解耦投影与共享一致性多视图子空间聚类

王 森，梁志坚，詹小秦，王悦琳

（华东交通大学理学院，江西 南昌 330013）

摘要：多视图数据通常存在特征空间异构及噪声问题，严重影响子空间聚类的稳定性和准确性。针对现有方法难以有效处理视图维度差异和低质量视图影响的局限，本文提出一种解耦投影与共享结构一致性的多视图子空间聚类方法（DP-SC-MVC）。该模型为每个视图设计独立的线性投影矩阵，实现特征解耦与维度对齐；同时学习跨视图共享表示，并施加低秩约束保持结构一致性；引入动态加权机制自适应调整各视图贡献，抑制劣质视图干扰；结合 $\ell_{2,1}$ 范数正则化增强对噪声和异常点的鲁棒性。最终构建统一优化框架，通过增广拉格朗日乘子法和交替方向最小化求解。在多个多视图基准数据集上的实验结果表明，该方法在聚类性能上显著优于现有主流多视图子空间聚类方法。DP-SC-MVC 方法有效处理了特征空间异构性和噪声问题，具有较好的实用价值和广泛的应用前景。

关键词：多视图子空间聚类；解耦投影；共享结构一致性；动态加权；低秩表示。

中图分类号：TP391　　**文献标志码**：A

Decoupled Projection and Shared Consistency Multi-View Subspace Clustering

Wang Sen, Liang Zhijian, Zhan Xiaoqing, Wang Yuelin

(School of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Multi-view data often suffer from feature space heterogeneity and noise interference, which severely affect the stability and accuracy of subspace clustering. To address the limitations of existing methods in handling view dimension differences and low-quality view impacts, this paper proposes a decoupled projection and shared structural consistency multi-view subspace clustering method (DP-SC-MVC). The model designs independent linear projection matrices for each view to achieve feature decoupling and dimension alignment. It simultaneously learns a shared representation across views and imposes low-rank constraints to maintain structural consistency. A dynamic weighting mechanism is introduced to adaptively adjust the contribution of each view, suppressing the interference from inferior views. Additionally, $\ell_{2,1}$-norm regularization is incorporated to enhance robustness against noise and outliers. The unified optimization framework is solved using the augmented Lagrange multiplier method and alternating direction minimization. Experimental results on multiple multi-view benchmark datasets demonstrate that the proposed method significantly outperforms existing mainstream multi-view subspace clustering methods in terms of clustering performance. The DP-SC-MVC method effectively addresses the issues of feature space heterogeneity and noise, demonstrating strong practical value and broad application prospects.

Key words: Multi-view subspace clustering; Decoupled projection; Shared consistency; Dynamic weighting; Low-rank representation

聚类是无监督学习方法，其核心是按数据特征将样本划分为簇。大数据时代标签获取成本高，多数数据缺乏标注。多视图聚类融合多源信息学习聚类结构，已在生物医学、互联网挖掘等领域广泛应用。但现实多视图数据存在特征维度不一、视图质量差异大及噪声干扰等问题，影响结果稳定性与可靠性[1]。因此，从异构噪声数据中挖掘共享结构并获取高质量标签，是该领域亟待解决的关键问题。

针对多视图数据异构与噪声问题，现有多视图子空间聚类方法多基于一致性假设，强制不同视图共享同一低维表示以对齐结构，虽提升了聚类稳定性，但难以处理视图间异质性。Gao 等[4]通过共享子空间表示融合多视图信息。为了解决特征空间异构问题，Brbić 和 Kopriva[5]结合低秩与稀疏约束处理异构性。Sol-tanolkotabi[6]等人基于稀疏子空间聚类（SSC）精准恢复子空间结构。Wang 等[7]通过深度网络层级化学

投稿日期：2026-03-10

基金项目：江西省自然科学基金项目（20242BAB25005）

习视图子空间并施加低秩约束以降噪。然而，这些方法均忽视视图异质性，无法有效解决特征维度不一致与噪声干扰问题。

本文提出解耦投影与共享一致性多视图子空间聚类方法，针对现有局限给出创新方案，核心创新如下：（1）为各视图设计独立线性投影矩阵，实现视图投影解耦，适配不同特征空间；（2）引入动态加权机制，自适应调整各视图贡献，抑制低质量视图干扰；（3）构建多视图共享表示，通过核范数约束保持低秩结构，实现跨视图一致性；（4）结合核范数与 $\ell_{2,1}$ 范数正则，增强模型抗噪声与异常点的鲁棒性。

1 多视图子空间聚类

1.1 多视图聚类

多视图聚类的核心思想是融合多视图互补信息，提升聚类的准确性与稳定性。各视图从不同视角刻画数据结构，需通过构建全局相似度矩阵整合跨视图信息：设单视图相似度矩阵为 w_v（其中 v 表示不同的视图），目标是学习全局相似度矩阵 $\boldsymbol{W}$ 以统一表达所有视图的相似性，常见融合方式包括加权平均、投影学习与深度学习。经典加权融合形式为

$$\boldsymbol{W}=\sum_{v}\alpha_v w_v, \tag{1}$$

式中 α_v 为各视图权重，用于平衡视图信息贡献。此类方法中，如何优化权重以适配不同视图质量是关键问题[8]。

1.2 多视图子空间聚类

多视图子空间聚类融合多视图特征信息，挖掘数据低维结构，核心是在视图间共享整合子空间信息，在高维数据处理中应用广泛。现有方法基于假设：数据点源自不同簇的子空间，且可由自身集合线性表示，其一般形式为

$$\min_{Z}\Gamma(\boldsymbol{X},\boldsymbol{XZ})+\lambda\Omega(\boldsymbol{Z}), \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{d_v\times n}$ 为输入数据矩阵（n为样本数，d为维度），$\boldsymbol{Z}$为系数矩阵，表征数据点间关系；$\lambda>0$ 为权衡因子；损失函数 $\Gamma(\cdot,\cdot)$ 与正则化项 $\Omega(\cdot)$ 依特定假设定义[9]。

2 DP-SC-MVC

2.1 问题定义与符号说明

给定 V 视图多视图数据集 $\{\boldsymbol{X}^{(v)}\in\mathbb{R}^{d_v\times n}\}_{v=1}^{V}$，$n$ 为样本数，d_v 为第 v 视图特征维度。本文目标是学习共享表示矩阵 $\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{k\times n}$（$k$ 为潜在空间维度）。同时引入自表示矩阵 $\boldsymbol{Z}\in\mathbb{R}^{n\times n}$、误差矩阵 $\boldsymbol{E}_R^{(v)}$，$\boldsymbol{E}_S$、视图权重向量 $\boldsymbol{\omega}$，分别用于子空间建模、鲁棒性提升、视图贡献平衡。

本文涉及的范数包括：（1）Frobenius 范数：$\|\boldsymbol{X}\|_F=(\sum_{i,j}x_{ij}^2)^{1/2}$ 用于度量重构误差；（2）核范数（Nuclear norm）：$\|\boldsymbol{Z}\|_*=\sum_i\sigma_i(\boldsymbol{Z})$，即矩阵奇异值之和，用于低秩约束；（3）$\ell_{2,1}$ 范数：$\|\boldsymbol{E}\|_{2,1}=\sum_j\|\boldsymbol{E}_{:,j}\|_2$，即列 ℓ_2 范数求和，用于增强模型对噪声与异常点的鲁棒性。

2.2 解耦投影与共享结构一致性建模

针对传统统一投影难以适配视图异质性的问题，本文为各视图设计独立线性投影矩阵 $\boldsymbol{P}^{(v)}\in\mathbb{R}^{d_v\times k}$，并施加正交约束，使各视图可将原始特征空间映射至统一的结构共享空间

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{X}^{(v)} = \boldsymbol{P}^{(v)}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{E}_R^{(v)} \\ &s.t.\ (\boldsymbol{P}^{(v)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{(v)} = \boldsymbol{I}_k, \end{aligned} \tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{E}_R^{(v)}$ 为视图的重构误差，用于刻画原始数据与投影重构结果的偏差。该解耦投影设计可有效适配不同视图的维度与分布异质性，实现多视图特征空间的对齐与融合，对应的共享空间结构如图 1 所示。

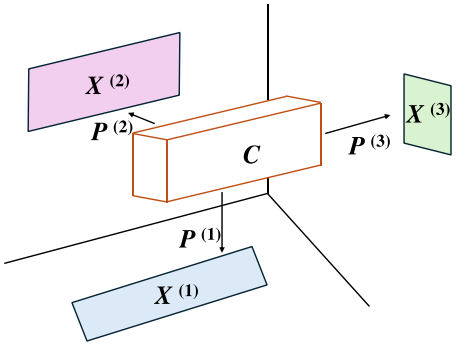

图 1　多视图的共享空间

Fig.1　Shared space with multiple views

为保证不同视图在潜在空间中聚类结构一致性，本文在共享表示 $\boldsymbol{C}$ 上引入自表示约束

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{E}_S, \tag{4}$$

式中：$\boldsymbol{Z} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为样本间的自表示系数矩阵；$\boldsymbol{E}_S$ 为子空间重构误差项。

2.3 动态加权与鲁棒正则化设计

在多视图数据中不同视图的信息质量往往不均衡。若不加区分地融合，低质量视图可能主导聚类结果。首先，为解决这一问题，本文设计了动态加权机制，引入权重向量 $\boldsymbol{\omega}$，其中每个元素 ω_v 对应第v个视图的权重。约束所有视图的权重之和为1，且每个权重的取值范围在0到1之间，以此保证权重的非负性与归一性，实现对不同视图贡献的合理分配。将该动态权重嵌入模型的重构误差项，形式如下：

$$\sum_{v=1}^{V}\omega_v \| \boldsymbol{X}^{(v)} - \boldsymbol{P}^{(v)}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{E}_R^{(v)}\|_F^2, \tag{5}$$

式中 $\|\cdot\|_F^2$ 为 Frobenius 范数的平方，用于度量第 v 个视图的重构偏差。在优化过程中，权重 $\boldsymbol{\omega}$ 会根据各视图的误差动态调整，从而自适应地降低劣质视图的影响，增强整体聚类性能。

其次，为增强模型对噪声与异常点的鲁棒性，本文引入 $\ell_{2,1}$ 范数对误差矩阵施加正则化

$$\|\boldsymbol{E}\|_{2,1}, \boldsymbol{E} = [\boldsymbol{E}_R; \boldsymbol{E}_S], \tag{6}$$

式中：$\boldsymbol{E}$为全局误差矩阵，由各视图重构误差与子空间误差拼接而成；$\ell_{2,1}$ 范数通过对矩阵列的 ℓ_2 范数求和施加惩罚，可实现列稀疏性，自动抑制含噪样本与异常点的误差，避免其干扰共享表示的学习。

最终，为捕捉数据的全局子空间结构，本文对自表示矩阵$\boldsymbol{Z}$施加核范数约束 $\|\boldsymbol{Z}\|_*$，强制$\boldsymbol{Z}$保持低秩特性，从而建模多视图数据的共享子空间结构一致性。该约束确保各视图在保留自身差异性的同时，学习到一致的共享特征表示。

综上所述，本文提出的 DP-SC-MVC 模型的最终优化问题可表示为

$$\begin{aligned} &\min_{\{P^{(v)}\},C,Z,\{E_R^{(v)}\},E_S,\omega} \sum_{v=1}^{V}\omega_v \left\|\boldsymbol{X}^{(v)} - \boldsymbol{P}^{(v)}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{E}_R^{(v)}\right\|_F^2 + \lambda\|\boldsymbol{Z}\|_* + \beta\|\boldsymbol{E}\|_{2,1} + \alpha\|\boldsymbol{\omega}\|_2^2 \\ &s.t. \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{E}_S, \boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega} = 1, 0 \le \boldsymbol{\omega} \le 1, (\boldsymbol{P}^{(v)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{(v)} = \boldsymbol{I}, \end{aligned} \tag{7}$$

式中各项的物理意义如下：① 加权重构误差项：$\sum_{v=1}^{V}\omega_v\left\|\boldsymbol{X}^{(v)}-\boldsymbol{P}^{(v)}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E}_R^{(v)}\right\|_F^2$，用于度量各视图的重构质量，通过动态权重 ω_v 自适应平衡不同视图的贡献；② 低秩约束项：$\lambda\|\boldsymbol{Z}\|_*$，通过核范数强制自表示矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 保持低秩，刻画数据的全局子空间结构一致性；③ 鲁棒正则化项：$\beta\|\boldsymbol{E}\|_{2,1}$，通过 $\ell_{2,1}$ 范数抑制噪声与异常点的干扰，提升模型鲁棒性；④ 权重正则项：$\alpha\|\boldsymbol{\omega}\|_2^2$，防止权重过度集中于单个视图，保证多视图贡献的适度平衡。

这一目标函数将解耦投影、共享一致性、动态加权和鲁棒性约束有机结合，构成了完整的多视图子空间聚类框架，模型流程图如图 2 所示。

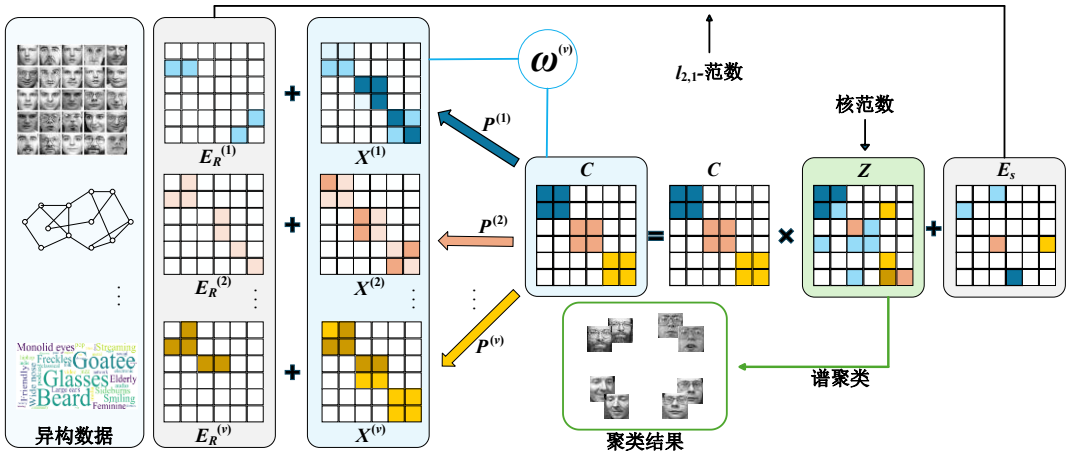

图 2　DP-SC-MVC 模型

Fig.2　DP-SC-MVC model

3 DP-SC-MVC 模型优化与求解

3.1 增广拉格朗日函数构建

基于第 2 节目标函数(7)，该优化问题含多约束。我们采用“增强拉格朗日乘子法(ALM)与交替方向最小化(ADM)”求解。为实现 ADM 策略，需引入辅助变量 $\boldsymbol{J}$ 替代 $\boldsymbol{Z}$，并引入拉格朗日乘子 $\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_3$ 及惩罚参数 $\mu>0$，由此构建如下 ALM 优化问题(8)

$$\begin{aligned}&\Gamma(\boldsymbol{P},\boldsymbol{C},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{E}_R,\boldsymbol{E}_S,\boldsymbol{J})\\&=\sum_{v=1}^{V}\omega_v\left\|\boldsymbol{X}^{(v)}-\boldsymbol{P}^{(v)}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E}_R^{(v)}\right\|_F^2+\lambda\|\boldsymbol{Z}\|_*+\beta\|\boldsymbol{E}\|_{2,1}+\alpha\|\boldsymbol{\omega}\|_2^2\\&+\Phi(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{X}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E}_R)+\Phi(\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{E}_S)\\&+\Phi(\boldsymbol{Y}_3,\boldsymbol{J}-\boldsymbol{Z})\\&s.t.\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I},\end{aligned}\tag{8}$$

式中：$\Phi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\frac{\mu}{2}\|\boldsymbol{B}\|_F^2+\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle$；$\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle=tr(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})$；$\mu>0$ 为惩罚标量；$\boldsymbol{A}$为拉格朗日乘子。

3.2 交替方向最小化

根据交替方向最小化（ADM）策略[10]，我们将目标分成可以有效优化的子问题。然后，对所有变量进行循环优化，同时保持先前更新的变量固定。具体来说，每个子问题的求解如下：

1）*P*-子问题：解耦投影更新。固定其他变量后，关于 $\boldsymbol{P}^{(v)}$ 的优化问题为

$$\boldsymbol{P}^*=\arg\ \min_{\boldsymbol{P}}\Phi(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{X}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E}_R).\tag{9}$$

这是典型的 Wahba 问题[11]:给定目标函数 $\min_R \|\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{GR}\|_F^2$ *s.t.* $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$ 最优解为 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 是 $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$ 的 SVD 分解的左、右奇异值。针对式(9)有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{*} &= \arg\ min_P \Phi(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{X}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E}_R)\\ &= \arg\ min_P \frac{\mu}{2}\left\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E}_R+\boldsymbol{Y}_1/\mu\right\|_F^2\\ &= \arg\ min_P \frac{\mu}{2}\left\|(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}_1/\mu-\boldsymbol{E}_R)-\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}\right\|_F^2\\ &= \arg\ min_P \frac{\mu}{2}\left\|(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}_1/\mu-\boldsymbol{E}_R)^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\right\|_F^2.\end{aligned} \tag{10}$$

根据Wahba问题，如果$\boldsymbol{P}$被约束为正交（即 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$），则 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$ 将是最优解，其中 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{V})$ 是 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}_1/\mu-\boldsymbol{E}_R)^{\mathrm{T}}$ 的左（右）奇异值。实际上，$\boldsymbol{P}$的约束可以放宽（即 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$）。

2）*C*-子问题：为了更新 $\boldsymbol{C}$，应该优化以下目标

$$\boldsymbol{C}^{*}=\arg\min_{\boldsymbol{C}} \Phi(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{X}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E}_R)+\Phi(\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{E}_S). \tag{11}$$

将该目标函数对$\boldsymbol{C}$求导，然后将导数设置为零，我们得到以下方程

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{F}\\ &with\ \boldsymbol{D}=\mu\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P},\\ &\boldsymbol{E}=\mu(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{I}),\\ &\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{Y}_2(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{I}))+\mu(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{E}_S^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_R-\boldsymbol{E}_S\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}),\end{aligned} \tag{12}$$

式(12)是 Sylvester 方程[12]。为了稳定性，矩阵 $\boldsymbol{D}$ 被强制为严格正定，矩阵 $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵。我们采用 Bartels-Stewart 算法[12]来求解式(12)。在该算法中，通过 QR 分解将系数矩阵变换为 Schur 形式，然后采用回代来求解所获得的三角系统。需要注意的是，所提出的模型可以在 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$ 的条件下精确求解。

3）*Z*-子问题：在其他变量固定的情况下，可以通过优化以下目标函数来更新子空间表示矩阵 $\boldsymbol{Z}$

$$\boldsymbol{Z}^{*}=\arg\min_{\boldsymbol{Z}} \Phi(\boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{J}-\boldsymbol{Z})+\Phi(\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{E}_S), \tag{13}$$

可得闭式解

$$\boldsymbol{Z}^{*}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{I})^{-1}[(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_S)+(\boldsymbol{Y}_3+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_2)/\mu]. \tag{14}$$

4）*E*-子问题：为了更新重构误差 $\boldsymbol{E}$，我们需要解决以下问题

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}^{*} &= \arg\min_{\boldsymbol{E}} \|\boldsymbol{E}\|_{2,1}+\Phi(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{X}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E}_R)+\Phi(\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{E}_S)\\ &= \arg\min_{\boldsymbol{E}} \frac{1}{\mu}\|\boldsymbol{E}\|_{2,1}+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{G}\|_F^2,\end{aligned} \tag{15}$$

其中$\boldsymbol{G}$是通过垂直连接 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{Y}_1/\mu$ 和 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Y}_2/\mu$ 构建的。通过Liu等[13]人提到的引理3.2可以得到最优解。

5）*J*-子问题：在其他变量固定的情况下，我们得到关于 $\boldsymbol{J}$ 的以下目标函数

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}^{*} &= \arg\min_{\boldsymbol{J}} \lambda\|\boldsymbol{J}\|_{*}+\Phi(\boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{J}-\boldsymbol{Z})\\ &= \frac{\lambda}{\mu}\|\boldsymbol{J}\|_{*}+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{J}-(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Y}_3/\mu)\|_F^2,\end{aligned} \tag{16}$$

这种低秩近似问题可以用奇异值阈值（SVT）算法[14]来解决

$$\boldsymbol{J} = \mathrm{SVT}\left(\boldsymbol{Z} - 1/\mu\boldsymbol{Y}_3, \lambda/\mu\right). \tag{17}$$

6）$\boldsymbol{\omega}$-子问题：在多视图学习中，视图权重的优化旨在平衡各视图对最终模型的贡献。具体地，视图权重更新的问题可表示为

$$\boldsymbol{\omega}^* = \arg\min_{\boldsymbol{\omega}} \sum_{v=1}^{V} \omega_v \left\| \boldsymbol{X}^{(v)} - \boldsymbol{P}^{(v)}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{E}_R^{(v)} \right\|_F^2 + \alpha \left\| \boldsymbol{\omega} \right\|_2^2, \tag{18}$$

式(18)包含加权重构误差和正则化项。为最小化该目标函数，使用梯度下降法更新权重

$$\omega_v \leftarrow \omega_v - \eta\left(\left\| \boldsymbol{X}^{(v)} - \boldsymbol{P}^{(v)}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{E}_R^{(v)} \right\|_F^2 + 2\alpha\omega_v \right). \tag{19}$$

模型迭代更新视图权重以优化结果，以学习率控制更新步长，平衡收敛速度与稳定性。本文经网格搜索确定学习率为0.01，可实现快速稳定收敛。

7）乘子与参数更新：我们采用了交替乘子法（ADMM）来求解拉格朗日乘子和参数的更新。具体更新规则如下

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y}_1^{(v)} &\leftarrow \boldsymbol{Y}_1^{(v)} + \mu(\boldsymbol{X}^{(v)} - \boldsymbol{P}^{(v)}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{E}_R^{(v)}) \\ \boldsymbol{Y}_2 &\leftarrow \boldsymbol{Y}_2 + \mu(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{E}_S) \\ \boldsymbol{Y}_3 &\leftarrow \boldsymbol{Y}_3 + \mu(\boldsymbol{J} - \boldsymbol{Z}). \end{aligned} \tag{20}$$

参数更新规则如下

$$\mu \leftarrow \min(\rho\mu, \mu_{\max}), \tag{21}$$

式中：μ 是乘子更新的步长。ρ 是一个常数，用于控制乘子的增长速度，$\mu_{\max}$ 是乘子的最大值，避免乘子过大。

3.3 算法流程与伪代码

优化过程在算法 1 中进行了总结。

算法 1　DP-SC-MVC 优化算法

输入：	多视图矩阵 $\{\boldsymbol{X}^{(1)},...,\boldsymbol{X}^{(V)}\}$；参数 λ 和共享表示 $\boldsymbol{C}$ 的维度 k
初始化：	$\boldsymbol{P}=0,\boldsymbol{E}_R=0,\boldsymbol{E}_S=0,\boldsymbol{J}=\boldsymbol{Z}=0,\boldsymbol{Y}_1=0,\boldsymbol{Y}_2=0,\boldsymbol{Y}_3=0,\mu=10^{-5},\varepsilon=10^{-4},\max_\mu=10^5$;随机初始化$\boldsymbol{C}$
当未收敛时：	Step1：更新变量 $\boldsymbol{P}^{(v)},\boldsymbol{C},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{E}_R,\boldsymbol{E}_S,\boldsymbol{J},\boldsymbol{\omega}$ Step2：更新乘子 $\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_3$ Step3：更新参数 μ为$\mu:=\min(\rho\mu,\mu_{\max})$ Step4：检查收敛条件： $\left\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E}_R\right\|_\infty<\varepsilon,$ $\left\|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{E}_S\right\|_\infty<\varepsilon,$ $\left\|\boldsymbol{J}-\boldsymbol{Z}\right\|_\infty<\varepsilon$
结束:	输出 $\boldsymbol{Z},\boldsymbol{C},\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{E}$

4 实验与结果分析

在本章中，我们通过在四个基准数据集上将 DP-SC-MVC 与几种经典的多视图子空间学习方法进行比较来评估 DP-SC-MVC 的性能。

4.1 实验数据集及实验设置

1）数据集：本文选取 ORL[15]、Reuters[16]、MSRCV1[17]、BBCSports[18]四个经典多视图数据集，涵盖人脸、多语言文档、图像、新闻文本等不同模态，用于模型有效性评估，详细信息见表 1。

表 1　实验数据集

Tab.1　Experimental datasets

数据集	样本数/个	类别数/个	视角数/个
ORL	400	40	3
Reuters	2000	5	2
MSRCV1	210	7	5
BBCSport	282	4	3

2）实验参数：在实验中，我们使用四个参数来评估模型的性能。通过网格搜索确定了数据集MSRCV1、Reuters、ORL和BBCSport的实验参数 λ（核范数正则化系数）、β（$\ell_{2,1}$范数正则化系数）、α（权重正则化系数）和k（子空间维度）最佳设置如下：{λ=1.175，β=1.5，α=0.01，k=20}，{λ=0.8，β=1.2，α=0.0125，k=10}，{λ=1.715，β=1.0，α=0.0075，k=40}，{λ=0.5，β=0.5，α=0.005，k=10}。

4.2 对比实验

我们将所提 DP-SC-MVC 方法与下面五个先进的多视图子空间聚类方法进行比较：MSSC[5]：稀疏子空间聚类与低秩表示的多模态扩展，通过跨模态共享表示实现鲁棒聚类，核化处理非线性数据；DiMSC[19]：基于 HSIC 标准挖掘视图互补信息，减少冗余以提升聚类精度；LT-MSC[20]：低秩张量约束多视图子空间聚类，将视图子空间表示建模为张量，通过低秩约束降冗余；LMVSC[21]：面向大规模线性复杂多视图数据的子空间聚类方法；MCLES[22]：在潜在嵌入空间中实现多视图聚类的统一优化方法。

上述方法分别代表稀疏/低秩表示、HSIC 互补融合、低秩张量约束、大规模处理、统一优化等典型思路。实验采用 NMI（归一化互信息）、ACC（准确性）、F-measure（F 值）、RI（兰德指数）4 项指标评估性能。

表 2 为 4 个数据集（ORL、Reuters、MSRCV1、BBCSport）的对比结果。DP-SC-MVC 在多数指标与数据集上性能最优：NMI 指标中，ORL、MSRCV1 分别达到 94.4%和 81.7%，优于次优方法；Reuters 数据集的 NMI 为 42.3%，虽相对较低但仍显著高于 LMVSC(37.28%)与 MCLES(35.79%)。在 ACC 指标上，MSRCV1 达 93.38%，大幅领先；在 RI 指标上，所有数据集均取得最高值，其中 Reuters 达 80.05%，远高于 MSSC(67.09%)与 DiMSC(67.49%)。

表 2　与 MSSC、DiMSC、LT-MSC、LMVSC 和 MCLES 方法的比较

Tab.2　Comparison with MSSC, DiMSC, LT-MSC, LMVSC, and MCLES methods

数据集	**方法**	NMI(%)	ACC(%)	F-Measure(%)	RI(%)
ORL	MSSC	92.63	82.00	79.35	84.94
	DIMSC	94.00	83.80	**80.70**	85.60
	LT-MSC	86.20	80.40	74.80	76.10
	LMVSC	73.30	47.75	35.36	96.85
	MCLES	90.33	78.00	70.91	98.46
	DP-SC-MVC**(Ours)**	**94.40**	**83.90**	72.80	**98.60**
Reuters	MSSC	20.56	44.50	37.23	67.09

数据集	方法	NMI(%)	ACC(%)	F-Measure(%)	RI(%)
	DIMSC	18.21	40.00	28.68	67.49
	LT-MSC	17.93	36.20	28.29	68.16
	LMVSC	37.28	48.17	48.89	21.73
	MCLES	35.79	**49.47**	47.04	21.07
	DP-SC-MVC**(Ours)**	**42.30**	45.70	**51.30**	**80.05**
MSRCV1	MSSC	63.10	70.99	62.87	86.54
	DIMSC	62.87	68.57	57.92	89.72
	LT-MSC	70.04	80.00	68.48	**91.12**
	LMVSC	24.95	34.28	24.74	78.93
	MCLES	68.89	78.57	66.77	86.68
	DP-SC-MVC**(Ours)**	**81.70**	**93.38**	**85.29**	90.60
BBCSport	MSSC	69.96	79.78	76.13	87.27
	DIMSC	58.11	87.32	91.08	91.32
	LT-MSC	72.56	89.43	81.19	92.91
	LMVSC	37.18	60.11	47.27	64.73
	MCLES	68.70	85.48	76.32	86.68
	DP-SC-MVC**(Ours)**	**87.31**	**90.17**	**83.09**	**93.70**

由上表可知，DP-SC-MVC 在四个数据集的 16 个子指标中赢得 13 个，特别是在处理异构性和噪声较强的 Reuters 数据集上表现出更强的鲁棒性。这得益于解耦投影、共享一致性建模、动态加权和 $\ell_{2,1}$ 鲁棒项的协同作用，提升了多视图数据的判别性和一致性。

为进一步定性验证，我们在 ORL 数据集上进行了 t-SNE 可视化分析，结果如图 3 所示。原始视图嵌入样本严重混叠、类间分离度差；模型学习的共享表示 C 嵌入后，同类样本形成了紧凑的簇结构，类间边界更为清晰。表明方法成功提取高判别性低维表示，显著提升聚类可分性，与定量指标结果一致，验证了其在多视图异构数据上的优越性。

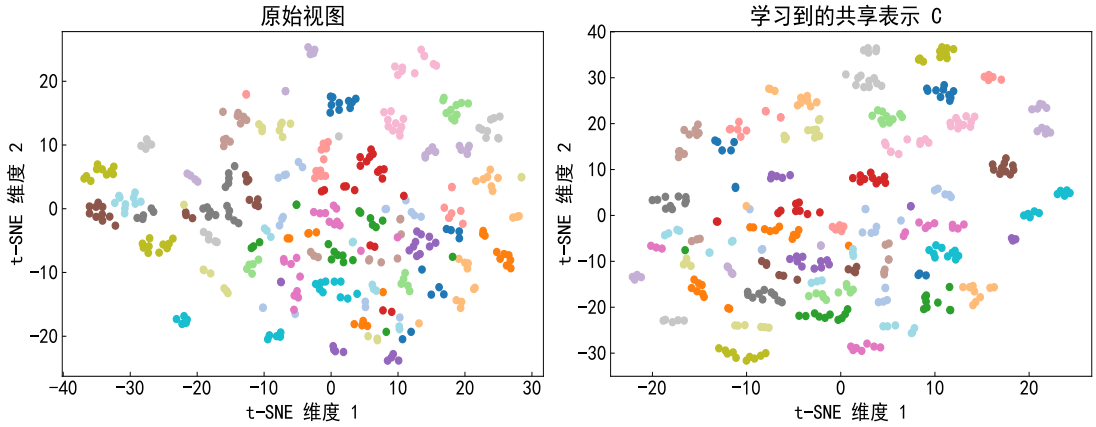

图 3　ORL 数据集上的 t-SNE 可视化结果

Fig.3　t-SNE Visualization Results on the ORL Dataset

4.3 模型分析

4.3.1 收敛性分析

为验证 DP-SC-MVC 算法的收敛性，我们监测了四个数据集（ORL、Reuters、MSRCv1、BBCSport）上目标函数随迭代的变化。如图 4 所示，所有数据集的目标函数均呈单调下降趋势，并在约 30–40 次迭代后趋于稳定，体现了快速稳定的收敛特性。尽管不同数据集因样本规模和特征维度差异导致目标函数值的量级有所不同（如 Reuters 数据集初始值较高，而 ORL 和 BBCSport 较低），但收敛行为高度一致。该现象充分验证了算法的鲁棒性和效率。基于增广拉格朗日乘子法（ALM）的优化框架保证了算法能够收敛到局部最优解，因为各子问题均为凸优化问题，且罚参数 μ 采用自适应递增策略。

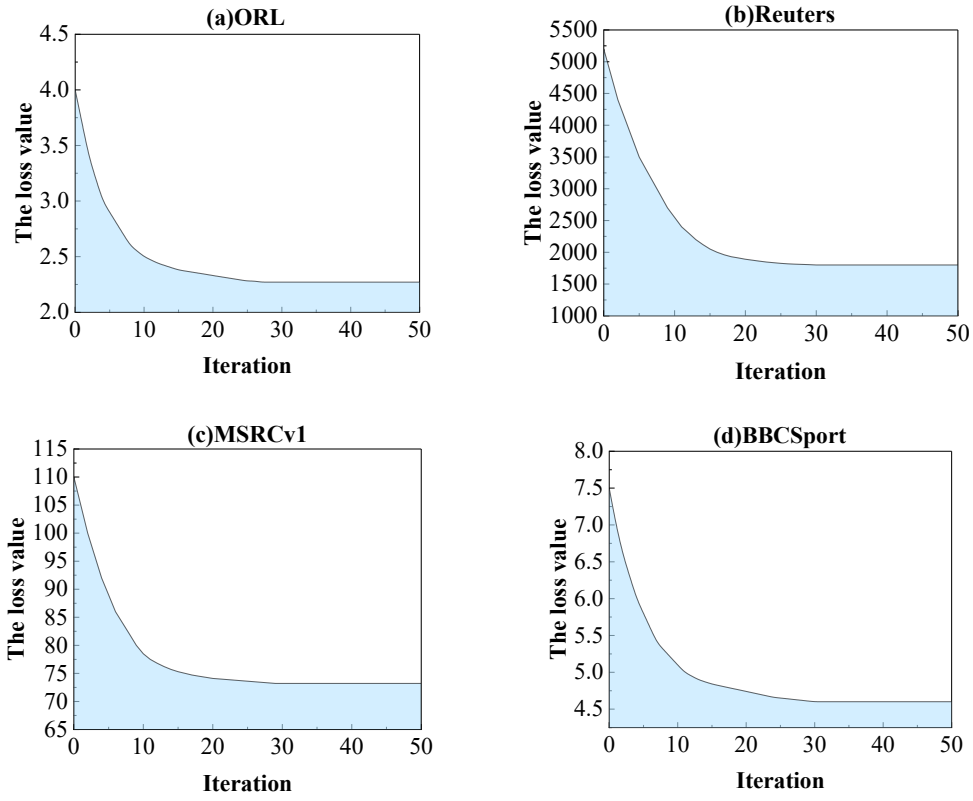

图 4　DP-SC-MVC 算法在四个数据集上的目标函数收敛曲线

Fig.4　Convergence curves of the objective function for the DP-SC-MVC algorithm on four datasets

4.3.2 参数敏感度分析

我们对关键超参数 λ（核范数正则化系数）、β（$\ell_{2,1}$范数正则化系数）、α（权重正则化系数）以及 k（子空间维度）进行了敏感性分析。实验在四个数据集（MSRCv1、Reuters、ORL 和 BBCSport）上独立进行网格搜索，以准确率（ACC）作为主要评价指标。

如图 5 所示，不同颜色对应不同数据集，模型在四个数据集上都表现出较强的参数鲁棒性：性能在较宽的参数范围内保持较高水平，仅在极端值时略有下降。总体而言，DP-SC-MVC 在合理参数范围内表现出较强的鲁棒性，无需过度精细调参即可获得优异性能，进一步证实了所提解耦投影、动态加权和一致性建模的稳健性。

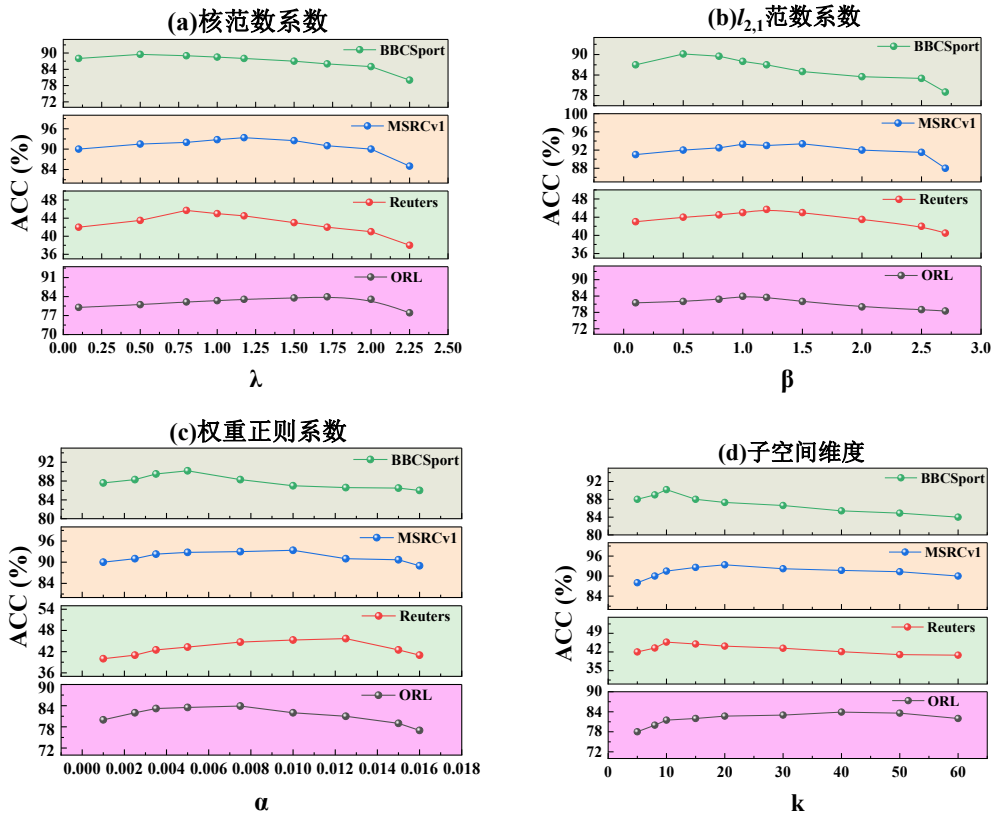

图 5　DP-SC-MVC 模型的参数敏感度分析（以准确率 ACC 为例）

Fig.5　Parameter sensitivity analysis of DP-SC-MVC (using ACC as example)

4.3.3　复杂度分析

DP-SC-MVC 算法单次迭代的时间复杂度主要由矩阵运算主导。设样本数为 n，平均特征维度为 d，视图数为 V，子空间维度为 k（通常 $k<<n$）：$\boldsymbol{P}$ 更新：投影计算 $O(Vndk)$ +SVD 分解 $O(Vk^3)$；$\boldsymbol{C}$ 更新：Sylvester 方程求解 $O(n^2k+nk^2)$（通过 Schur 分解实现）；$\boldsymbol{Z}/\boldsymbol{J}$ 更新：矩阵求逆/奇异值阈值 $O(n^2k)$；$\boldsymbol{E}$ 更新：近端算子 $O(Vnd+n^2)$；$\boldsymbol{\omega}$ 更新：残差计算 $O(Vnd)$。

单次迭代复杂度为 $O(Vndk+n^2k+Vk^3)$。假设迭代次数 $T\approx 50$，总时间复杂度为 $O(TVndk+Tn^2k)$，对于中等规模的数据集 $(n\approx 10^3)$ 是比较高效的。空间复杂度为 $O(Vnd+n^2)$，主要用于存储原始数据和亲和矩阵。

4.3.4　消融实验

为了评估各组件的贡献，我们进行了消融实验，包括：去除解耦投影（采用统一投影）、去除动态加权（采用等权融合）、去除 $\ell_{2,1}$ 范数（替换为 Frobenius 范数）、去除核范数约束（不对 Z 施加低秩约束）。在 ACC（%）指标上的结果如表 3 所示。

表 3　各模块消融实验在 ACC（%）指标上的结果

Tab.3　Results of ablation experiments on ACC (%) metric for each module

数据集	完整模型	无解耦投影	无动态加权	无 $\ell_{2,1}$ 范数	无核范数约束
ORL	83.90	78.00	80.00	81.00	79.00
Reuters	45.70	40.00	42.00	43.00	41.00
MSRCv1	93.38	85.00	88.00	90.00	86.00

BBCSport	90.17	82.00	85.00	87.00	83.00

实验结果表明，完整模型在所有数据集上均显著优于各消融变体，其中解耦投影的贡献最大（ACC 下降 8%~10%），验证了其在处理视图异构性方面的核心作用。动态加权和鲁棒性项分别带来 3%~5%的性能提升，进一步证实了所提设计的有效性。

5 总结

采用解耦投影与共享一致性多视图聚类（DP-SC-MVC）方法，对多视图数据的特征空间异构、视图质量差异及噪声干扰等问题进行了研究，得出以下结论。

1）通过各视图独立投影矩阵实现特征解耦，学习共享低秩表示保持跨视图一致性，引入动态加权机制自适应调整视图权重，结合 $\ell_{2,1}$ 范数增强鲁棒性，显著提升聚类性能。

2）多基准数据集实验表明，该方法性能显著优于现有主流方法，验证了所提策略的有效性与优越性。

3）线性投影对高度非线性数据适配性有限，且仅在中小规模数据集验证；未来可拓展至非线性空间、大规模场景，以及跨模态检索等相关任务。

参考文献

[1] 王森,陈翔,詹小秦,等. 基于自然和加权共享最近邻的密度峰值聚类算法[J]. 华东交通大学学报,2025,42(4)120-126.
WANG S, CHEN X, ZHAN X Q, et al. Density peak clustering algorithm based on natural and weighted shared nearest neighbors [J]. Journal of East China Jiaotong University, 2025, 42(4): 120-126

[2] 许凯强.基于多层深度特征的多视图子空间聚类[D].大连理工大学,2024.DOI:10.26991/d.cnki.gdllu.2024.000152.
XU K Q. Multi-View Subspace Clustering Based on Multi-Layer Deep Features [D]. Dalian Universityof Technology, 2024.DOI:10.26991/d.cnki.gdllu.2024.000152.

[3] 徐杰.多视图聚类的特征表示研究[D].电子科技大学,2024.DOI:10.27005/d.cnki.gdzku.2024.005750.
XU J. Research on Feature Representation in Multi-View Clustering [D]. University of Electronic Science and Technology of China, 2024. DOI: 10.27005/d.cnki.gdzku.2024.005750

[4] GAO H, NIE F, LI X, et al. Multi-view subspace clustering[C]//Proceedings of the IEEE international conference on computer vision. 2015: 4238-4246.

[5] BRBIC M, KOPRIVA I. Multi-view low-rank sparse subspace clustering[J]. Pattern recognition, 2018, 73: 247-258.

[6] SOLTANOLKOTABI M, ELHAMIFAR E, CANDES E J. Robust subspace clustering[J]. 2014.

[7] WANG Q, et al.Multi-View Subspace Clustering via Structured Multi-Pathway Network.[J].IEEE transactions on neural networks and learning systems,2022,PPDOI:10.1109/TNNLS.2022.3213374.

[8] FANG U, LI M, LI J, et al. A comprehensive survey on multi-view clustering[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2023, 35(12): 12350-12368.

[9] MIAO J, ZHANG X, YANG T, et al. A comprehensive survey on subspace clustering: methods and applications[J]. Artificial Intelligence Review, 2025, 58(11): 346.

[10] LIN Z, LIU R, SU Z. Linearized alternating direction method with adaptive penalty for low-rank representation[J]. Advances in neural information processing systems, 2011, 24.

[11] WAHBA G. A least squares estimate of satellite attitude[J]. SIAM review, 1965, 7(3): 409-409.

[12] R.H.BARTELS and G. STEWART,"Solution of the matrix equation AX+XB= C,"Communications of the ACM,vol.15,no.9,pp.820-826,1972.

[13] LIU G, LIN Z, YAN S, et al. Robust recovery of subspace structures by low-rank representation[J]. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 2012, 35(1): 171-184.

[14] CAI J F, CANDES E J, SHEN Z. A singular value thresholding algorithm for matrix completion[J]. SIAM Journal on optimization, 2010, 20(4): 1956-1982.

[15] SAMARIA F S, HARTER A C. Parameterisation of a stochastic model for human face identification[C]//Proceedings of 1994 IEEE workshop on applications of computer vision. IEEE, 1994: 138-142.

[16] AMINI M R, USUNIER N, GOUTTE C. Learning from multiple partially observed views-an application to multilingual text categorization[J]. Advances in neural information processing systems, 2009, 22.

[17] GREENE D, CUNNINGHAM P. Practical solutions to the problem of diagonal dominance in kernel document clustering[C]//Proceedings of the 23rd international conference on Machine learning. 2006: 377-384.

[18] HE X, YAN S, HU Y, et al. Face recognition using laplacianfaces[J]. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 2005, 27(3): 328-340.

[19] CAO X, ZHANG C, FU H, et al. Diversity-induced multi-view subspace clustering[C]//Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition. 2015: 586-594.

[20] ZHANG C, FU H, LIU S, et al. Low-rank tensor constrained multiview subspace clustering[C]//Proceedings of the IEEE international conference on computer vision. 2015: 1582-1590.

[21] KANG Z, ZHOU W, ZHAO Z, et al. Large-scale multi-view subspace clustering in linear time[C]//Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence. 2020, 34(04): 4412-4419.

[22] CHEN M S, HUANG L, WANG C D, et al. Multi-view clustering in latent embedding space[C]//Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence. 2020, 34(04): 3513-3520.

第一作者：王森（1969—），男，教授，硕士生导师，研究方向为计算机算法与应用。

通信作者：梁志坚（2000—），男，硕士研究生，研究方向为聚类分析与数据挖掘。