

基于非线性 Mohr-Coulomb 破坏准则的边坡稳定性严格上限变分解析

周璐¹, 陶志鹏², 谢玉堂³, 罗伟^{4*}, 胡世红⁵, 赵炼恒⁵

(1. 江西省路港工程有限公司, 江西 南昌 330008; 2. 江西省交投养护科技集团有限公司, 江西 南昌 330213; 3. 江西省港航建设投资集团有限公司, 江西 南昌 330008; 4. 华东交通大学土木建筑学院, 江西 南昌 330013; 5. 中南大学土木工程学院, 湖南 长沙 410075)

摘要: 为了在边坡稳定性分析中考虑岩土体材料的强度非线性特征, 提出了一种基于坡趾以下滑动机制的边坡稳定性严格上限变分解析方法。基于上限定理, 构建均质边坡旋转破坏机制, 根据变分原理的欧拉方程和变分横截条件、边界条件等获得了极限状态下滑动面及其应力, 通过能耗平衡建立边坡高度的隐式方程, 进而采用粒子群优化算法得到了边坡的临界高度, 在此基础上引入强度折减技术, 获得边坡的安全系数。通过与 OPTUM G2 以及 FLAC 3D 有限元分析软件所得结果进行对比验证, 发现所提出方法得到的边坡潜在滑动面及其上主应力分布与 OPTUM G2 和 FLAC 3D 计算结果均吻合良好, 且安全系数误差较小。说明本文变分解析方法可以用于评估坡趾以下滑动机制的均质边坡稳定性, 其理论分析结果具有一定的理论研究意义和工程应用价值。

关键词: 边坡稳定性分析; 基底破坏机制; 非线性 Mohr-Coulomb 破坏准则; 上限分析; 变分分析; 有限差分分析

中图分类号: P642.22

文献标志码: A

Analysis of strict upper limit variation of slope stability based on nonlinear Mohr-Coulomb failure criterion

ZHOU Lu¹, TAO Zhipeng², XIE Yutang³, LUO Wei^{4*}, HU Shihong⁵, ZHAO Lianheng⁵

(1. Jiangxi Lugang Engineering Co., Ltd, Jiangxi Nanchang, 330008; 2. Jiangxi Communications Investment Maintenance Technology Group Co., Ltd, Jiangxi Nanchang, 330213; 3. Jiangxi Port and Navigation Construction Investment Group Co., Ltd, Jiangxi Nanchang, 330008; 4. School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Jiangxi Nanchang, 330013; 5. School of Civil Engineering, Central South University, Hunan Changsha, 410075)

Abstract: In order to consider the nonlinear characteristics of rock and soil materials in slope stability analysis, a rigorous upper bound variational analysis method for slope stability based on the toe-below failure mechanism is proposed. Based on the upper bound theorem of limit analysis, a rotational failure mechanism of homogeneous slope was established. The sliding surface and its stress under limit state were obtained according to the Euler equation of variational principle, variational transversality conditions and boundary conditions. The implicit equation of slope height is established through the energy equilibrium principle, and the critical height of slope was optimized by particle swarm optimization algorithm. The slope factor of safety (FOS) is obtained. Comparisons with the results obtained by OPTUM G2 and FLAC 3D were conducted, and it was found that the potential sliding surface of the slope and the principal stress distribution on it obtained by the proposed method are in good agreement with the OPTUM G2 and FLAC 3D calculation results, and the error of the safety factor is small. Therefore, the variational analysis method could be used to evaluate the stability of homogeneous slopes. The results of theoretical analysis have certain theoretical research significance and engineering application value.

Key words: slope stability analysis; base failure mechanism; nonlinear Mohr-Coulomb failure criterion; upper bound analysis; variation analysis; Finite difference analysis

边坡稳定性一直是土木工程研究人员关注的主要问题, 也是岩土领域的研究热点。常用的边坡稳定性分析方法主要包括极限平衡法、有限元或有限差分, 以及极限分析法^[1-3]。其中, 极限分析法物理意义明确并且可以获得严格的理论解, 因此广泛应用于边坡稳定性问题。王均星^[4]等将有限元离散思想融入上限方法中, 利用

收稿日期: 2024-09-24

基金项目: 国家自然科学基金项目(52268063, 52108320); 江西省自然科学基金项目(20224BAB204063); 江西省交通运输厅科技项目(2020Z0001, 2021H0042, 2021Z004)

上限有限元法求解了土坡的极限承载力和安全系数。屈春来^[5]等考虑边坡滑出点位置的不确定性,建立非均质成层边坡三种破坏机制,分别推导了边坡极限承载力上限解。汪小刚^[6]等基于极限分析上下限定理,以节点速度或应力为未知量,建立机动许可速度场和建立许可应力场,建立了边坡稳定性的安全系数上、下限数学优化问题,形成了一套完整的求解边坡稳定性的极限分析有限元体系。

传统的边坡稳定性分析通常假定土体服从线性 Mohr-Coulomb (M-C) 准则,而大量研究表明^[7-10],土体材料具有明显的强度非线性特征。上限定理表明,增大材料的强度不会降低结构的承载能力。杨小礼^[9]等提出采用外切线法,引入非线性准则的瞬时非线性强度指标,从而建立边坡稳定性的多变量非线性优化问题,使得边坡稳定性极限分析可以拓展至强度非线性准则。在此基础上,贺志军^[11]等利用极限分析上限法以及蒙特卡洛法开展了边坡稳定性可靠度分析,并分析了非线性强度准则参数变异性的影响。唐高朋^[12]等基于非线性 M-C 准则,引入多点切线法和强度折减法,建立了任意斜条分的多块体滑动破坏机制,并考虑坡顶均布荷载和地震荷载的影响,推导了边坡安全系数通用计算公式。ZHAO 等^[13]基于上限分析方法,讨论了非线性 M-C 破坏准则下抗剪强度折减策略对均质边坡安全系数的影响。

然而上述研究大多采用单一外切线法引入非线性准则的瞬时抗剪强度指标,从本质上讲仍属于线性分析,并非真正地引入非线性破坏准则,不能有效地反映出强度参数随应力状态变化的非线性特征。而唐高朋^[12]等采用的多点切线法虽然可以反映强度非线性问题,但该方法需要引入多个瞬时强度指标,增加了非线性规划问题的维度与复杂性。此外,在传统的极限分析方法中,绝大多数研究需要假定滑动面为圆弧面或者对数螺旋面,但是已有研究表明在非线性准则下,边坡的滑动面为多组对数螺旋线的组合,且安全系数的计算结果与假定的破坏机制密切相关,如果全部按照假定的破坏面计算,则计算结果可能与真实情况存在较大差异。

变分法可以同时获得临界状态下边坡潜在滑动面和应力分布,是一种理论严密的方法。Zhang 等^[7]、Baker 等^[14]基于变分原理推导了非线性准则下均质边坡稳定性和承载力的上限解答。赵炼恒等^[15]基于变分原理推导了三参数非线性准则下的边坡潜在滑动面和应力分布,并采用蚁群智能优化算法获得了边坡临界高度和安全系数。上述研究仅针对滑动面过坡趾点的情况,尚未探究滑动面在坡趾以下的模式。滑动面过坡趾以下的破坏模式也是均匀土质边坡一种重要的失稳类型,而对于发生坡趾以下失稳的这类边坡,若采用滑动面过坡趾点的破坏模式进行分析必然导致边坡稳定性分析结果的过高估计,从而可能造成巨大的经济损失或更为严重的后果。因此,在边坡稳定性分析中考虑坡趾以下破坏模式可以更为准确地把握边坡潜在失稳机制,而目前对于坡趾以下破坏模式且完全反映强度非线性特征的边坡稳定性严格上限解析理论尚未完善。

因此,本文基于上限定理和非线性 M-C 破坏准则,建立了坡趾以下破坏机制,基于变分原理推导临界滑动面的表达式,获得极限状态下滑动面及其应力分布,进而采用粒子群优化算法得到了边坡的临界高度。同时引入强度折减技术,分别与 Optum G2 和 FLAC 3D 对比了平缓边坡安全系数及其对应的潜在滑动面和滑动面上的应力分布,以说明本文方法对分析平缓边坡稳定性的有效性。该方法无需假定滑动面,可真实反映岩土体材料强度非线性特征。完善了现有边坡稳定性严格上限解析理论,为该类型破坏机制的边坡稳定性分析提供参考。

1 非线性 M-C 准则

传统的边坡稳定性分析主要基于线性 Mohr-Coulomb 准则,然而大量研究表明,岩土体材料具有明显的非线性特征。对于非线性 Mohr-Coulomb 准则的表达式,常采用幂指数形式来表达,如式(1)所示。

$$\tau = c_0 \left(1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_t} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (1)$$

式中: τ 和 σ_n 分别为破坏面上的切应力和正应力; c_0 为初始黏聚力($c_0 \geq 0$),代表包络线与纵轴的截距; σ_t 为单轴抗拉强度($\sigma_t \geq 0$); m 为非线性参数,决定着强度包络线的弯曲程度,当 $m=1$ 时,强度包络线为直线,即为线性 Mohr-Coulomb 准则,式(1)变为下式:

$$\tau = c_0 + \frac{c_0}{\sigma_t} \sigma_n \quad (2)$$

其中 c_0 即为黏聚力 c , c_0/σ_t 为线性 Mohr-Coulomb 准则强度包络线的斜率 $\tan \varphi$ 。将式(1)绘制成曲线,如图 1

式中， σ 和 τ 分别为滑动面上正应力和切应力， r 为滑动面的旋转半径， θ 为极径与水平方向的夹角， θ_0 和 θ_n 分别为滑入点和滑出点与旋转中心的连线与水平方向的夹角。

2.2 外力功率

本文仅考虑重力荷载，故临界状态下重力功率为：

$$W = W_{el} - W_I - W_{II} - W_{III} - W_{IV} \quad (8)$$

式中： W 为滑动体的重力功率， W_{el} 、 W_I 、 W_{II} 、 W_{III} 、 W_{IV} 分别计算如下：

$$W_{el} = \Omega \gamma \int_{x_0}^{x_n} [y(x_c - x)] dx \quad (9a)$$

$$W_I = \Omega \frac{\gamma}{2} L_1^2 \cos \alpha \sin \alpha \left(r_0 \cos \theta_0 - \frac{2}{3} L_1 \cos \alpha \right) \quad (9b)$$

$$W_{II} = \Omega \gamma L_1 L_2 \sin \alpha \left(r_0 \cos \theta_0 - L_1 \cos \alpha - \frac{L_2}{2} \right) \quad (9c)$$

$$W_{III} = \Omega \frac{\gamma}{2} L_2 h_1 \left(r_0 \cos \theta_0 - L_1 \cos \alpha - \frac{2}{3} L_2 \right) \quad (9d)$$

$$W_{IV} = \Omega \gamma L_3 h_1 \left(r_0 \cos \theta_0 - L_1 \cos \alpha - L_2 - \frac{L_3}{2} \right) \quad (9e)$$

式中： γ 为岩土体材料容重，单位 kN / m^3 。

根据虚功率平衡方程，可知：

$$\Sigma D = W = W_{el} - (W_I + W_{II} + W_{III} + W_{IV}) \quad (10)$$

将式(9)代入式(10)中并整理可得：

$$W_I + W_{II} + W_{III} + W_{IV} - (W_{el} - \Sigma D) = \Omega (AL_1^3 + BL_1^2 + CL_1 + E) = 0 \quad (11)$$

其中：

$$A = \frac{\gamma \sin \alpha}{6} \left(-2 \cos^2 \alpha + \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha}{\tan \beta} - \frac{\sin^2 \alpha}{\tan^2 \beta} \right) \quad (12a)$$

$$B = \frac{\gamma}{2} \left[r_0 \cos \theta_0 \sin \alpha \left(\cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\tan \beta} \right) + h_1 \left(\frac{\sin \alpha}{\tan \beta} - \cos \alpha \right)^2 \right] \quad (12b)$$

$$C = \frac{\gamma h_1}{2} \left[\left(h_1 \left(\frac{1}{\tan \beta} \right) - 2 r_0 \cos \theta_0 \right) \left(\cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\tan \beta} \right) \right] \quad (12c)$$

$$E = \frac{\gamma h_1}{6} \left[r_0 \cos \theta_0 \left(6L - \frac{3h_1}{\tan \beta} \right) + \left(\frac{h_1^2}{\tan^2 \beta} - 3L^2 \right) \right] - \frac{W_{el} - \Sigma D}{\Omega} \quad (12d)$$

2.3 最小上限解条件

临界状态下，滑动面上每一点都达到屈服，且滑动面仍处于平衡状态，对于平面应变问题，滑动体的力学平衡方程如下：

$$H = \int_{x_0}^{x_n} (\tau - \sigma y') dx \quad (13a)$$

$$V = \int_{x_0}^{x_n} [\sigma + \tau y' - \gamma(y - y_1)] dx \quad (13b)$$

$$M = \int_{x_0}^{x_n} [(\tau - \sigma y')y - (\sigma + \tau y')x + \gamma(y - y_1)x] dx \quad (13c)$$

其中 H 、 V 分别为滑动体水平和竖直方向的合力， M 为滑动体力系对原点 O 的矩。

根据虚功原理，在容许的位移场下，滑动体的总虚功可写为

$$I = \delta u H + \delta v V + \delta \Omega M \quad (14)$$

式中， δu 、 δv 、 $\delta \Omega$ 分别为水平、竖直和转动的虚位移。

将式(13)代入式(14)可得：

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{x_0}^{x_n} \left(\delta u (\tau - \sigma y') + \delta v [\sigma + \tau y' - \gamma (y - y_1)] \right. \\
 &\quad \left. + \delta \Omega [(\tau - \sigma y') y - (\sigma + \tau y') x + \gamma (y - y_1) x] \right) dx \\
 &= \delta \Omega \int_{x_0}^{x_n} \left[\tau \left(\left(\frac{\delta u}{\delta \Omega} + y \right) + y' \left(\frac{\delta v}{\delta \Omega} - x \right) \right) + \sigma \left(\left(\frac{\delta v}{\delta \Omega} - x \right) - y' \left(\frac{\delta u}{\delta \Omega} + y \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \gamma (y - y_1) \left(\frac{\delta v}{\delta \Omega} - x \right) \right] dx
 \end{aligned} \tag{15}$$

经过简化可得：

$$I = \delta \Omega \int_{x_0}^{x_n} F dx \tag{16}$$

其中：

$$F = \sigma \left[\left(\frac{\delta v}{\delta \Omega} - x \right) - y' \left(\frac{\delta u}{\delta \Omega} + y \right) \right] + \tau \left[\left(\frac{\delta v}{\delta \Omega} - x \right) y' + \left(\frac{\delta u}{\delta \Omega} + y \right) \right] - \gamma (y - y_1) \left(\frac{\delta v}{\delta \Omega} - x \right) \tag{17}$$

所以总虚功表达式是典型的积分型泛函，令：

$$X = \frac{\delta v}{\delta \Omega} - x = x_c - x = r \cos \theta \tag{18a}$$

$$Y = \frac{\delta u}{\delta \Omega} + y = -y_c + y = r \sin \theta \tag{18b}$$

因此泛函 F 可表示为

$$F = \sigma (X - Y y') + \tau (X y' + Y) - \gamma (Y + y_c - y_1) X \tag{19}$$

当 I 的一阶变分为零时，边坡处于临界状态^[7,14]。此时，泛函 F 满足如下欧拉方程。

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma'} \right) - \frac{\partial F}{\partial \sigma} + \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma} = 0 \tag{20a}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \tau'} \right) - \frac{\partial F}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial G}{\partial \tau} = 0 \tag{20b}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \tag{20c}$$

其中， G 为滑动面上 σ 和 τ 的相关关系，即为非线性 M-C 准则。

$$G(\sigma, \tau) = \tau - f(\sigma) = \tau - (1 + \sigma / \sigma_t)^{1/m} \tag{21}$$

因此

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma} = - \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} = - \tan \varphi_t \tag{22}$$

将式(17)代入(18a)和(18b)中可得

$$X - Y y' + \lambda \tan \varphi_t = 0 \tag{23}$$

$$-(Y + X y') + \lambda = 0 \tag{24}$$

因此，得

$$\frac{(-X + Y y')}{(Y + X y')} = \tan \varphi_t \tag{25}$$

则根据图 2 和式(18)可得

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} / \frac{dx}{d\theta} = \frac{(r' \sin \theta + r \cos \theta)}{(r \sin \theta - r' \cos \theta)} \tag{26}$$

将式(18)、(26)代入式(25)可得

$$\frac{dr}{d\theta} = r \tan \varphi_t \tag{27}$$

由式(27)可知，只有当 φ_t 为常量时，边坡潜在滑移面为单一对数螺旋线。而由于岩土材料的强度非线性属性，强度参数与应力相关，故在非线性准则条件下，边坡潜在滑动面为多组对数螺旋线组合。

同理，将式(19)、(21)代入式(20c)中可得

$$\frac{d\sigma}{dx}Y - \frac{d\tau}{dx}X + 2\tau - \gamma X = 0 \quad (28)$$

其中

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{d\sigma}{dx} \tan \varphi_t \quad (29a)$$

$$\frac{d\sigma}{dx} = -\frac{d\sigma}{d\theta} \frac{1}{(r' \cos \theta - r \sin \theta)} \quad (29b)$$

则可得

$$\frac{d\sigma}{d\theta} + 2\tau - \gamma r \cos \theta = 0 \quad (30)$$

由变分极值原理可知，当极值曲线的端点不固定时，泛函必须满足变分横截条件。

$$\left[F - (y' - y_1') F_{y'} \right]_{x=x_i} = 0 \quad (31)$$

$$\left[\begin{aligned} &\sigma(X - Yy') + \tau(Xy' + Y) - k_y y(Y + y_c - y_1)X - \frac{1}{2}k_x y(Y + y_c - y_1)(Y + y_1 - y_c) \\ &-(y' - y_1')(-\sigma Y + \tau X) \end{aligned} \right]_{x=x_i} = 0 \quad (32)$$

在滑动面端点处，有

$$(y - y_1)_{x=x_i} = 0 \quad (33)$$

再结合式(18)和(26)可得

$$\left[\sigma(\cos \theta - \sin \theta y_1') + \tau(\sin \theta + \cos \theta y_1') \right]_{x=x_i} = 0 \quad (34)$$

于是，根据式(27)和(30)，并结合边界条件可求解临界状态下的边坡潜在滑动面及其上应力分布，进一步根据虚功率原理可以得到边坡高度 h_1 。在已知边坡高度的情况下，通过折减强度参数，可以得到边坡的安全系数。具体计算流程见后文。

2.4 强度折减技术

强度折减技术是由 Bishop 在 1955 年提出的，后来经过众多学者的研究逐渐完善。在外荷载保持不变的情况下，边坡内土体发挥的最大抗剪强度与外荷载在边坡内产生的实际剪应力之比定义为抗剪强度系数。

强度折减的原理就是对土体强度参数除以一个折减系数 F_s ，得到新的土体强度参数，然后将新的土体强度参数继续试算，一直试算到边坡达到临界状态时，即 F_s 再稍微大一点，边坡就会发生破坏，折减系数 F_s 就是边坡的安全系数。对于非线性 M-C 破坏准则，如式(1)所示，当引入强度折减技术时，实际上是对初始黏聚力 c_0 进行折减^[9,13]。假设土体的最大、最小主应力分别为 σ_1 、 σ_3 ，其应力状态如图 3 所示。本文在严格上限变分解析的基础上，即不需要假定破坏面的前提下，引入强度折减技术，对土体强度参数进行折减，从而获得边坡极限状态下的安全系数。

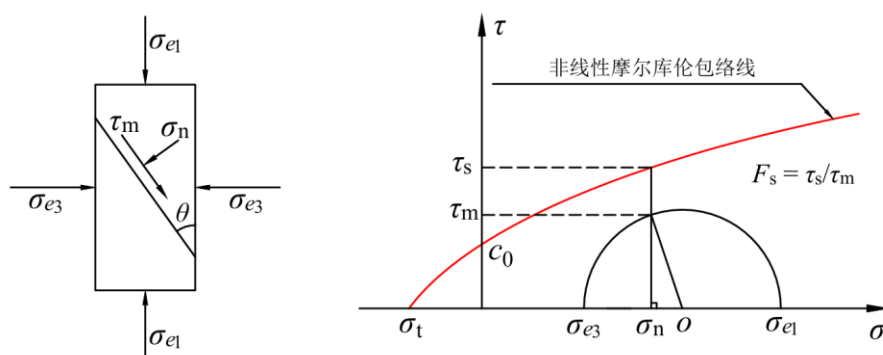


图 3 单元应力状态与非线性 M-C 准则强度折减示意图

Fig. 3 Schematic diagram of unit stress state with nonlinear M-C criterion strength discounting

2.5 求解步骤

根据 2.1-2.3 节的内容，可以通过边坡稳定性分析严格上限变分解析，在不假定滑动面破坏形式的前提下，获得边坡滑动面过坡趾以下时的临界高度，具体的步骤如下：

- 1) 已知边坡坡底角度、坡顶角度以及岩土体材料的强度参数；

- 2) 假定初值 θ_0 和 r_0 ，根据式(34)计算滑入点正应力 σ_0 ；
- 3) 假定角度增量为 $\Delta\theta$ ，则 $\theta_i = \theta + \Delta\theta$ ，采用四阶 Runge-Kutta 计算边坡滑动面各点的坐标 (r_i, θ_i) 和应力值 σ_i 和 τ_i ；
- 4) 计算滑动面上的外力功率和内能耗散功率，根据虚功率平衡原理，计算 L_1 ；
- 5) 根据几何关系计算边坡的坡度和高度，并判断与已知边坡坡形参数是否相等，若不相等，则返回第 2 步重新计算；
- 6) 最终输出 θ_0 、 r_0 和 h_1 得到均质边坡临界高度最优上限解及其对应的潜在滑动面。

基于 MATLAB 2021b 平台，对上述过程进行了编程实现，并借助粒子群算法优化了边坡临界高度。需要说明的是，本文上限变分解析方法仅针对边坡滑动面在坡趾以下的破坏机制，对于滑动面过坡趾的情况，可参考 Zhang 等^[7]。

3 非线性有限差分分析

目前的数值分析软件中对于非线性破坏准则本构如非线性 Mohr-Coulomb 准则的嵌入尚有待深入研究，其中较多也只是通过将非线性强度参数等效转换为线性强度参数的方式来实现，并不能真实反映岩土体材料的非线性属性。基于此，FU et al.(2009)^{[16][16]}采用有限元方法，根据每一增量步的单元应力状态，并以安全系数最小为依据获得单元瞬时抗剪强度参数，以此来计算边坡的安全系数。Sun et al.(2021)^[17]基于切线法计算出各个单元的瞬时 Mohr-Coulomb 强度参数，将非线性幂指数型破坏准则引入到考虑强度折减的边坡稳定性有限元分析中，提出了一种考虑强度非线性特征的边坡稳定性有限元强度折减法。

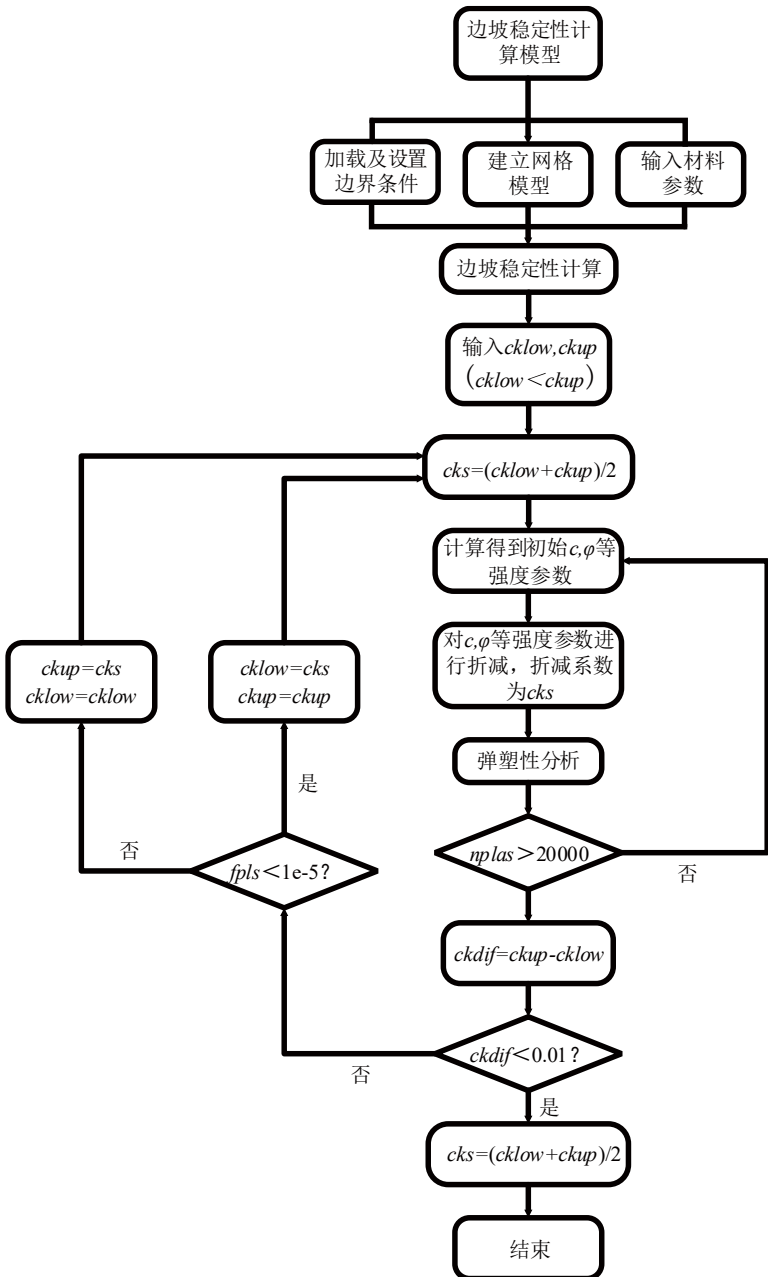


图 4 非线性破坏准则下强度折减分析流程图

Fig. 4 Flow chart of strength reduction analysis under nonlinear failure criterion

本文在 FU et al. (2009)^[16]及 SUN et al.(2021)^{[17][17]}的基础上，利用 FLAC 3D 数值模拟软件的有限差分分析，考虑强度折减技术以及岩土体材料的非线性，计算边坡的安全系数及滑动面上的应力分布，并且与本文方法所计算结果进行对比验证。其原理如下：借助有限元离散的思想，将模型离散为有限单元，同时进行初始地应力平衡，获得单元初始应力，根据单元应力与抗剪强度参数的关系，获得单元的初始抗剪强度参数，然后将抗剪强度参数进行折减，折减系数为 F_s ，再将折减后的抗剪强度参数赋值给单元并进行下一步的弹塑性计算，再次获得单元应力。如此反复，即可获得考虑岩土体材料非线性的边坡安全系数。其详细的流程见图 4，其中 c 、 φ 分别为单元的黏聚力、内摩擦角； $ckup$ 、 $cklow$ 是用户给出的折减系数的上、下限值； cks 是折减系数； $nplas$ 是弹塑性分析的次数； $fpls$ 是弹塑性分析的收敛公差； $ckdif$ 是上下限值的差值。

4 对比分析

为了验证本文对边坡滑动面过坡趾下方破坏的计算方法的有效性，分别采用两组不同的边坡算例，在线性破坏准则以及非线性破坏准则条件下进行计算，将计算结果与本文方法所得计算结果进行对比，从而验证本文方法的可靠性。

4.1 OPTUM G2 线性破坏准则条件下计算结果对比验证

采用两组不同抗剪强度参数及坡高的边坡算例，由于 OPTUM G2 中没有嵌入完整的非线性 M-C 准则，因此利用 OPTUM G2 计算在线性 M-C 准则条件下的边坡滑动面过坡趾下方破坏的结果以及安全系数，实际上就是非线性参数 $m=1$ ，即特殊的非线性 M-C 准则下的结果。图 5 为边坡算例示意图，其中边坡具体的材料强度参数如表 1 所示。

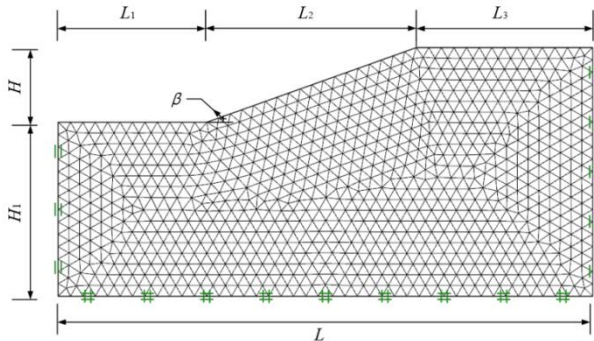


图 5 边坡算例示意图 (G2)

Fig. 5 Slope calculation example diagram (G2)

OPTUM G2 模型设置为标准边界条件，网格采用自适应划分技术，自适应迭代次数为 3，初始网格数量为 1000，网格总数量为 3000，考虑强度折减，土体材料服从 Mohr-Coulomb 破坏准则和相关流动法则。计算后得到边坡处于极限状态时的塑性剪切耗散图。

表 1 边坡土体强度参数

Table 1 Strength parameters of slope soil

边坡算例	$c/(\text{kPa})$	$\varphi/(^{\circ})$	$\beta/(^{\circ})$	$\gamma/(\text{kN/m}^3)$	$H/(\text{m})$
算例 1	15	3	20	20	6
算例 2	20	5	20	20	10

剪切耗散带即为边坡的潜在滑动面，通过 OPTUM G2 计算得到边坡临界状态下的安全系数、潜在滑动面以及滑动面上的正应力，将其与本文计算方法所得结果进行对比，如图 6 所示，可以看出两者计算所得的潜在滑动带吻合较好。

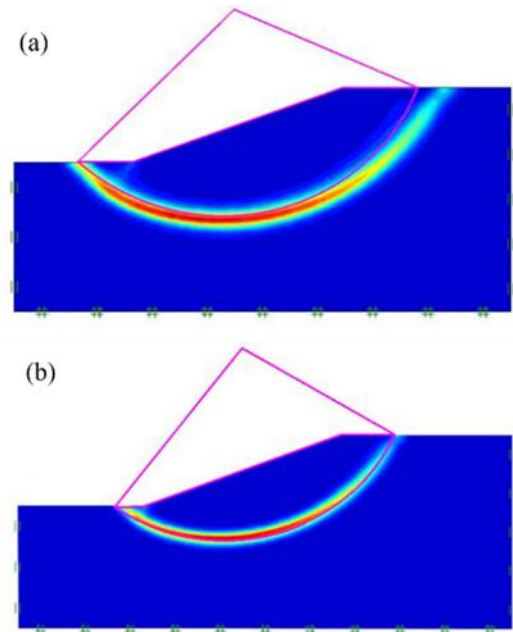


图 6 本文与 G2 计算所得滑动面对比: (a) 算例 1; (b) 算例 2
Fig. 6 Comparisons of critical sliding surfaces between variational method and OPTUM G2: (a) case 1; (b) case 2

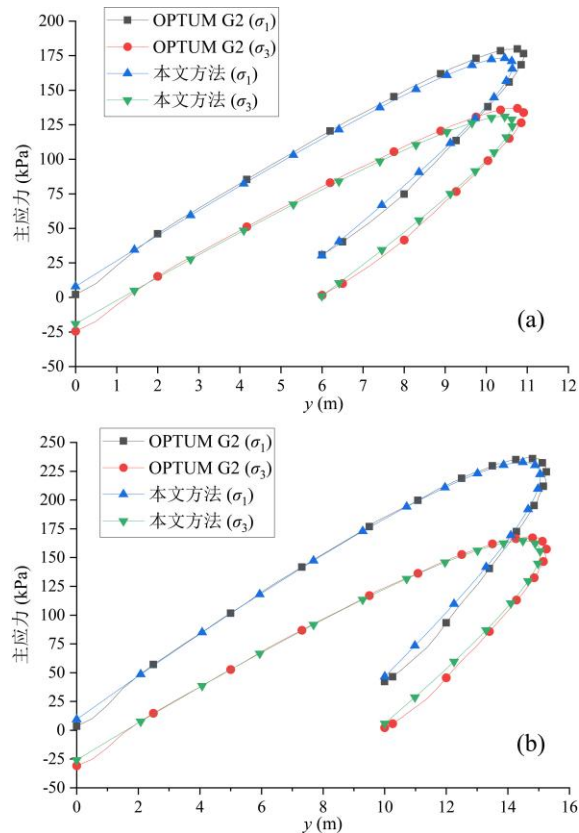


图 7 滑动面主应力(σ_1 、 σ_3)对比: (a) 算例 1; (b) 算例 2
Fig. 7 Comparisons of principal stresses (σ_1 , σ_3) on the sliding surface for: (a) case 1; (b) case 2

对于滑动面过坡趾下方破坏的情况，本文方法和 OPTUM G2 有限元法计算得出的滑动面上正应力的分布情况如图 7 所示，由图可以看出本文方法计算结果与 OPTUM G2 计算结果十分接近，在坡顶处 $y=0$ ，随着深度的增加，主应力逐渐增大；随着深度向坡趾点逐渐变浅，主应力逐渐减小，最终主应力所对应的深度约为坡高。在坡趾点以下深度的范围内，即图 7 中 10m、6m 以上的范围内，每个深度对应两组主应力数据，符合边坡过坡趾以下的破坏模式。

表 2 边坡安全系数计算结果对比
Table 2 Comparisons of slope safety factors

边坡算例	安全系数 F_s		相对误差
	本文	G2	
算例 1	1.0868	1.084	0.25%
算例 2	1.0923	1.093	0.064%

边坡安全系数计算结果如表 2 所示，结果显示，本文方法和 OPTUM G2 有限元法计算结果误差最大不超过 0.25%，说明本文方法在 $m=1$ 时，即线性破坏准则条件下所计算的数据是可靠的。

4.2 FLAC 3D 非线性破坏准则条件下计算结果对比验证

为增加本文方法的可靠性，采用 FLAC 3D 对边坡在非线性破坏准则条件下进行模拟(本文取非线性参数 $m=1.6$)，其中边坡具体材料属性参数及尺寸如表 3 所示。

表 3 边坡土体强度参数
Table 3 Strength parameters of slope soil

边坡算例	$\beta/(^{\circ})$	$\alpha/(^{\circ})$	$\gamma/(\text{kN}/\text{m}^3)$	m	c_0/kPa	σ_t/kPa	h/m
算例 3	20	5	20	1.6	90	247.3	25
算例 4	30	5	20	1.6	90	247.3	25

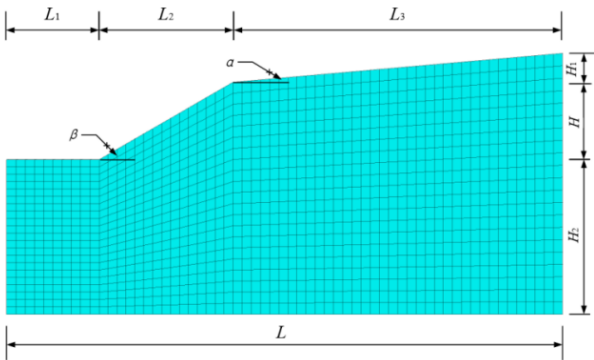


图 8 边坡算例示意图 (FLAC 3D)

Fig. 8 Slope calculation example diagram (FLAC3D)

边坡土体材料服从 Mohr-Coulomb 破坏准则和相关流动法则，在模型左右及底部设置固定约束，采用六面体网格单元，算例 3 网格大小为 2，网格数量为 2160，算例 4 网格大小为 3，网格数量为 1281。经过计算获得边坡的应力场及位移场等，调整边坡的位移场轮廓显示使滑动带更为明显，如图 9 所示，最后提取潜在滑动面上的主应力，将 FLAC 3D 计算结果与本文方法计算结果进行对比，如图 9、图 10 所示。

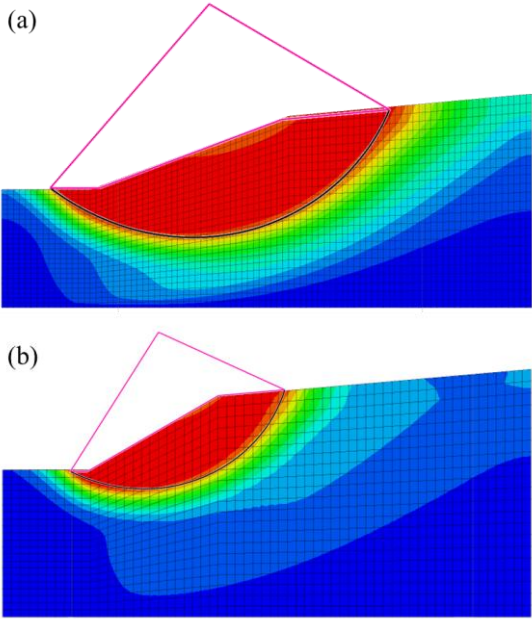


图 9 本文与 FLAC 3D 计算所得滑动面对比：(a) 算例 3；(b) 算例 4

Fig. 9 Comparisons of critical sliding surfaces between variational method and FLAC 3D: (a) case 3; (b) case 4

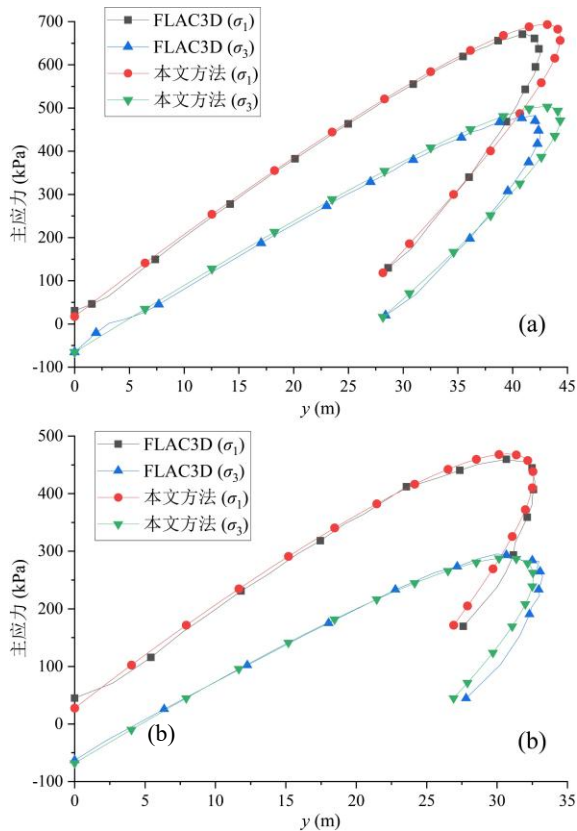


图 10 滑动面主应力(σ_1 、 σ_3)对比: (a) 算例 3; (b) 算例 4

Fig. 10 Comparison of principal stresses (σ_1 , σ_3) on the sliding surface for: (a) case 3; (b) case 4

由图 9 可知, 通过 FLAC 3D 计算所得到的边坡临界状态下的滑动面在坡顶位置处比本文方法计算所得滑动面更靠后, 但二者所得滑动面的深度以及过坡趾的位置都基本一致; 同时由图 10 可知, 两种方法计算所得滑动面上的主应力变化趋势相同, 并且误差也较小, 随着深度的增加, 滑动面上的主应力逐渐增大, 随着滑动面通过坡趾下方, 滑动面上的主应力逐渐减小, 符合边坡过坡趾以下的破坏模式。

邓东平等^[1]考虑破坏模式-滑面应力-强度三者间的相关关系, 结合整体力学平衡方程, 建立了非线性强度准则下边坡稳定性的极限平衡解答。采用邓东平等^[1]提出的方法对案例边坡进行稳定性分析, 结果如表 4 所示。由表 4 可知, 本文上限变分法所得安全系数稍大于极限平衡法和有限差分法的结果, 三种方法的结果相差并不大, 最大相对误差不超过 2.5%, 说明了本文方法在非线性破坏准则条件下具有一定的可靠性。

表 4 边坡安全系数计算结果对比
Table 4 Comparison of slope safety factors

边坡算例	安全系数 F_s			最大相对误差
	FLAC3D	本文	文献 ^[1]	
算例 3	1.9922	2.0345	1.9948	2.07%
算例 4	1.7578	1.773	1.7298	2.50%

通过 3 种方法的互相对比验证, 验证了本文方法对边坡滑动面过坡趾下方破坏的计算方法的有效性, 说明利用本文方法可以为边坡稳定性分析提供一定的理论支持和合理参考。

5 结论

1) 为真实反映岩土体材料的非线性特征, 本文在不需要假定边坡潜在滑动面形式的前提下, 基于整体平衡方程以及变分原理, 建立了临界滑动面及其上应力的偏微分方程组, 提出一种考虑强度非线性特征的均质平缓边坡稳定性严格上限变分解析方法, 完善了边坡稳定性非线性能耗分析理论, 可真实反映滑动面上强度非线性特征。

2) 案例分析结果表明, 本文方法计算所得潜在滑动面与 OPTUM G2、FLAC 3D 以及极限平衡法结果吻合很好, 且滑动面上主应力分布规律也十分接近, 可以说明该方法的有效性。

本文所解决的问题仅限于简单均质边坡, 尚未考虑复杂边界和复杂荷载工况。因此, 下一步工作重心则是对该方法拓展至复杂边坡稳定性问题, 以期为实际工程提供理论依据。

参考文献

[1] 邓东平, 彭一航, 柳梦琦, 等. 滑面“极径-应力-强度”耦合关联下非线性破坏特征边坡稳定性极限平衡分析方法[J]. 岩土力学, 2024, 45(11): 1-24.

DENG D P, PENG Y H, LIU M Q, et al. Limit equilibrium method for analyzing slope stability with nonlinear failure characteristics considering the coupling relationship of polar diameter, stress, and strength of the slip surface[J]. Rock and Soil Mechanics, 2024, 45(11): 1-24.

[2] 孙洋, 罗伟, 荣耀, 等. 不同雨型条件下围堰边坡渗流稳定性数值分析[J]. 华东交通大学学报, 2022, 39(05): 29-35.

SUN Y, LUO W, RONG Y, et al. Numerical analysis of seepage stability of cofferdam slope under different rain types[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2022, 39(05): 29-35.

[3] 丁心香, 李帅. 边坡下限求解的突变分析方法[J]. 华东交通大学学报, 2021, 38(05): 40-47.

DING X X, LI S. Catastrophe analysis method of slope lower bound solution[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2021, 38(05): 40-47.

[4] 王均星, 王汉辉, 吴雅峰. 土坡稳定的有限元塑性极限分析上限法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(11): 1867-1873.

WANG J X, WANG H H, WU Y F. Stability analysis of soil slope by finite element method with plastic limit upper bound[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(11): 1867-1873.

[5] 屈春来, 付迪, 刘世伟, 等. 非均质成层边坡极限承载力上限分析[J]. 岩土力学, 2022, 43(10): 2923-2932.

QU C L, FU D, LIU S W, et al. Upper limit analysis for ultimate bearing capacity of heterogeneous stratified slope[J]. Rock and Soil Mechanics, 2022, 43(10): 2923-2932.

[6] 汪小刚, 林兴超. 基于刚性块体离散的边坡稳定极限分析法[J]. 岩土工程学报, 2022, 44(9): 1587-1597.

WANG X G, LIN X C. Limit analysis method for slope stability based on discretization of rigid blocks[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2022, 44(9): 1587-1597.

[7] Zhang X J, Chen W F. Stability analysis of slopes with general nonlinear failure criterion[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1987, 11(1):33–50.

[8] BAKER R. Nonlinear Mohr envelopes based on triaxial data[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2004, 130(5): 498-506.

[9] 杨小礼, 李亮, 刘宝琛. 非线性破坏准则对竖直边坡稳定性分析的影响[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(4): 592-596.

YANG X L, LI L, LIU B C. Influences of nonlinear failure criterion on stability analysis of vertical cut using nonlinear SQP algorithm[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(4): 592-596.

[10] ANYAEGBUNAM A J, OKAFOR F O. Calibration of Four Nonlinear Failure Envelopes from Triaxial Test Data and Influence of Nonlinearity on Geotechnical Computations[J]. Geomaterials, 2021, 11, 42-57.

[11] 贺志军, 曹吉, 赵炼恒, 等. 非线性 Mohr-Coulomb 破坏准则下边坡可靠度上限[J]. 土木建筑与环境工程, 2016, 38(06): 1-9.

HE Z J, CAO J, ZHAO L H, et al. Upper bound reliability analysis of slope with nonlinear mohr-coulomb failure criterion[J]. Journal of Civil and Environmental Engineering, 2016, 38(06): 1-9.

[12] 唐高朋, 李亮, 赵炼恒, 等. 非线性破坏准则下边坡稳定性极限分析斜条分法[J]. 岩土力学, 2015, 36(7): 2063-2072.

TANG G P, LI L, ZHAO L H, et al. Inclined slices method for limit analysis of slope stability with nonlinear failure criterion[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, 36(7): 2063-2072.

[13] ZHAO L H, YANG F, ZHANG Y B, et al. Effects of shear strength reduction strategies on safety factor of homogeneous slope based on a general nonlinear failure criterion[J]. Computers and Geotechnics, 2015, 63: 215-228.

[14] BAKER R, FRYDMAN S. Upper bound limit analysis of soil with non-linear failure criterion[J]. Soils and Foundations, 1983, 23(4), 34-42.

[15] 赵炼恒, 赵伟龙, 韦彬, 等. 基于三参数破坏准则的均质边坡稳定性上限分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2023, 50(07): 188-199.

ZHAO L H, ZHAO W L, WEI B, et al. Upper bound analysis of homogeneous slope stability based on three-parameter failure criterion[J]. Journal of Hunan University(Natural Sciences), 2023, 50(07): 188-199.

- [16] FU W X, LIAO Y. Non-linear shear strength reduction technique in slope stability calculation[J]. Computers and Geotechnics, 2009, 37(3): 288-298.
- [17] SUN C W, CHAI J R, LUO T, et al Nonlinear shear-strength reduction technique for stability analysis of uniform cohesive slopes with a general nonlinear failure criterion[J]. International Journal of Geomechanics, 2021, 21(1): 06020033.



第一作者：周璐（1986—），男，本科，高级工程师，研究方向为公路与桥梁的工程设计。E-mail: 382949387@qq.com。



通讯作者：罗伟（1986—），男，副教授，博士，研究方向为岩土构筑物稳定性分析及加固机理。E-mail: luoweicsu@126.com。