缝数量增加,固有频率计算时间显著增加,传递矩阵法最大计算时间分别增大到 2.85 倍, 13.30 倍,分段振型函数法分别增大到 1.10 倍, 5.43 倍。

参考文献:

- [1] 徐伟. 周期性有砟轨道结构垂向弯曲振动波复频散分析[J]. 华东交通大学学报, 2023, 40(4): 40-47.
XU W. Complex dispersion analysis of vertical bending vibration wave of periodic ballasted track structure[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2023, 40(4): 40-47.
- [2] DIMAROGONAS A D. Vibration of cracked structures: a state of the art review[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1996, 55(5): 831-857.

- [3] 杨骁,王天宇. 基于裂纹附加模态的梁裂纹损伤识别方法[J]. 振动工程学报, 2019, 32(3): 480-489.
YANG X, WANG T Y. Identification of crack damage for Euler-Bernoulli beam based on crack-induced additional mode[J]. Journal of Vibration Engineering, 2019, 32(3): 480-489.
- [4] OSTACHOWICZ W M, KRAWCZUK M. Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam[J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 150(2): 191-201.
- [5] CADDEMI S, CALIO I. Exact closed-form solution for the vibration modes of the Euler-Bernoulli beam with multiple open cracks[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 327(3/5): 473-489.
- [6] LI Q S. Free vibration analysis of non-uniform beams with an arbitrary number of cracks and concentrated masses[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 252(3): 509-525.
- [7] AYDIN K. Vibratory characteristics of Euler-Bernoulli beams with an arbitrary number of cracks subjected to axial load[J]. Journal of Vibration and Control, 2008, 14(4): 485-510.
- [8] 董磊. 具有裂缝病害的简支梁桥动力特性计算及损伤识别方法[D]. 长春: 吉林大学, 2016.
DONG L. Dynamic characteristics calculation and damage identification method of cracked simply supported bridge[D]. Changchun: Jilin University, 2016.
- [9] TAN G, ZHU Z, WANG W, et al. Free vibration analysis of a uniform continuous beam with an arbitrary number of cracks and spring-mass systems[J]. Arabian Journal for Science and Engineering, 2018, 43(9): 4619-4634.
- [10] PESTEL E C. Matrix methods in elastomechanics[M]. New York: McGraw-Hill Publish, 1963.
- [11] LIN H P, CHANG S C, WU J D. Beam vibrations with an arbitrary number of cracks[J]. Journal of Sound Vibration, 2002, 258(5): 987-999.
- [12] ATTAR M. A transfer matrix method for free vibration analysis and crack identification of stepped beams with multiple edge cracks and different boundary conditions [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2012, 57(1): 19-33.
- [13] 马一江,李园园,陈国平,等. 含多条裂纹变截面简支梁的自由振动[J]. 振动与冲击, 2019, 38(19): 149-154.
MA Y J, LI Y Y, CHEN G P, et al. Free vibration of a variable cross-section simple supported beam with multi-crack[J]. Journal of Vibration and Shock, 2019,38(19): 149-154.
- [14] 谭国金,刘子煜,王龙林,等. 车辆作用下中小跨径裂缝简支梁桥自振特性分析[J]. 振动工程学报, 2016, 29(5): 831-841.
TAN G J, LIU Z Y, WANG L L, et al. Free vibration analysis of a small or medium-span cracked simply supported bridge considering bridge-vehicle interaction[J]. Journal of Vibration Engineering, 2016, 29(5): 831-841.
- [15] KHALKAR V. Paradigm for natural frequency of an uncracked simply supported beam and its application to single-edged and multi-edged cracked beam[J]. Vibrations in Physical Systems, 2018, 29: 1-12.



第一作者:桂水荣(1979—),女,副教授,博士,硕士生导师,研究方向为公路桥梁车桥耦合振动,损伤梁桥动力特性及承载性能,桥梁施工技术。

E-mail: guishuirong@163.com。



通信作者:谭铭军(1996—),男,硕士研究生,研究方向为桥梁损伤。E-mail: 1563005054@qq.com。

(责任编辑:吴海燕)