

文章编号: 1005-0523(2025)05-0121-06



轴对称弹性体扭转问题的完全光滑有限元法

陈莘莘, 丁立才, 李庆华

(华东交通大学土木建筑学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 文章提出一种求解轴对称弹性体扭转问题的完全光滑有限元法。由于几何形状和边界条件的轴对称性, 轴对称弹性体扭转问题的计算只需选取一个截面进行网格划分和分析。为了克服对网格畸变敏感的数值缺陷, 在三角形单元的基础上进一步形成边界光滑域, 然后在每个光滑域内对应变进行光滑操作。结合光滑应变技术和光滑积分伪弱形式, 将形函数偏导项和非偏导项的光滑域积分简化为光滑域边界积分, 彻底摆脱坐标映射和雅可比矩阵的计算。数值算例结果表明, 该方法即使对不规则单元也可取得较好的计算精度。

关键词: 轴对称弹性体; 扭转; 完全光滑技术; 光滑应变技术; 不规则单元

中图分类号: O343

文献标志码: A

本文引用格式: 陈莘莘, 丁立才, 李庆华. 轴对称弹性体扭转问题的完全光滑有限元法[J]. 华东交通大学学报, 2025, 42(5): 121-126.

A Fully Smoothed Finite Element Method for Torsion Problems of Axisymmetric Elastic Body

Chen Shenshen, Ding Licai, Li Qinghua

(School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: A fully smoothed finite element method to solve the torsion problem of axisymmetric elastic body is proposed. Due to axial symmetry of geometry and boundary conditions, computing the torsion problem of axisymmetric elastic body requires extracting one cross section for meshing and analysis. In order to address the problem of high sensitivity to mesh distortion, the edge-based smoothing domains are further constructed based on the triangular mesh and smoothing operations are performed on the strain in each smoothing domain. The smoothing strain technique is combined with the quasi-weak form of smoothed integral for treatment of the partial derivative and non-partial derivative of shape functions. Accordingly, all the smoothed domain integrals can be simplified as boundary integrals of the smoothing domains and there is no need for the coordinate mapping and calculation of Jacobian matrix. Numerical examples demonstrate that the proposed method for the torsion problems of axisymmetric elastic body can produce accurate solutions even for irregular elements.

Key words: axisymmetric elastic body; torsion; fully smoothed technique; smoothing strain technique; irregular elements

收稿日期: 2024-10-14

基金项目: 国家自然科学基金项目(12172131, 12162014); 江西省主要学科学术和技术带头人培养计划(20225BCJ22010)

Citation format: CEHN S S, DING L C, LI Q H. A fully smoothed finite element method for torsion problems of axisymmetric elastic body[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2025, 42(5): 121–126.

作为工程和科学计算的主要工具,有限元法已经得到了广泛的应用,但是仍面临着完备阶数低和网格畸变敏感等困难^[1]。近年来,学界提出的光滑有限元法^[2]将无网格法中的光滑应变技术^[3]引入有限元,有效克服了传统有限元法刚度矩阵过刚的缺陷。此外,光滑有限元法可以将形函数偏导项的光滑域积分转化为形函数在光滑域边界上的线积分,不仅避免了坐标映射和雅可比矩阵的计算,而且降低了常规有限元法对网格质量的依赖性^[4-8]。然而,光滑应变技术无法将形函数非偏导项的域积分进行光滑处理和降维积分。完全光滑技术^[9-11]将光滑应变技术与基于不定积分和散度定理的光滑积分伪弱形式相结合,实现了将形函数偏导项和非偏导项的光滑域积分均转化为光滑域的边界积分。

轴对称弹性体扭转问题在工程中很常见,其几何形状、约束条件及作用的载荷均对称于某一固定轴。解析法^[12]只能求解少数简单的轴对称弹性体扭转问题,许多学者致力于发展求解轴对称弹性体扭转问题的数值方法^[13-14]。为了进一步拓宽完全光滑有限元法的应用领域,本文提出了轴对称弹性体扭转问题的完全光滑有限元法。

1 控制方程

在轴对称弹性体扭转问题中,通常采用圆柱坐标系 (r, θ, z) 进行分析。以 z 轴为对称轴,任一点仅有应力分量 $\tau_{r\theta}$ 和 $\tau_{z\theta}$,位移分量 u_θ 。轴对称弹性体扭转问题的基本方程为^[13-14]

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0$$

边界条件为

$$\tau_{r\theta} n_r + \tau_{z\theta} n_z = \bar{t}, \text{ on } \Gamma_t \quad (2)$$

$$u_\theta = \bar{u}_\theta, \text{ on } \Gamma_u \quad (3)$$

式中: Γ_u 和 Γ_t 分别为位移边界和力边界; $\bar{u}_\theta$ 和 $\bar{t}$ 分别为给定的位移和面力; n_r 和 n_z 为边界单位外法线向量的分量,且

$$[\tau_{r\theta}, \tau_{z\theta}]^T = G \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}, \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right]^T \quad (4)$$

式中: G 为材料的剪切模量。

2 完全光滑有限元法

2.1 光滑积分伪弱形式

在多边形光滑域 Ω_c 中,函数 $f(x)$ 可用光滑积分近似表达为^[3]

$$f(x_c) = \frac{1}{A_c} \int_{\Omega_c} f(x) d\Omega \quad (5)$$

式中: A_c 为 Ω_c 的面积。

如果函数 $f(x)$ 为形函数非偏导项,则无法直接由散度定理将式(5)转化为光滑域的边界积分,需要先引入不定积分。对于二维问题,构造一矢量函数 $\mathbf{F}(r, z) = F_r \mathbf{l}_r + F_z \mathbf{l}_z$,且

$$\mathbf{f} = \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{l}_r$ 和 $\mathbf{l}_z$ 分别为坐标 r 和 z 方向的单位向量,且 F_r 和 F_z 处处可积。将式(6)代入式(5),并使用散度定理,我们有

$$f(x_c) = \frac{1}{A_c} \int_{\Gamma_c} (F_r n_r + F_z n_z) d\Gamma \quad (7)$$

式中: n_r 和 n_z 为光滑域边界 Γ_c 的单位外法线向量的分量。

为了满足式(6),假设

$$F_z = 0 \quad (8)$$

且

$$F_r(r, z) = \int f(r, z) dr + c(z) \quad (9)$$

式中: $c(z)$ 是一个与 r 无关的任意函数,且已经证明可忽略 $c(z)$ 对整个积分的影响^[15]。因此,式(9)可简写为

$$F_r(r, z) = \int f(r, z) dr \quad (10)$$

根据式(8)和式(10),式(7)进一步简化可得到 $f(x)$ 在光滑域 Ω_c 上的光滑积分伪弱形式

$$f(x_c) = \frac{1}{A_c} \int_{\Gamma_c} F_r n_r d\Gamma \quad (11)$$

2.2 离散和数值实施

任取一轴对称面 Ω ,将其划分成多个无缝隙且不重叠的三角形单元,如图1所示。然后将每个三角形单元边上的节点与相邻三角形单元的形心相

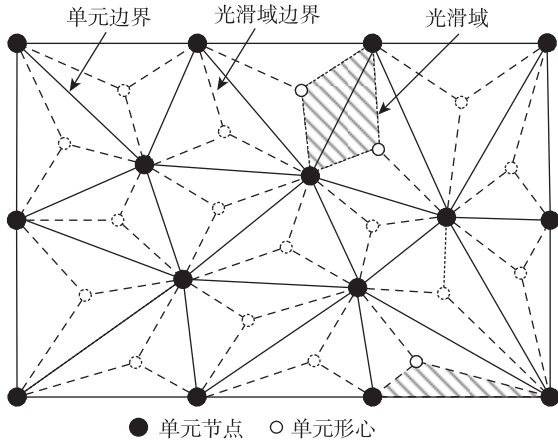


图1 基于三角形单元的边光滑域

Fig. 1 The edge-based smoothing domains based on the triangular elements

连接,可得到 N 个基于三角形单元边的光滑域。

轴对称面上任意三角形单元内的位移 $u_\theta(x)$ 和应变 $\gamma(x)$ 可表示为

$$u_\theta(x) = \sum_{I=1}^3 N_I u_{\theta I} \quad (12)$$

$$\gamma(x) = [\gamma_{r\theta}, \gamma_{z\theta}]^T = \sum_{I=1}^3 \mathbf{B}_I u_{\theta I} \quad (13)$$

式中: $u_{\theta I}$ 为节点位移; N_I 为三角形单元的有限元形函数, I 为节点编号; $\mathbf{B}_I$ 为应变矩阵, 且

$$\mathbf{B}_I = \left[\frac{\partial N_I}{\partial r} - \frac{N_I}{r}, \frac{\partial N_I}{\partial z} \right]^T \quad (14)$$

在光滑域 Ω_k^s 内对应应变 $\gamma(x)$ 进行光滑处理, 有

$$\bar{\gamma}_k = \bar{\mathbf{B}}_k \mathbf{u}_\theta^k = [\bar{\mathbf{B}}_k^1, \bar{\mathbf{B}}_k^2, \dots, \bar{\mathbf{B}}_k^n] \mathbf{u}_\theta^k \quad (15)$$

式中: $\mathbf{u}_\theta^k$ 为光滑域 Ω_k^s 内的节点位移向量, $k=(1, 2, \dots, N)$; n 为支持节点的总数, 且

$$\bar{\mathbf{B}}_k^I = \frac{1}{A_k} \int_{\Omega_k^s} \left[\frac{\partial N_I}{\partial r} - \frac{N_I}{r}, \frac{\partial N_I}{\partial z} \right] d\Omega = [\bar{b}_{lr}^k - \bar{b}_{lh}^k, \bar{b}_{lz}^k]^T \quad (16)$$

式中: A_k 为光滑域 Ω_k^s 的面积, 且

$$\bar{b}_{lr}^k = \frac{1}{A_k} \int_{\Omega_k^s} \frac{\partial N_I}{\partial r} d\Omega \quad (17)$$

$$\bar{b}_{lh}^k = \frac{1}{A_k} \int_{\Omega_k^s} \frac{N_I}{r} d\Omega = \frac{1}{A_k r_k} \int_{\Omega_k^s} N_I d\Omega \quad (18)$$

$$\bar{b}_{lz}^k = \frac{1}{A_k} \int_{\Omega_k^s} \frac{\partial N_I}{\partial z} d\Omega \quad (19)$$

式中: r_k 为光滑域 Ω_k^s 的形心到对称轴的距离。采用散度定理, $\bar{b}_{lr}^k$ 和 $\bar{b}_{lz}^k$ 可直接转化为光滑域的边界积分, 即

$$\bar{b}_{lr}^k = \frac{1}{A_k} \int_{\Gamma_k^s} N_I n_r d\Omega \quad (20)$$

$$\bar{b}_{lz}^k = \frac{1}{A_k} \int_{\Gamma_k^s} N_I n_z d\Omega \quad (21)$$

式中: n_r 和 n_z 为光滑域边界 Γ_k^s 的单位外法线向量的分量。引入高斯积分, 则式(20)和式(21)所示的 $\bar{b}_{lr}^k$ 和 $\bar{b}_{lz}^k$ 可进一步改写为

$$\bar{b}_{lr}^k = \frac{1}{A_k} \sum_{m=1}^{N_g} \sum_{n=1}^{N_g} \frac{1}{2} w_{m,n} n_r^m N_I(\mathbf{x}_{m,n}^G) l_m \quad (22)$$

$$\bar{b}_{lz}^k = \frac{1}{A_k} \sum_{m=1}^{N_g} \sum_{n=1}^{N_g} \frac{1}{2} w_{m,n} n_z^m N_I(\mathbf{x}_{m,n}^G) l_m \quad (23)$$

式中: $\mathbf{x}_{m,n}^G$ 为光滑域边界 $\Gamma_{k,m}^s$ ($m=1, 2, \dots, N_g$) 的高斯积分点坐标; l_m 为 $\Gamma_{k,m}^s$ 的长度; N_g 为光滑域边界的数量, N_g 为边界 $\Gamma_{k,m}^s$ 上的高斯积分点数; $w_{m,n}$ 为高斯积分点 $\mathbf{x}_{m,n}^G$ 对应的权系数。

式(18)所示的 $\bar{b}_{lh}^k$ 为形函数非偏导项的域积分, 其相应的光滑积分伪弱形式可由式(11)写为

$$\bar{b}_{lh}^k = \frac{1}{r_k A_k} \int_{\Gamma_k^s} \hat{N}_I(r, z) n_r d\Gamma = \frac{1}{r_k A_k} \sum_{m=1}^{N_g} \sum_{n=1}^{N_g} \frac{1}{2} w_{m,n} n_r^m \hat{N}_I(\mathbf{x}_{m,n}^G) l_m \quad (24)$$

且

$$\hat{N}_I = \int N_I(r, z) dr \quad (25)$$

平衡方程式(1)及力边界条件式(2)的光滑伽辽金弱形式可写为

$$2\pi \int_{\Omega} (\delta \gamma)^T G \gamma r d\Omega = 2\pi \int_{\Gamma_t} \delta u_\theta \bar{t} r d\Gamma \quad (26)$$

将式(12)和式(15)代入式(26), 并注意到节点虚位移的任意性, 最终得到系统离散方程为

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (27)$$

式中: $\mathbf{U}$ 为总体节点位移列向量; $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{F}$ 分别为刚度矩阵和节点载荷列向量, 其元素 K_{IJ} 和 F_I 的表达式为

$$K_{IJ} = \sum_{k=1}^N 2\pi r_k A_k (\bar{\mathbf{B}}_I^T) G \bar{\mathbf{B}}_J^J \quad (28)$$

$$F_I = 2\pi \int_{\Gamma_t} N_I \bar{t} r d\Gamma \quad (29)$$

3 数值算例

为了研究网格畸变对计算精度的影响, 通过以下方法构建不规则单元 r_{ir} 和 z_{iz}

$$r_{ir} = r + \alpha_{ir} r_a \Delta r, \quad z_{iz} = z + \alpha_{iz} r_a \Delta z \quad (30)$$

式中: r 和 z 为规则单元节点坐标; r_a 为随机数; Δr

和 Δz 分别为规则单元在 r 和 z 方向的长度; α_{ir} 为畸变系数。

3.1 扭转的实心圆杆

如图2所示,考虑一端固定,一端受扭矩 M_z 作用的实心圆杆,其长度 $H=1\text{ m}$,半径 $R=1\text{ m}$ 。材料的剪切模量 $G=1.5\text{ MPa}$,表面扭转载荷集度取为 $q_0=-10^6\text{ Pa}$ 。该问题的位移和应力解析解可写为^[13]

$$u_\theta = \frac{2M_z r z}{G\pi R^4}, \quad \tau_{z\theta} = \frac{2M_z r}{\pi R^4} \quad (31)$$

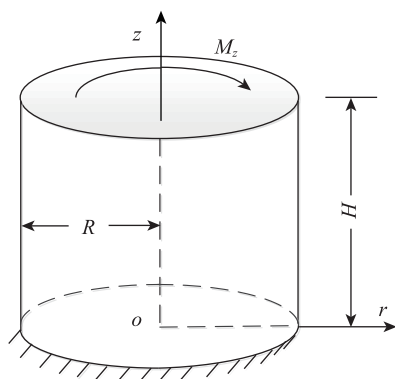


图2 实心圆杆

Fig. 2 Full circular rod

为了数值解与解析解的对应,定义以下线性分布扭转载荷

$$q(r) = rq_0/R \quad (32)$$

其等效扭矩为

$$M_z = \int_0^R 2\pi r^2 q(r) dr = \frac{\pi q_0 R^3}{2} \quad (33)$$

我们将实心圆杆的轴对称面离散成128个三角形单元,且图3给出了 $\alpha_{ir}=0.5$ 时的不规则单元划分情况。图4给出了采用规则单元($\alpha_{ir}=0$)计算得到的实心圆杆顶面($z=H$)位移与解析解的比较。另外,表1给出了不同畸变系数下实心圆杆顶面

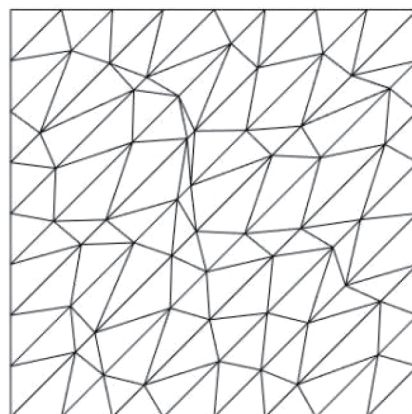


图3 $\alpha_{ir}=0.5$ 时实心圆杆的不规则单元

Fig. 3 Irregular mesh for the full circular rod when $\alpha_{ir}=0.5$

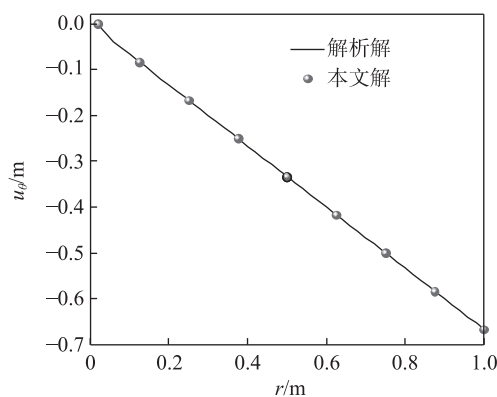


图4 实心圆杆 $z=H$ 处的位移 u_θ

Fig. 4 Displacement u_θ at $z=H$ of the full circular rod

($z=H$)位移的数值解。从图4和表1可以看出,本文数值解与解析解吻合很好,验证了本文方法不仅计算精度高,而且还具有较高的抗网格畸变能力。

3.2 扭转的空心圆杆

如图5所示,考虑一端固定,一端局部带状区域上分布线性扭转载荷的空心圆杆。该空心圆杆的

表1 不同畸变系数下实心圆杆顶面($z=H$)位移 u_θ

Tab.1 The displacement u_θ at the top surface ($z=H$) of the full circular rod under different distortion coefficients

r/m	解析解	$\alpha_{ir}=0.1$	$\alpha_{ir}=0.2$	$\alpha_{ir}=0.3$	$\alpha_{ir}=0.4$	$\alpha_{ir}=0.5$
0.125	-0.083 3	-0.083 4	-0.083 6	-0.083 2	-0.083 9	-0.084 2
0.250	-0.166 7	-0.166 9	-0.167 0	-0.167 3	-0.166 6	-0.167 0
0.375	-0.250 0	-0.250 3	-0.250 0	-0.250 1	-0.249 8	-0.250 0
0.500	-0.333 3	-0.333 8	-0.333 2	-0.333 8	-0.333 8	-0.332 7
0.625	-0.416 7	-0.417 0	-0.416 9	-0.416 5	-0.416 9	-0.417 9
0.750	-0.500 0	-0.500 2	-0.500 3	-0.500 6	-0.499 7	-0.499 4
0.875	-0.583 3	-0.583 5	-0.583 8	-0.582 1	-0.582 4	-0.581 1
1.000	-0.666 7	-0.667 1	-0.665 9	-0.666 8	-0.665 0	-0.665 5

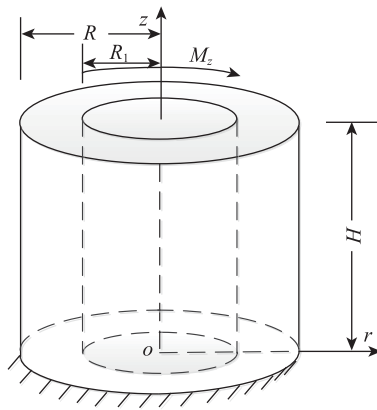


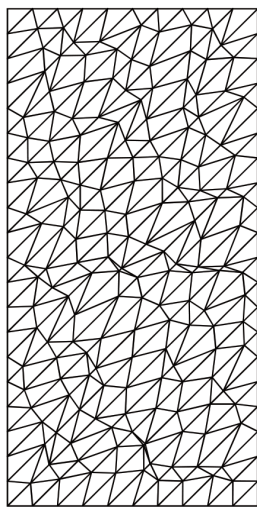
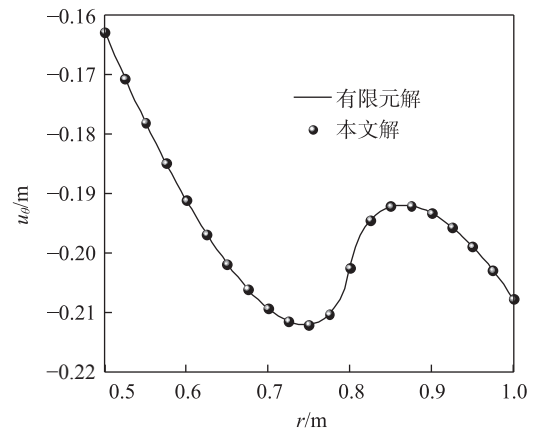
图5 空心圆杆

Fig. 5 Hollow circular rod

长度 $H=1\text{ m}$, 外径 $R=1\text{ m}$, 内径 $R_1=0.5\text{ m}$, 材料的剪切模量 $G=1.5\text{ MPa}$ 。采用的线性扭转荷载可定义为

$$q(r) = -r/R \times 10^6 \text{ Pa} \quad (34)$$

我们将空心圆杆的轴对称面离散成400个三角形单元,且图6给出了 $\alpha_{ir}=0.5$ 时的不规则单元划分情况。图7给出了采用规则单元 ($\alpha_{ir}=0$) 计算得到的空心圆杆顶面 ($z=H$) 位移,且表2给出了不同畸变系数下空心圆杆顶面 ($z=H$) 位移的数值解。为了进行对比,图7和表2给出了使用非常精细网格的有限元(FEM)计算结果。从图7和表2可以看出,本文方法计算结果具有很高的精度,这进一步验证了本文方法的有效性和抗网格畸变能力。

图6 $\alpha_{ir}=0.5$ 时空心圆杆的不规则单元Fig. 6 Irregular mesh for the hollow circular rod when $\alpha_{ir}=0.5$ 图7 空心圆杆 $z=H$ 处的位移 u_θ Fig. 7 Displacement u_θ at $z=H$ of the hollow circular rod表2 不同畸变系数下空心圆杆顶面 ($z=H$) 位移 u_θ Tab.2 The displacement u_θ at the top surface ($z=H$) of the hollow circular rod with different distortion coefficients

r/m	FEM	$\alpha_{ir}=0.1$	$\alpha_{ir}=0.2$	$\alpha_{ir}=0.3$	$\alpha_{ir}=0.4$	$\alpha_{ir}=0.5$
0.500	-0.162 8	-0.163 1	-0.163 1	-0.163 0	-0.163 2	-0.162 9
0.550	-0.178 0	-0.178 3	-0.178 3	-0.178 3	-0.178 2	-0.178 2
0.600	-0.191 2	-0.191 4	-0.191 3	-0.191 4	-0.191 2	-0.191 3
0.650	-0.201 8	-0.202 1	-0.202 2	-0.202 1	-0.202 0	-0.201 8
0.700	-0.209 3	-0.209 8	-0.209 7	-0.209 8	-0.209 6	-0.209 7
0.750	-0.212 0	-0.212 7	-0.212 5	-0.212 3	-0.211 8	-0.211 5
0.800	-0.202 5	-0.202 4	-0.202 0	-0.202 8	-0.202 6	-0.203 4
0.850	-0.192 2	-0.191 6	-0.192 2	-0.191 4	-0.192 3	-0.191 7
0.900	-0.193 3	-0.192 9	-0.192 9	-0.192 9	-0.193 0	-0.193 0
0.950	-0.198 9	-0.198 6	-0.198 7	-0.198 7	-0.198 7	-0.198 7

4 结论

1) 该方法采用对任何复杂的问题域都适应性非常强的三角形单元,所以本文所提方法适用于任何复杂的轴对称弹性体扭转问题的分析。

2) 将光滑积分伪弱形式与光滑应变技术相结合,可实现形函数偏导项和非偏导项的光滑域内积分都转化为光滑域的边界积分,不仅避免了等参变换和雅可比矩阵的计算,而且提高了本文所提方法的抗网格畸变能力。

3) 对于本文所采用的三角形单元,形函数的不定积分解析表达式不仅非常容易获得,而且只需计算一次,因此本文所提方法具有相对较高的计算效率。

参考文献:

- [1] 傅向荣, 陈璞, 孙树立, 等. 弹性力学有限元分析中的平衡与协调理论[J]. 工程力学, 2023, 40(2): 8-16.
FU X R, CHEN P, SUN S L, et al. Research on equilibrium and conforming theory of the finite element method in elasticity[J]. Engineering Mechanics, 2023, 40(2): 8-16.
- [2] LIU G R, DAI K Y, NGUYEN T T. A smoothed finite element method for mechanics problems[J]. Computational Mechanics, 2007, 39(6): 859-877.
- [3] CHEN J S, WU C T, YOON S, et al. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50(2): 435-466.
- [4] 刘锋涛, 周锡文, 张澄博, 等. 基于两级光滑边域混合单元的弹塑性二阶锥规划方法[J]. 岩土工程学报, 2023, 45(5): 1045-1053.
LIU F T, ZHOU X W, ZHANG C B, et al. Elastoplastic second-order cone programming based on mixed elements using a two-level mesh repartitioning scheme[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2023, 45(5): 1045-1053.
- [5] ZENG W, LIU G R. Smoothed finite element methods (SFEM): an overview and recent developments[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2018, 25(2): 397-435.
- [6] MENG J J, ZHANG X, HUANG J S, et al. A smoothed finite element method using second-order cone programming[J]. Computers and Geotechnics, 2020, 123: 103547.
- [7] 戴北冰, 袁新, 周锡文, 等. 考虑间断速度场的光滑有限元极限分析上限法[J]. 岩土力学, 2024, 45(9): 2849-2858.
DAI B B, YUAN X, ZHOU X W, et al. Upper bound limit analysis using smoothed finite element method considering discontinuous velocity field[J]. Rock and Soil Mechanics, 2024, 45(9): 2849-2858.
- [8] LEE C, NATARAJAN S. Adaptive quadtree polygonal based edge-based smoothed finite element method for quasi-incompressible hyperelastic solids[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2023, 155: 973-994.
- [9] WAN D T, HU D A, YANG G, et al. A fully smoothed finite element method for analysis of axisymmetric problems[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2016, 72: 78-88.
- [10] WAN D T, HU D A, NATARAJAN S, et al. A fully smoothed XFEM for analysis of axisymmetric problems with weak discontinuities[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2017, 110(3): 203-226.
- [11] 胡德安, 韩旭, 万德涛. 有限元方法中的光滑积分伪弱形式[J]. 计算力学学报, 2016, 33(4): 485-493.
HU D A, HAN X, WAN D T. A quasi weak form of smoothed integral for finite element method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2016, 33(4): 485-493.
- [12] TIMOSHENKO S P, GOODIER J N. Theory of elasticity [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.
- [13] 郑健龙, 杨建军. 无网格MLPG法求解轴对称弹性体扭转问题[J]. 应用力学学报, 2011, 28(3): 283-287.
ZHENG J L, YANG J J. Solving torsion problems of axisymmetric elastic body by meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2011, 28(3): 283-287.
- [14] 陈莘莘, 刁呈岩. 轴对称弹性体扭转问题的无网格自然邻接点 Petrov-Galerkin 法[J]. 力学季刊, 2019, 40(1): 124-130.
CHEN S S, DIAO C Y. Meshless natural neighbour Petrov-Galerkin method for torsion problems of axisymmetric elastic body[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2019, 40(1): 124-130.
- [15] DASGUPTA G. Integration within polygonal finite elements[J]. Journal of Aerospace Engineering, 2003, 16(1): 9-18.



通信作者: 陈莘莘 (1975—), 男, 教授, 研究方向为计算力学与结构仿真。E-mail: chenshenshen@tsinghua.org.cn。

(责任编辑: 姜红贵)