

文章编号: 1005-0523(2026)01-0020-10



## 基于非线性Mohr-Coulomb准则的边坡稳定性上限变分解析

周璐<sup>1</sup>, 陶志鹏<sup>2</sup>, 谢玉堂<sup>3</sup>, 罗伟<sup>4</sup>, 胡世红<sup>5</sup>, 赵炼恒<sup>5</sup>

(1. 江西省路港工程有限公司, 江西 南昌 330008; 2. 江西省交投养护科技集团有限公司, 江西 南昌 330213;  
3. 江西省港航建设投资集团有限公司, 江西 南昌 330008; 4. 华东交通大学土木建筑学院, 江西 南昌 330013;  
5. 中南大学土木工程学院, 湖南 长沙 410075)

**摘要:** 为了在边坡稳定性分析中考虑岩土体材料的强度非线性特征, 提出了一种基于坡趾以下滑动机制的边坡稳定性严格上限变分解析方法。基于上限定理, 构建均质边坡旋转破坏机制, 根据变分原理的欧拉方程和变分横截条件、边界条件等获得了极限状态下滑动面及其应力, 通过能耗平衡建立边坡高度的隐式方程, 并采用粒子群优化算法得到了边坡的临界高度, 在此基础上引入强度折减技术, 获得边坡的安全系数。对比发现所提出方法得到的边坡潜在滑动面及其上主应力分布与OPTUM G2和FLAC 3D计算结果均吻合良好, 且安全系数误差较小。结果表明文章的变分解析方法能有效评估发生坡趾以下滑动的均质边坡稳定性。

**关键词:** 边坡稳定性分析; 基底破坏机制; 非线性Mohr-Coulomb破坏准则; 上限分析; 变分分析; 有限差分分析

中图分类号: P642.22

文献标志码: A

**本文引用格式:** 周璐, 陶志鹏, 谢玉堂, 等. 基于非线性Mohr-Coulomb准则的边坡稳定性上限变分解析[J]. 华东交通大学学报, 2026, 43(1): 20-29.

## Upper Bound Variational Analysis of Slope Stability Based on Nonlinear Mohr-Coulomb Criterion

Zhou Lu<sup>1</sup>, Tao Zhipeng<sup>2</sup>, Xie Yutang<sup>3</sup>, Luo Wei<sup>4</sup>, Hu Shihong<sup>5</sup>, Zhao Lianheng<sup>5</sup>

(1. Jiangxi Lugang Engineering Co., Ltd., Nanchang 330008, China; 2. Jiangxi Communications Investment Maintenance Technology Group Co., Ltd., Nanchang 330213, China; 3. Jiangxi Port and Navigation Construction Investment Group Co., Ltd., Nanchang 330008, China; 4. School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 5. School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, China)

**Abstract:** In order to consider the nonlinear characteristics of rock and soil materials in slope stability analysis, a rigorous upper bound variational analysis method for slope stability based on the deep-seated failure mechanism is proposed. Based on the upper bound theorem of limit analysis, a rotational failure mechanism of homogeneous slope was established. The sliding surface and its stress under limit state were obtained according to the Euler equation of variational principle, variational transversality conditions and boundary conditions. The implicit function for the critical slope height was established via the energy balance equation, and the critical height of slope

收稿日期: 2024-09-24

基金项目: 国家自然科学基金地区项目(52268063); 国家自然科学基金青年项目(52108320); 江西省交通运输厅科技项目(2020Z0001, 2021H0042, 2021Z004); 江西省自然科学基金面上项目(20224BAB204063)

was optimized by particle swarm optimization algorithm. The slope factor of safety (FOS) was obtained. By comparing, it is found that the potential sliding surface and the distribution of principal stress on the slope obtained by the proposed method are in good agreement with the calculation results of OPTUM G2 and FLAC 3D, and the error of safety factor is small. The results show that the variational analysis method can effectively evaluate the stability of homogeneous slope with sliding below the slope toe.

**Key words:** slope stability analysis; base failure mechanism; nonlinear Mohr-Coulomb failure criterion; upper bound analysis; variational analysis; finite difference analysis

**Citation format:** ZHOU L, TAO Z P, XIE Y T, et al. Upper bound variational analysis of slope stability based on nonlinear Mohr-Coulomb criterion[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2026,43(1):20-29.

常用的边坡稳定性分析方法主要包括极限平衡法、有限元、有限差分和极限分析法等<sup>[1-3]</sup>。其中,极限分析法物理意义明确并且可以获得严格的理论解,因此广泛应用于边坡稳定性问题。王均星等<sup>[4]</sup>将有限元离散思想融入上限分析法中,利用上限有限元法求解了土坡的极限承载力和安全系数。屈春来等<sup>[5]</sup>考虑边坡滑出点位置的不确定性,建立非均质成层边坡三种破坏机制,分别推导了边坡极限承载力上限解。汪小刚等<sup>[6]</sup>基于极限分析上下限定理,以节点速度或应力为未知量,建立了边坡稳定性的安全系数上、下限数学优化模型,形成了一套完整的求解边坡稳定性的极限分析有限元体系。

传统的边坡稳定性分析通常假定土体服从线性 Mohr-Coulomb (M-C) 准则,而大量研究<sup>[7-10]</sup>表明,土体材料具有明显的强度非线性特征。杨小礼等<sup>[9]</sup>提出采用外切线法,引入非线性准则的瞬时非线性强度指标,从而建立边坡稳定性的多变量非线性优化问题,使得边坡稳定性极限分析可以拓展至强度非线性准则。在此基础上,贺志军等<sup>[11]</sup>利用极限分析上限法以及蒙特卡洛法开展了边坡稳定性可靠度分析,并分析了非线性强度准则参数变异性的影响。唐高朋等<sup>[12]</sup>基于非线性 M-C 准则,引入多点切线法和强度折减法,建立了任意斜条分的多块体滑动破坏机制,并考虑坡顶均布荷载和地震荷载的影响,推导了边坡安全系数通用计算公式。Zhao 等<sup>[13]</sup>基于上限分析方法,讨论了非线性 M-C 破坏准则下抗剪强度折减策略对均质边坡安全系数的影响。

然而,上述研究大多通过单一外切线法引入非线性准则的瞬时抗剪强度指标。该方法在本质上仍

属于线性分析框架,未能真正体现非线性破坏准则,因而无法有效反映强度参数随应力状态变化的非线性特征。而唐高朋等<sup>[12]</sup>采用的多点切线法虽然可以反映强度非线性问题,但该方法需要引入多个瞬时强度指标,增加了非线性规划问题的维度与复杂性。此外,在传统的极限分析方法中,绝大多数研究需要假定滑动面为圆弧面或者对数螺旋面,但是已有研究表明在非线性准则下,边坡的滑动面为多组对数螺旋线的组合,且安全系数的计算结果与假定的破坏机制密切相关,如果全部按照假定的破坏面计算,则计算结果可能与真实情况存在较大差异。

变分法可以同时获得临界状态下边坡潜在滑动面和应力分布,是一种理论严密的方法。Zhang 等<sup>[7]</sup>、Baker 等<sup>[14]</sup>基于变分原理推导了非线性准则下均质边坡稳定性和承载力的上限解答。赵炼恒等<sup>[15]</sup>基于变分原理推导了三参数非线性准则下的边坡潜在滑动面和应力分布,并采用蚁群智能优化算法获得了边坡临界高度和安全系数。上述研究仅针对滑动面过坡趾点的情况,尚未探究滑动面在坡趾以下的模式。

因此,本文基于上限定理和非线性 M-C 破坏准则,建立了坡趾以下破坏机制,基于变分原理推导临界滑动面的表达式,获得极限状态下滑动面及其应力分布,进而采用粒子群优化算法得到了边坡的临界高度。同时引入强度折减技术,分别与 OPTUM G2 和 FLAC 3D 对比了平缓边坡安全系数及其对应的潜在滑动面和滑动面上的应力分布,以验证本文方法对分析平缓边坡稳定性的有效性。

## 1 非线性 M-C 准则

传统的边坡稳定性分析主要基于线性 M-C 准

则,然而大量研究表明,岩土体材料具有明显的非线性特征。对于非线性M-C准则的表达式,常采用幂指数形式来表达

$$\tau_p = c_0 \left( 1 + \frac{\sigma_p}{\sigma_t} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (1)$$

式中:  $\tau_p$  和  $\sigma_p$  分别为破坏面上的切应力和正应力;  $c_0$  为初始黏聚力 ( $c_0 \geq 0$ ), 表示包络线与纵轴的截距;  $\sigma_t$  为单轴抗拉强度 ( $\sigma_t \geq 0$ );  $m$  为非线性参数, 决定着强度包络线的弯曲程度。当  $m=1$  时, 强度包络线为直线, 即为线性M-C准则, 式(1)变为

$$\tau_p = c_0 + \frac{c_0}{\sigma_t} \sigma_p \quad (2)$$

式中:  $c_0/\sigma_t$  为线性M-C准则强度包络线的斜率  $\tan \varphi$ 。将式(1)绘制成曲线, 如图1所示。

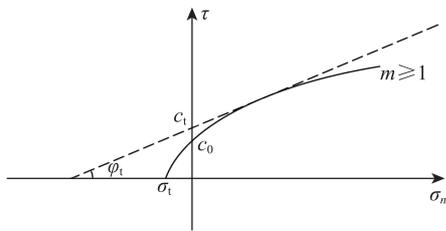


图1 非线性M-C破坏准则曲线

Fig. 1 Nonlinear M-C failure criterion curve

## 2 严格上限变分分析

当边坡坡度较平缓且土体摩擦角较大时, 潜在滑动面可能位于坡趾以下(即不穿过坡趾点), 如图2所示。假设均匀土质边坡潜在滑动面  $r(\theta)$  位于坡趾以下, 破坏区域土体视为刚性体绕旋转中心  $O$  点以角速度  $\Omega$  转动。潜在滑动面滑入点  $(x_0, y_0)$  和滑出点  $(x_n, y_n)$  的水平 and 垂直距离分别为  $L$  和  $H$ , 滑入点与坡顶点的距离为  $L_1$ , 边坡高度为  $h_1$ , 上坡角和下坡角分别为  $\alpha$  和  $\beta$ , 坡顶点与坡趾点的水平距离为  $L_2$ , 坡趾点与滑出点的水平距离为  $L_3$ 。假定边坡岩土材料服从非线性M-C破坏准则和正交流动法则, 根据上限定理, 塑性速度矢量  $\delta_w$  和滑动面的夹角为  $\varphi_t$ 。

### 2.1 能耗分析

考虑材料强度非线性特征时, 其强度参数与应力状态有关, 定义瞬时黏聚力和内摩擦角为  $c_t, \varphi_t$ , 即强度包络线上某点切线与纵轴的截距以及该切线斜率的反正切值, 计算式为

$$c_t = \frac{m-1}{m} c_0 \left( 1 + \frac{\sigma_p}{\sigma_t} \right)^{\frac{1}{m}} + \frac{c_0}{m} \left( 1 + \frac{\sigma_p}{\sigma_t} \right)^{\frac{1-m}{m}} \quad (3)$$

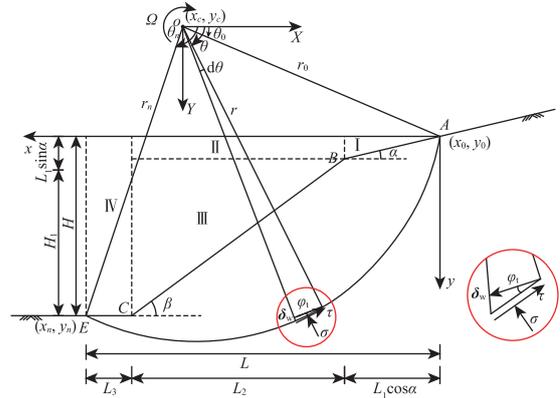


图2 均质边坡过坡趾以下破坏机制

Fig. 2 Deep-seated failure mechanism of homogeneous slopes

$$\tan \varphi_t = \frac{c_0}{m \sigma_t} \left( 1 + \frac{\sigma_p}{\sigma_t} \right)^{\frac{1-m}{m}} \quad (4)$$

故滑动面上单位面积的内能耗散功率  $D$  为

$$D = \delta u (\tau_p - \sigma_p \tan \varphi_t) \quad (5)$$

其中,

$$\delta u = r \Omega \quad (6)$$

对式(5)在整个滑动面上积分可得边坡失稳时内能耗散总功率为

$$\begin{aligned} \Sigma D &= \int_{\theta_0}^{\theta_n} (\tau_s - \sigma_s \tan \varphi_t) (\delta_w \cos \varphi_t) \frac{r d\theta}{\cos \varphi_t} \\ &= \Omega \int_{\theta_0}^{\theta_n} r^2 (\tau_s - \sigma_s \tan \varphi_t) d\theta \end{aligned} \quad (7)$$

式中:  $\sigma_s$  和  $\tau_s$  分别为滑动面上正应力和切应力;  $r$  为滑动面的旋转半径;  $\theta$  为极径与水平方向的夹角;  $\theta_0$  和  $\theta_n$  分别为滑入点和滑出点与旋转中心的连线与水平方向的夹角。

### 2.2 外力功率

本文仅考虑重力荷载, 故临界状态下重力功率为

$$W = W_{e1} - W_1 - W_2 - W_3 - W_4 \quad (8)$$

式中:  $W$  为滑动体的重力功率;  $W_{e1}, W_1, W_2, W_3, W_4$  分别计算如下

$$\begin{cases} W_{e1} = \Omega \gamma \int_{x_0}^{x_n} [y(x_e - x)] dx \\ W_1 = \Omega \frac{\gamma}{2} L_1^2 \cos \alpha \sin \alpha \left( r_0 \cos \theta_0 - \frac{2}{3} L_1 \cos \alpha \right) \\ W_2 = \Omega \gamma L_1 L_2 \sin \alpha \left( r_0 \cos \theta_0 - L_1 \cos \alpha - \frac{L_2}{2} \right) \\ W_3 = \Omega \frac{\gamma}{2} L_2 h_1 \left( r_0 \cos \theta_0 - L_1 \cos \alpha - \frac{2}{3} L_2 \right) \\ W_4 = \Omega \gamma L_3 h_1 \left( r_0 \cos \theta_0 - L_1 \cos \alpha - L_2 - \frac{L_3}{2} \right) \end{cases} \quad (9)$$

式中:  $\gamma$  为岩土体材料容重,  $\text{kN/m}^3$ 。

根据虚功率平衡方程,可知

$$\Sigma D = W = W_{e1} - (W_1 + W_2 + W_3 + W_4) \quad (10)$$

将式(9)代入式(10)中并整理可得

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 - (W_{e1} - \Sigma D) = \Omega(AL_1^3 + BL_1^2 + CL_1 + E) = 0 \quad (11)$$

式中,

$$\begin{cases} A = \frac{\gamma \sin \alpha}{6} \left( -2 \cos^2 \alpha + \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha}{\tan \beta} - \frac{\sin^2 \alpha}{\tan^2 \beta} \right) \\ B = \frac{\gamma}{2} \left[ r_0 \cos \theta_0 \sin \alpha \left( \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\tan \beta} \right) + h_1 \left( \frac{\sin \alpha}{\tan \beta} - \cos \alpha \right)^2 \right] \\ C = \frac{\gamma h_1}{2} \left[ h_1 \left( \frac{1}{\tan \beta} \right) - 2r_0 \cos \theta_0 \right] \left( \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\tan \beta} \right) \\ E = \frac{\gamma h_1}{6} \left[ r_0 \cos \theta_0 \left( 6L - \frac{3h_1}{\tan \beta} \right) + \left( \frac{h_1^2}{\tan^2 \beta} - 3L^2 \right) \right] - \frac{W_{e1} - \Sigma D}{\Omega} \end{cases} \quad (12)$$

### 2.3 最小上限解条件

临界状态下,滑动面上每一点都达到屈服,且滑动面仍处于平衡状态,对于平面应变问题,滑动体的力学平衡方程为

$$\begin{cases} H = \int_{x_0}^{x_n} (\tau_s - \sigma_s y') dx \\ V = \int_{x_0}^{x_n} [\sigma_s + \tau_s y' - \gamma(y - y_1)] dx \\ M = \int_{x_0}^{x_n} [(\tau_s - \sigma_s y')y - (\sigma_s + \tau_s y')x + \gamma(y - y_1)x] dx \end{cases} \quad (13)$$

式中: $H$ 、 $V$ 分别为滑动体水平和垂直方向的合力; $M$ 为滑动体力系对原点 $O$ 的矩。

根据虚功原理,在容许的位移场下,滑动体的总虚功 $I$ 可写为

$$I = \delta u H + \delta v V + \delta \Omega M \quad (14)$$

式中: $\delta u$ 、 $\delta v$ 、 $\delta \Omega$ 分别为水平、竖直和转动的虚位移。

将式(13)代入式(14)可得

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_0}^{x_n} (\delta u (\tau_s - \sigma_s y') + \delta v [\sigma_s + \tau_s y' - \gamma(y - y_1)] + \delta \Omega [(\tau_s - \sigma_s y')y - (\sigma_s + \tau_s y')x + \gamma(y - y_1)x]) dx \\ &= \delta \Omega \int_{x_0}^{x_n} \left[ \tau_s \left( \left( \frac{\delta u}{\delta \Omega} + y \right) + y' \left( \frac{\delta v}{\delta \Omega} - x \right) \right) + \sigma_s \left( \left( \frac{\delta v}{\delta \Omega} - x \right) - y' \left( \frac{\delta u}{\delta \Omega} + y \right) \right) - \gamma(y - y_1) \left( \frac{\delta v}{\delta \Omega} - x \right) \right] dx \end{aligned} \quad (15)$$

经过简化可得

$$I = \delta \Omega \int_{x_0}^{x_n} F dx \quad (16)$$

其中,

$$F = \sigma_s \left[ \left( \frac{\delta v}{\delta \Omega} - x \right) - y' \left( \frac{\delta u}{\delta \Omega} + y \right) \right] + \tau_s \left[ \left( \frac{\delta v}{\delta \Omega} - x \right) y' + \left( \frac{\delta u}{\delta \Omega} + y \right) \right] - \gamma(y - y_1) \left( \frac{\delta v}{\delta \Omega} - x \right) \quad (17)$$

所以总虚功表达式是典型的积分型泛函,令

$$\begin{cases} X = \frac{\delta v}{\delta \Omega} - x = x_c - x = r \cos \theta \\ Y = \frac{\delta u}{\delta \Omega} + y = -y_c + y = r \sin \theta \end{cases} \quad (18)$$

因此泛函 $F$ 可表示为

$$F = \sigma_s (X - Yy') + \tau_s (Xy' + Y) - \gamma(Y + y_c - y_1)X \quad (19)$$

当 $I$ 的一阶变分为零时,边坡处于临界状态<sup>[7,14]</sup>。

此时,泛函 $F$ 满足如下欧拉方程。

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma'_s} \right) - \frac{\partial F}{\partial \sigma_s} + \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_s} = 0 \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \tau'_s} \right) - \frac{\partial F}{\partial \tau_s} + \lambda \frac{\partial G}{\partial \tau_s} = 0 \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

式中: $G$ 为滑动面上 $\sigma_s$ 和 $\tau_s$ 的相关关系,即为非线性M-C准则。

$$G(\sigma_s, \tau_s) = \tau_s - f(\sigma_s) = \tau_s - (1 + \sigma_s/\sigma_t)^{1/m} \quad (21)$$

因此

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma_s} = -\frac{\partial f(\sigma_s)}{\partial \sigma_s} = -\tan \varphi_t \quad (22)$$

将式(17)代入(18)中可得

$$X - Yy' + \lambda \tan \varphi_t = 0 \quad (23)$$

$$-(Y + Xy') + \lambda = 0 \quad (24)$$

因此,得

$$\frac{(-X + Yy')}{(Y + Xy')} = \tan \varphi_t \quad (25)$$

则根据图2和式(18)可得

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r' \sin \theta + r \cos \theta}{r \sin \theta - r' \cos \theta} \quad (26)$$

将式(18)、式(26)代入式(27)可得

$$\frac{dr}{d\theta} = r \tan \varphi_t \quad (27)$$

由式(27)可知,只有当 $\varphi_t$ 为常量时,边坡潜在滑动面为单一对数螺旋线。而由于岩土材料的强度非线性属性,强度参数与应力相关,故在非线性准则条件下,边坡潜在滑动面为多组对数螺旋线组合。

同理,将式(19)、式(21)代入式(20)中可得

式中,

$$\frac{d\sigma_s}{dx}Y - \frac{d\tau_s}{dx}X + 2\tau_s - \gamma X = 0 \quad (28)$$

$$\frac{d\tau_s}{dx} = \frac{d\sigma_s}{dx} \tan \varphi_t \quad (29)$$

$$\frac{d\sigma_s}{dx} = -\frac{d\sigma_s}{d\theta} \cdot \frac{1}{r' \cos \theta - r \sin \theta}$$

则可得

$$\frac{d\sigma_s}{d\theta} + 2\tau_s - \gamma r \cos \theta = 0 \quad (30)$$

由变分极值原理可知,当极值曲线的端点不固定时,泛函必须满足变分横截条件。

$$\left[ F - (y' - y'_1)F_{y'} \right]_{x=x_1} = 0 \quad (31)$$

$$\left[ \sigma(X - Yy') + \tau(Xy' + Y) - k_y y(Y + y_c - y_1)X - \frac{1}{2}k_x y(Y + y_c - y_1)(Y + y_1 - y_c) - (y' - y'_1)(-\sigma Y + \tau X) \right]_{x=x_1} = 0 \quad (32)$$

在滑动面端点处,有

$$(y - y_1)_{x=x_1} = 0 \quad (33)$$

再结合式(18)和(26)可得

$$\left[ \sigma_s(\cos \theta - \sin \theta y'_1) + \tau_s(\sin \theta + \cos \theta y'_1) \right]_{x=x_1} = 0 \quad (34)$$

于是,根据式(27)和式(30),并结合边界条件可求解临界状态下的边坡潜在滑动面及其上应力分布,进一步根据虚功率原理可以得到边坡高度 $h_1$ 。在已知边坡高度的情况下,通过折减强度参数,可以得到边坡的安全系数。

### 2.4 强度折减技术

在外荷载保持不变的情况下,边坡内土体发挥的最大抗剪强度与外荷载在边坡内产生的实际剪应力之比定义为抗剪强度折减系数。强度折减的

原理就是对土体强度参数除以一个折减系数 $F_s$ ,得到新的土体强度参数,然后将新的土体强度参数继续试算,一直试算到边坡达到临界状态时,即 $F_s$ 再稍微大一点,边坡就会发生破坏,折减系数 $F_s$ 就是边坡的安全系数。对于非线性M-C破坏准则,如式(1)所示,当引入强度折减技术时,实际上是对初始黏聚力 $c_0$ 进行折减<sup>[9,13]</sup>。假设土体的最大、最小主应力分别为 $\sigma_1$ 、 $\sigma_3$ ,其应力状态如图3所示。本文在严格上限变分解析的基础上,即不需要假定破坏面的前提下,引入强度折减技术,对土体强度参数进行折减,从而获得边坡极限状态下的安全系数。

### 2.5 求解步骤

根据前文的内容,可以通过边坡稳定性分析严格上限变分解析,在不假定滑动面破坏形式的前提下,获得边坡滑动面过坡趾以下时的临界高度,具体的步骤如下:

- 1) 已知边坡坡底角度、坡顶角度以及岩土体材料的强度参数;
- 2) 假定初值 $\theta_0$ 和 $r_0$ ,根据式(34)计算滑入点正应力 $\sigma_0$ ;
- 3) 假定角度增量为 $\Delta\theta$ ,则 $\theta_i = \theta + \Delta\theta$ ,采用四阶Runge-Kutta计算边坡滑动面各点的坐标 $(r_i, \theta_i)$ 和应力值 $\sigma_i$ 和 $\tau_i$ ;
- 4) 计算滑动面上的外力功率和内能耗散功率,根据虚功率平衡原理,计算 $L_1$ ;
- 5) 根据几何关系计算边坡的坡度和高度,并判断与已知边坡坡形参数是否相等,若不相等,则返回2)重新计算;
- 6) 最终输出 $\theta_0$ 、 $r_0$ 和 $h_1$ 得到均质边坡临界高度最优上限解及其对应的潜在滑动面。

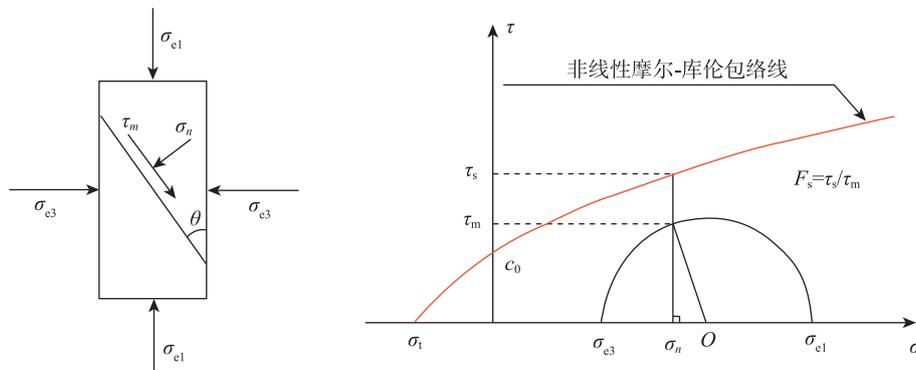


图3 单元应力状态与非线性M-C准则强度折减示意图

Fig. 3 Schematic diagram of unit stress state and nonlinear M-C criterion strength reduction

基于MATLAB 2021b平台,对上述过程进行了编程实现,并借助粒子群算法优化了边坡临界高度。需要说明的是,本文上限变分解析方法仅针对边坡滑动面在坡趾以下的破坏机制,对于滑动面过坡趾的情况,可参考文献[7]。

### 3 非线性有限差分分析

目前的数值分析软件中对于非线性破坏准则本构如非线性M-C准则的嵌入尚有待深入研究,其中较多也只是通过将非线性强度参数等效转换为线性强度参数的方式来实现,并不能真实反映岩土体材料的非线性属性。基于此,Fu等<sup>[16]</sup>采用有限元方法,根据每一增量步的单元应力状态,并以安全系数最小为依据获得单元瞬时抗剪强度参数,以此来计算边坡的安全系数。Sun等<sup>[17]</sup>基于切线法计算出各个单元的瞬时M-C强度参数,将非线性幂指数型破坏准则引入到考虑强度折减的边坡稳定性有限元分析中,提出了一种考虑强度非线性特征的边坡稳定性有限元强度折减法。

本文在文献[16-17]的基础上,利用FLAC 3D数值模拟软件的有限差分分析,考虑强度折减技术以及岩土体材料的非线性,计算边坡的安全系数及滑动面上的应力分布,并且与本文方法所计算结果进行对比验证。其原理如下:借助有限元离散的思想,将模型离散为有限单元,同时进行初始地应力平衡,获得单元初始应力,根据单元应力与抗剪强度参数的关系,获得单元的初始抗剪强度参数;然后将抗剪强度参数进行折减,折减系数为 $F_s$ ;再将折减后的抗剪强度参数赋值给单元并进行下一步的弹塑性计算,再次获得单元应力。如此反复,即可获得考虑岩土体材料非线性的边坡安全系数。其详细的流程见图4,其中 $c$ 、 $\varphi$ 分别为单元的黏聚力、内摩擦角; $ckup$ 、 $cklow$ 是用户给出的折减系数的上、下限值; $cks$ 是折减系数; $npl$ 是弹塑性分析的次数; $fp$ 是弹塑性分析的收敛公差; $ckdif$ 是上下限值的差值。

## 4 对比分析

### 4.1 OPTUM G2线性破坏准则下计算结果对比验证

采用两组不同抗剪强度参数及坡高的边坡算例,由于OPTUM G2中没有嵌入完整的非线性M-C准则,因此利用OPTUM G2计算在线性M-C准则条

件下的边坡滑动面过坡趾下方破坏的结果以及安全系数,实际上就是非线性参数 $m=1$ ,即特殊的非线性M-C准则下的结果。图5为边坡算例示意图,其中边坡具体的材料强度参数如表1所示。

OPTUM G2模型设置为标准边界条件,网格采用自适应划分技术,自适应迭代次数为3,初始网格数量为1 000,网格总数量为3 000,考虑强度折减,土体材料服从M-C破坏准则和相关流动法则。计算后得到边坡处于极限状态时的塑性剪切耗散图。

剪切耗散区即为边坡的潜在滑动面,通过OPTUM G2计算得到边坡临界状态下的安全系数、潜在滑动面以及滑动面上的正应力。将其与本文计算方法所得结果进行对比,如图6所示,可以看出两者计算所得的潜在滑动带吻合较好。

对于滑动面过坡趾下方破坏的情况,本文方法和OPTUM G2有限元法计算得出的滑动面上正应力的分布情况如图7所示。由图7可以看出本文方法计算结果与OPTUM G2计算结果十分接近:在坡顶处 $y=0$ ,随着深度的增加,主应力逐渐增大;随着深度向坡趾点逐渐变浅,主应力逐渐减小,最终主应力所对应的深度约为坡高。在坡趾点以下深度的范围内,即图7中10、6 m以上的范围内,每个深度对应两组主应力数据,符合边坡过坡趾以下的破坏模式。

边坡安全系数计算结果如表2所示,结果显示,本文方法和OPTUM G2有限元法计算结果误差最大不超过0.258%,说明本文方法在 $m=1$ 时,即线性破坏准则条件下所计算的数据是可靠的。

### 4.2 FLAC 3D非线性破坏准则条件下计算结果对比验证

为增加本文方法的可靠性,采用FLAC 3D对边坡在非线形破坏准则条件下进行模拟(本文取非线性参数 $m=1.6$ ),其中边坡具体材料属性参数及尺寸如表3所示。

边坡土体材料服从M-C破坏准则和相关流动法则,在模型左右及底部设置固定约束,采用六面体网格单元,算例3网格大小为2,网格数量为2 160,算例4网格大小为3,网格数量为1 281。经过计算获得边坡的应力场及位移场等,调整边坡的位移场轮廓显示使滑动带更为明显,如图8所示。最后提取潜在滑动面上的主应力,将FLAC 3D计算结果与本文方法计算结果进行对比,如图9、图10所示。

由图9可知,通过FLAC 3D计算所得到的边坡

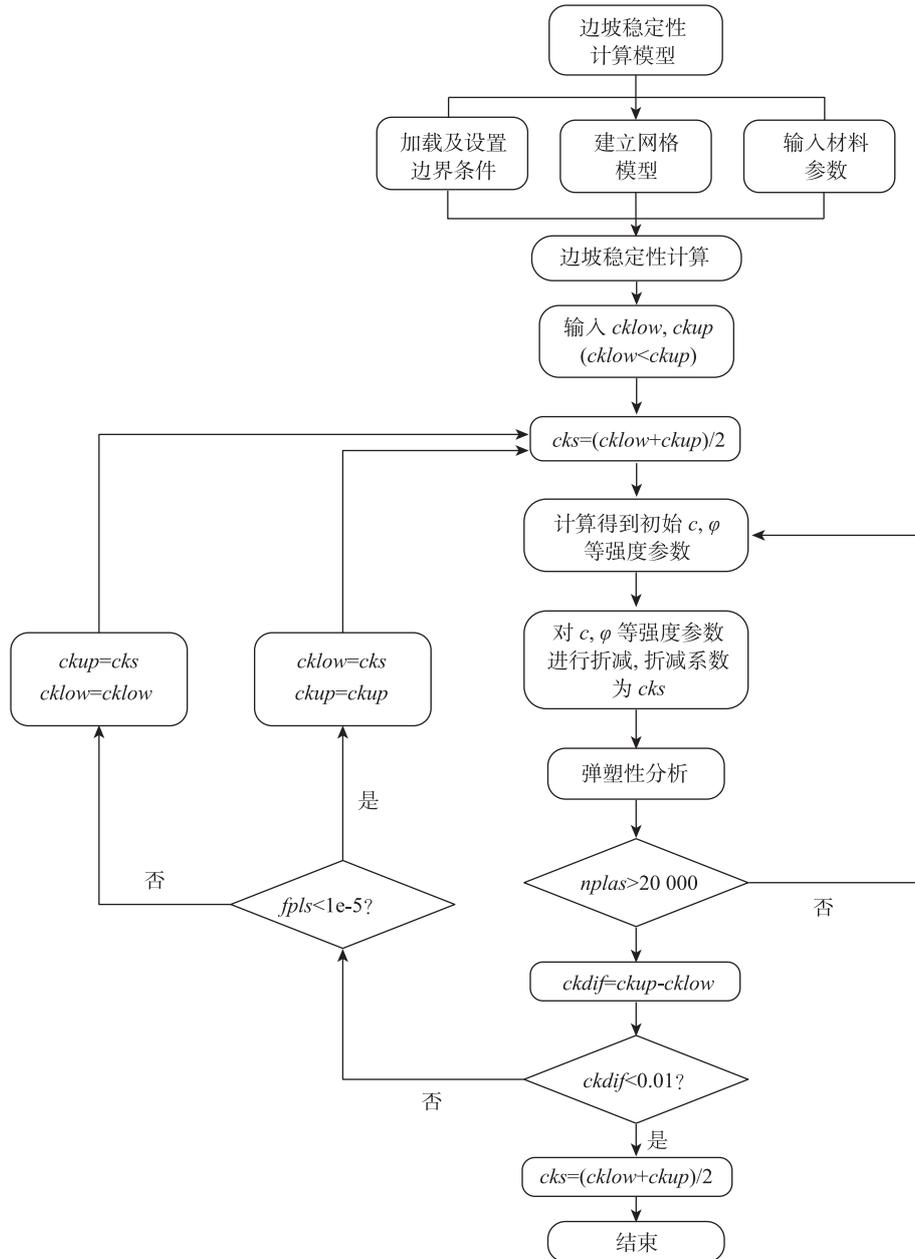


图4 非线性破坏准则下强度折减分析流程图

Fig. 4 Flowchart of strength reduction analysis under nonlinear failure criterion

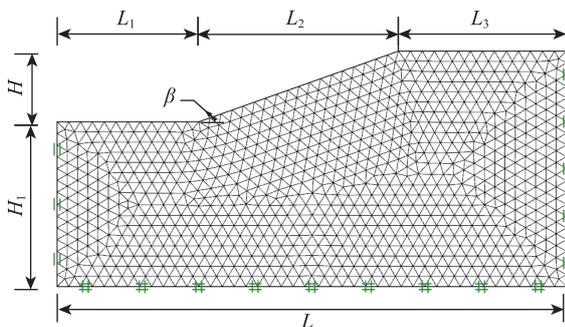


图5 边坡算例示意图 (G2)

Fig. 5 Geometry of the slope analysis case(G2)

表1 边坡土体强度参数(G2)

Tab.1 Strength parameters of slope soil (G2)

边坡算例	c/kPa	φ/(°)	β/(°)	γ/(kN/m <sup>3</sup> )	H/m
算例1	15	3	20	20	6
算例2	20	5	20	20	10

表2 边坡安全系数计算结果对比(G2)

Tab.2 Comparisons of slope safety factors (G2)

边坡算例	本文 $F_s$	有限元法 $F_s$	相对误差
算例1	1.086 8	1.084 0	0.258%
算例2	1.092 3	1.093 0	0.064%

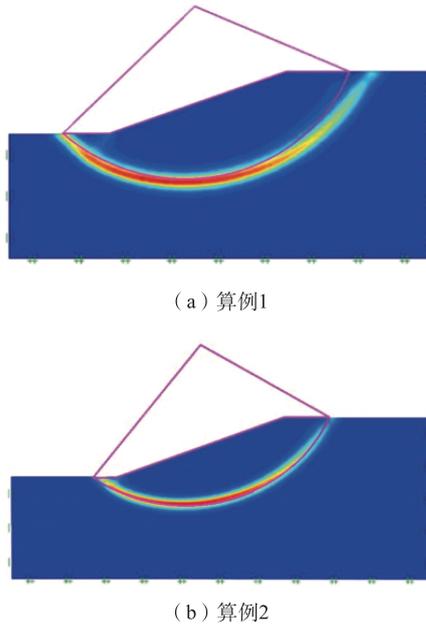


图6 本文与G2计算所得滑动面对比  
Fig. 6 Comparisons of critical sliding surfaces between variational method and G2

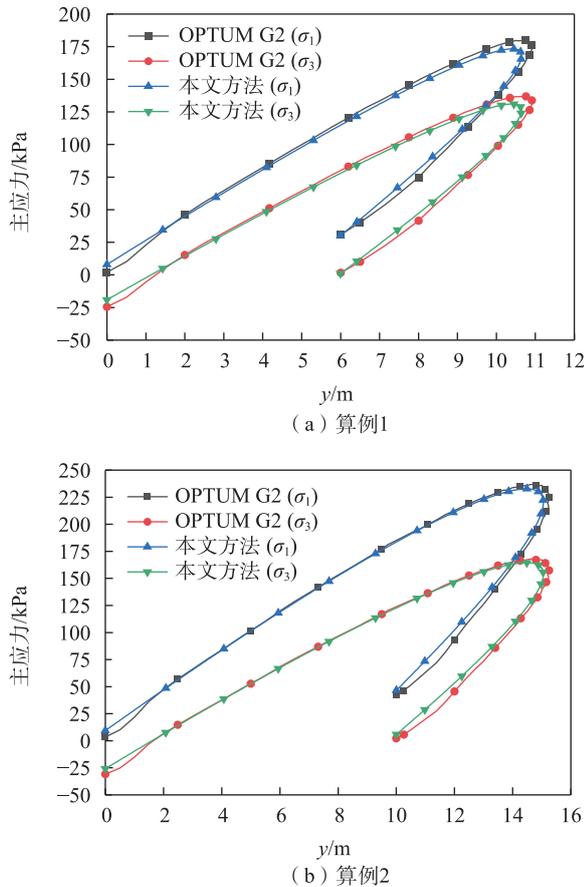


图7 滑动面正应力( $\sigma_1, \sigma_3$ )对比  
Fig. 7 Comparisons of normal stress ( $\sigma_1, \sigma_3$ ) on the sliding surface

表3 边坡土体强度参数(FLAC 3D)  
Tab.3 Strength parameters of slope soil(FLAC 3D)

边坡算例	$\beta/$ ( $^\circ$ )	$\alpha/$ ( $^\circ$ )	$\gamma/$ ( $\text{kN/m}^3$ )	$m$	$c_0/$ kPa	$\sigma_1/$ kPa	$H/$ m
算例3	20	5	20	1.6	90	247.3	25
算例4	30	5	20	1.6	90	247.3	25

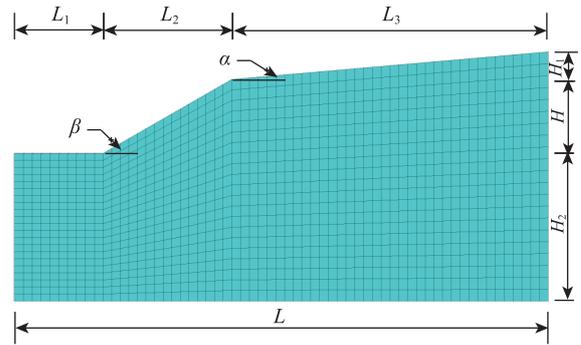


图8 边坡算例示意图(FLAC 3D)  
Fig. 8 Geometry of the slope analysis case (FLAC 3D)

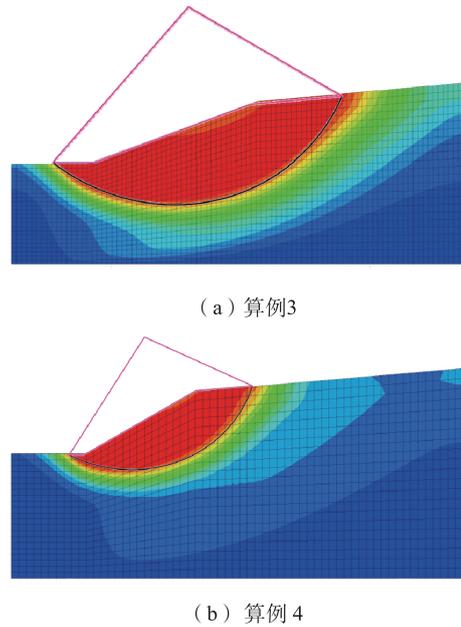


图9 本文与FLAC 3D计算所得滑动面对比  
Fig. 9 Comparisons of critical sliding surfaces between variational method and FLAC 3D

表4 边坡安全系数 $F_s$ 计算结果对比(FLAC 3D)  
Tab.4 Comparisons of slope safety factors  $F_s$ (FLAC 3D)

边坡算例	FLAC 3D	本文	文献[1]	最大相对误差
算例3	1.992 2	2.034 5	1.994 8	2.123%
算例4	1.757 8	1.773 0	1.729 8	2.497%

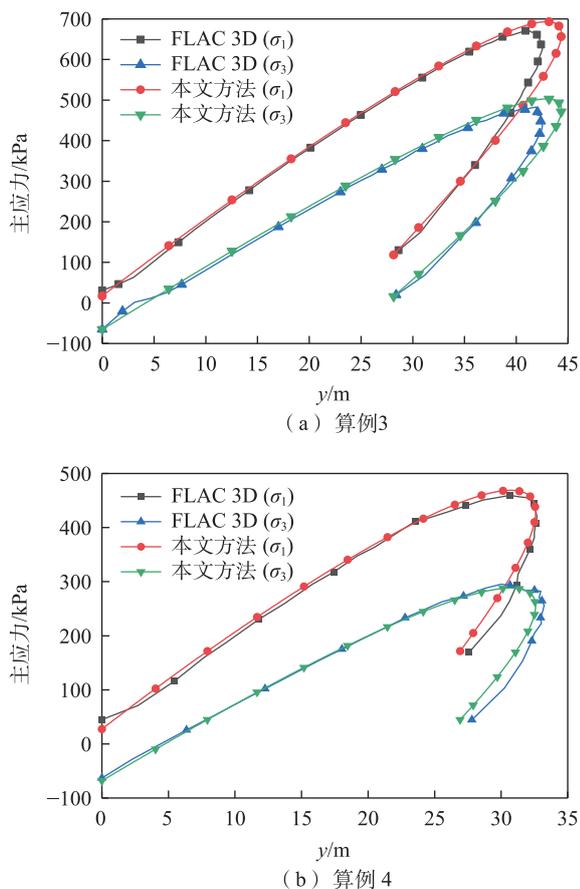


图10 滑动面正应力( $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$ )对比

Fig. 10 Comparisons of normal stress ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$ ) on the sliding surface

临界状态下的滑动面在坡顶位置处比本文方法计算所得滑动面更靠后,但二者所得滑动面的深度以及过坡趾的位置都基本一致。同时由图10可知,两种方法计算所得滑动面上的主应力变化趋势相同,并且误差也较小;随着深度的增加,滑动面上的主应力逐渐增大;随着滑动面通过坡趾下方,滑动面上的主应力逐渐减小,符合边坡过坡趾以下的破坏模式。

文献[1]考虑破坏模式-滑面应力-强度三者间的耦合关系,结合整体力学平衡方程,建立了非线性强度准则下边坡稳定性的极限平衡解答。采用文献[1]提出的方法对案例边坡进行稳定性分析,结果如表4所示。由表4可知,本文上限变分法所得安全系数稍大于极限平衡法和有限差分法的结果,3种方法的结果相差并不大,最大相对误差不超过2.5%,说明了本文方法在非线性破坏准则条件下具有一定的可靠性。

通过3种方法的互相对比,验证了本文方法对

边坡滑动面过坡趾下方破坏的计算方法的有效性,说明利用本文方法可以为边坡稳定性分析提供一定的理论支持和合理参考。

## 5 结论

1) 为真实反映岩土体材料的非线性特征,本文在不需要假定边坡潜在滑动面形式的前提下,基于整体平衡方程以及变分原理,建立了临界滑动面及其上应力的偏微分方程组,提出一种考虑强度非线性特征的均质平缓边坡稳定性严格上限变分解析方法,完善了边坡稳定性非线性性能耗分析理论,可真实反映滑动面上强度非线性特征。

2) 案例分析结果表明,本文方法计算所得潜在滑动面与OPTUM G2、FLAC 3D以及极限平衡法结果吻合良好,且滑动面上主应力分布规律也十分接近,可以证明本文方法的有效性。

3) 本文研究工作主要针对简单均质边坡,尚未拓展至复杂边界条件及荷载工况。因此,下一步工作重心则是将本文方法拓展至复杂边坡稳定性问题,以为实际工程提供有益指导。

## 参考文献:

- [1] 邓东平, 彭一航, 柳梦琦, 等. 滑面极径-应力-强度耦合关联下非线性破坏特征边坡稳定性极限平衡分析方法[J]. 岩土力学, 2024, 45(11): 3235-3258.  
DENG D P, PENG Y H, LIU M Q, et al. Limit equilibrium method for analyzing slope stability with nonlinear failure characteristics considering the coupling relationship of polar diameter, stress, and strength of the slip surface[J]. Rock and Soil Mechanics, 2024, 45(11): 3235-3258.
- [2] 孙洋, 罗伟, 荣耀, 等. 不同雨型条件下围堰边坡渗流稳定性数值分析[J]. 华东交通大学学报, 2022, 39(5): 29-35.  
SUN Y, LUO W, RONG Y, et al. Numerical analysis of seepage stability of cofferdam slope under different rain types[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2022, 39(5): 29-35.
- [3] 丁心香, 李帅. 边坡下限求解的突变分析方法[J]. 华东交通大学学报, 2021, 38(5): 40-47.  
DING X X, LI S. Catastrophe analysis method of slope lower bound solution[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2021, 38(5): 40-47.
- [4] 王均星, 王汉辉, 吴雅峰. 土坡稳定的有限元塑性极限分

- 析上限法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(11): 1867-1873.
- WANG J X, WANG H H, WU Y F. Stability analysis of soil slope by finite element method with plastic limit upper bound[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(11): 1867-1873.
- [5] 屈春来, 付迪, 刘世伟, 等. 非均质成层边坡极限承载力上限分析[J]. 岩土力学, 2022, 43(10): 2923-2932.
- QU C L, FU D, LIU S W, et al. Upper limit analysis for ultimate bearing capacity of heterogeneous stratified slope [J]. Rock and Soil Mechanics, 2022, 43(10): 2923-2932.
- [6] 汪小刚, 林兴超. 基于刚性块体离散的边坡稳定极限分析法[J]. 岩土工程学报, 2022, 44(9): 1587-1597.
- WANG X G, LIN X C. Limit analysis method for slope stability based on discretization of rigid blocks[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2022, 44(9): 1587-1597.
- [7] ZHANG X J, CHEN W F. Stability analysis of slopes with general nonlinear failure criterion[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1987, 11(1): 33-50.
- [8] BAKER R. Nonlinear Mohr envelopes based on triaxial data[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2004, 130(5): 498-506.
- [9] 杨小礼, 李亮, 刘宝琛. 非线性破坏准则对竖直边坡稳定性分析的影响[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(4): 592-596.
- YANG X L, LI L, LIU B C. Influences of nonlinear failure criterion on stability analysis of vertical cut using nonlinear sqp algorithm[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(4): 592-596.
- [10] ANYAEGBUNAM A J, OKAFOR F O. Calibration of four nonlinear failure envelopes from triaxial test data and influence of nonlinearity on geotechnical computations[J]. Geomaterials, 2021, 11(2): 42-57.
- [11] 贺志军, 曹吉, 赵炼恒, 等. 非线性Mohr-Coulomb破坏准则下边坡可靠度上限[J]. 土木建筑与环境工程, 2016, 38(6): 1-9.
- HE Z J, CAO J, ZHAO L H, et al. Upper bound reliability analysis of slope with nonlinear Mohr-Coulomb failure criterion[J]. Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering, 2016, 38(6): 1-9.
- [12] 唐高朋, 李亮, 赵炼恒, 等. 非线性破坏准则下边坡稳定性极限分析斜条分法[J]. 岩土力学, 2015, 36(7): 2063-2072.
- TANG G P, LI L, ZHAO L H, et al. Inclined slices method for limit analysis of slope stability with nonlinear failure criterion[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, 36(7): 2063-2072.
- [13] ZHAO L H, YANG F, ZHANG Y B, et al. Effects of shear strength reduction strategies on safety factor of homogeneous slope based on a general nonlinear failure criterion[J]. Computers and geotechnics, 2015, 63: 215-228.
- [14] BAKER R, FRYDMAN S. Upper bound limit analysis of soil with non-linear failure criterion[J]. Soils and Foundations, 1983,23(4): 34-42.
- [15] 赵炼恒, 赵伟龙, 韦彬, 等. 基于三参数破坏准则的均质边坡稳定性上限分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2023, 50(7): 188-199.
- ZHAO L H, ZHAO W L, WEI B, et al. Upper bound analysis of homogeneous slope stability based on three-parameter failure criterion[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2023, 50(7): 188-199.
- [16] FU W X, LIAO Y. Non-linear shear strength reduction technique in slope stability calculation[J]. Computers and Geotechnics, 2010, 37(3): 288-298.
- [17] SUN C W, CHAI J R, LUO T, et al. Nonlinear shear-strength reduction technique for stability analysis of uniform cohesive slopes with a general nonlinear failure criterion[J]. International Journal of Geomechanics, 2021, 21: 06020033.



第一作者:周璐(1986—),男,高级工程师,研究方向为公路与桥梁工程设计。E-mail: 382949387@qq.com。



通信作者:罗伟(1986—),男,副教授,博士,研究方向为岩土构筑物稳定性分析及加固机理。E-mail: luoweicsu@126.com。

(责任编辑:吴海燕)